1 ВЫВОД УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В математической физике изучение явлений (объектов природы) осуществляется в рамках тех или иных моделей, в которых учитываются не все реальные факторы, характеризующие явление или свойства объекта, а лишь наиболее важные, определяющие с разной степенью подробности сущность изучаемого явления (объекта).

В рамках такого рода моделей рассмотрим ряд физических задач, приводящих к уравнениям в частных производных второго порядка.

1.1 *Уравнение малых поперечных колебаний струны*

Струной называется твердое тело, в котором длина значительно превосходит остальные размеры, а внешняя сила натяжения, действующая на него, предполагается значительной. Поэтому его сопротивлением изгибу можно пренебречь. Это означает, что напряжения, возникающие в струне, всегда направлены по касательной к ее мгновенному профилю (рис. 1.1).

Для построения математической модели поперечных колебаний струны выберем систему координат, у которой ось Ox проведена вдоль струны. Колебания каждой точки струны с абсциссой x описываются тремя компонентами вектора смещения $\vec{u}(x,t)=\{u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t)\}$.

Будем рассматривать только такие колебания, в которых:

а) векторы смещения точек струны лежат в одной плоскости (x, u);

б) вектор смещения перпендикулярен в любой момент времени к оси Ox (поперечные колебания), т.е. $\vec{u}(x,t)=u(x,t)$;

в) ограничимся рассмотрением лишь малых колебаний струны, т.е. таких, в которых можно пренебречь квадратом величины $u'_x(x,t)$ (скорость изменения формы) в сравнении с единицей.

В рамках этой модели величину натяжения T, возникающего в струне, можно считать не зависящей от времени t. Действительно, рассмотрим участок (x_1, x_2) невозмущенной струны. Его длина l_0 в начальный момент времени равна $x_2 - x_1$, а в некоторый момент времени t – l. Для малых колебаний $l=\int\limits_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(u'_x)^2}\,dx \approx \int\limits_{x_1}^{x_2} 1\cdot dx = x_2 - x_1$.

Это значит, что в рамках изучаемой модели удлинением участков струны в процессе колебаний можно пренебречь и, следовательно, в силу закона Гука величина T не зависит от времени, т.е. $T(x,t)=T(x)$.

Составим уравнение движения малого участка струны AB длиной Δx (рис. 1.1). Его движение описывается вторым законом Ньютона: $m\cdot\vec{a}=\vec{F}$, в котором m – масса участка AB ($m=\rho(x)\cdot\Delta x$, $\rho(x)$ – линейная плотность струны), $\vec{a}=\vec{u}''_{xx}(x,t)$ – ускорение точек участка. Сила $\vec{F}$ представляет собой равнодействующую внутренних и внешних сил, приложенных к рассматриваемому участку. Под внутренней силой понимается сила, действующая на элемент струны со стороны смежных с ним участков в точках A и B. Величина этой силы равна $\vec{T}(x+\Delta x)-\vec{T}(x)$. Внешние силы, представляют собой воздействие на струну различных физических полей или тел. Результирующая этих сил может быть представлена в виде $\vec{f}(x,t)\Delta x$ ($\vec{f}(x,t)$ – линейная плотность внешних сил). Таким образом, смещение $\vec{u}(x)$ элемента AB удовлетворяет уравнению $\vec{T}(x+\Delta x)-\vec{T}(x)+\vec{f}(x,t)\Delta x=\rho(x)\Delta x\dfrac{\partial^2\vec{u}(x,t)}{\partial t^2}$.

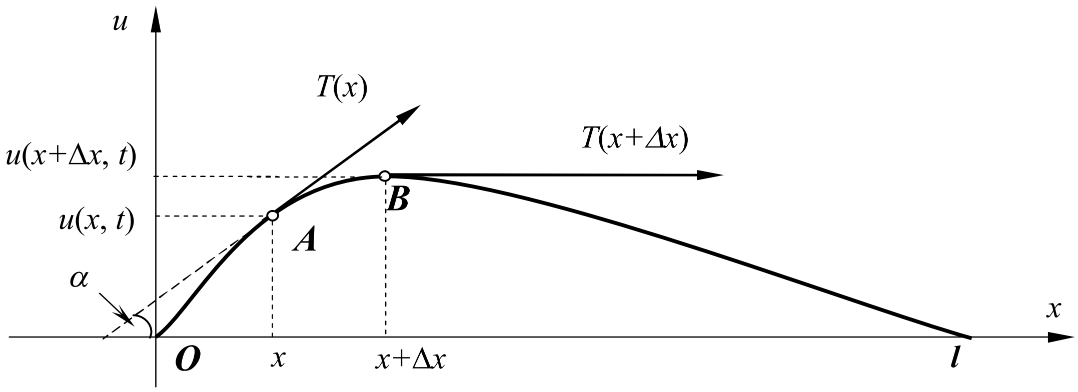

Рис. 1.1

Проекция этого векторного равенства на ось u, с учетом соотношений $T_u=T(x)\sin\alpha=T(x)\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=T(x)\dfrac{u'_x}{\sqrt{1+(u'_x)^2}}\approx T(x)u'_x$ и $g(x,t)=\vec{f}_u(x,t)$, приводит к уравнению

$$T(x+\Delta x)\frac{\partial^2 u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\vec{T}(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x}+g(x,t)\Delta x=\rho(x)\Delta x\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}.$$

Деление последнего равенства на Δx с последующим переходом к пределу при $\Delta x\to 0$ позволяет получить уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T(x)u'_x(x,t)\right)+g(x,t)=\rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}. \qquad (1.1)$$

В силу произвольности выбора точки x полученное уравнение будет справедливо для всех точек струны. Таким образом, уравнение (1.1) является уравнением малых поперечных колебаний струны.

В практических приложениях уравнение (1.1) может принимать различный вид в зависимости от характера внешнего воздействия и упругих свойств материала струны. Например, если $\rho(x)\equiv const$ и $T(x)\equiv const$, то уравнение приобретает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F(x,t),\quad a^2=\frac{T}{\rho},\quad F(x,t)=\frac{g(x,t)}{\rho}. \qquad (1.2)$$

Уравнение (1.2) называется одномерным волновым уравнением.

Малые продольные колебания точек упругого стержня [см. 1, 7] описываются уравнениями, аналогичными (1.1), (1.2):
для неоднородного стержня

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(S(x)E(x)u'_x(x,t)\right)+g(x,t)=\rho(x)S(x)u''_{tt}(x,t), \tag{1.3}$$

для однородного

$$u''_{tt}=a^2u''_{xx}+F(x,t),\quad a^2=\frac{E}{\rho},\quad F(x,t)=\frac{g(x,t)}{\rho S}, \tag{1.4}$$

где $S(x), \rho(x), E(x)$ – соответственно площадь сечения стержня плоскостью перпендикулярной оси *x*, плотность в сечении и модуль Юнга.

1.2 *Уравнение теплопроводности*

Рассмотрим задачу о распространении тепла в неравномерно нагретом твердом теле. Пусть $u(x, y, z, t)$ – температура тела в точке (x, y, z) в момент времени *t*. Примем следующую модель процесса: происходит механический перенос тепла от точек с более высокой температурой к точкам с более низкой температурой: все тепло идет на изменение температуры тела; свойства тела не зависят от температуры, т.е. тело изотропно по отношению к температуре.

Возьмем внутри тела произвольный объем *V*, ограниченный замкнутой гладкой поверхностью *S*.

Количество тепла dQ_1, проходящее через элементарную площадку *dS* с нормалью $\vec{n}$, за время *dt* определяется по закону Фурье $dQ_1=-k\frac{\partial u}{d\vec{n}}dSdt$, где $k = k(x, y, z)$ – коэффициент теплопроводности, не зависящий от направления нормали $\vec{n}$. Тогда через поверхность *S* за промежуток времени $t_2 - t_1$, проходит количество тепла равное $Q_1=-\int\limits_{t_1}^{t_2}dt\iint\limits_S k\frac{\partial u}{d\vec{n}}dS$.

Количество тепла dQ_2, необходимое на изменение температуры элементарного объема *dV* на величину $u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)$ определяется соотношением $dQ_2=c\rho\left(u(x,y,z,t_2)-u(x,y,z,t_1)\right)\cdot dV$, где $c=c(x,y,z)$ – удельная теплоемкость, $\rho=\rho(x,y,z)$ – плотность вещества. Следовательно, на изменение температуры всего объема *V* требуется количество тепла равное

$$Q_2=\iiint\limits_V c\rho\left(u(x,y,z,t_2)-u(x,y,z,t_1)\right)dV.$$

Предположим, что внутри тела имеются источники тепла. Обозначим через $F(x, y, z, t)$ плотность тепловых источников (количество поглощенного или выделяемого тепла в единицу времени в единице объема), тогда количество тепла, выделяемого (поглощаемого) источниками тепла в объеме *V* за промежуток времени $t_2 - t_1$, будет равно $Q_3=\int\limits_{t_1}^{t_2}dt\iiint\limits_V F(x,y,z,t)dV$.

Составим теперь уравнение баланса тепла для объема V. В рамках изучаемой модели количество поглощаемого тепла равно количеству выделяемого, т.е. $Q_2 = Q_1 + Q_3$.

Учитывая, что $u(x,y,z,t_2) - u(x,y,z,t_1) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} dt$ и, по формуле Гаусса – Остроградского, $\iint\limits_S k \frac{\partial u}{dn} dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}(k \cdot \operatorname{grad} u) dV$, получим

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_V \left(c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k \cdot \operatorname{grad} u) - F(x,y,z,t) \right) dV = 0 .$$

В силу того что подынтегральная функция непрерывна, а объем V и промежуток времени $t_2 - t_1$ произвольны, для любой точки (x, y, z) и для любого момента времени t должно быть

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \cdot \operatorname{grad} u) + F(x,y,z,t). \qquad (1.5)$$

Это уравнение является уравнением теплопроводности неоднородного изотропного тела.

Если тело однородно, т.е. c, ρ, k – *const*, то уравнение (2.1) можно переписать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x,y,z,t), \quad a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad f(x,y,z,t) = \frac{F(x,y,z,t)}{c\rho}. \qquad (1.6)$$

Совершенно аналогично выводится уравнение диффузии. При этом надо пользоваться законом Нернста для потока вещества w в направлении $\vec{n}$: $w = -D \frac{\partial u}{d\vec{n}}$. Здесь $u(x, y, z, t)$ – концентрация диффундирующего вещества, D – коэффициент диффузии. Уравнение диффузии, таким образом, имеет вид

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(D \cdot \operatorname{grad} u) + F(x,y,z,t), \qquad (1.5')$$

где c – коэффициент пористости среды.

Задачи об отыскании установившейся температуры или концентрации приводят, очевидно, к следующему уравнению

$$\operatorname{div}(k \cdot \operatorname{grad} u) = -F(x,y,z,t). \qquad (1.7)$$

1.3 *Постановка краевых задач*

При решении задач физики или других областей науки математическими методами необходимо прежде всего дать математическую постановку задачи. Однако интересующие нас явления носят, как правило, однозначный характер, в то время как описывающие их уравнения имеют множество решений. Поэтому при математической постановке задачи недостаточно написать уравнение (или систему), которому удовлетворяет искомая функция (система функций).

Надо также указать дополнительные условия, позволяющие выделить лишь одно интересующее нас решение, описывающее конкретное явление, процесс. При этом дополнительных условий должно быть не слишком много, чтобы существовало решение, удовлетворяющее им. Таким образом, дополнительные условия должны обеспечить существование и единственность решения.

Характер дополнительных условий покажем далее на примерах задач.

Например, в случае колебаний струны или стержня (уравнения (1.1) и (1.3)) надо задать начальный профиль $u(x,0)=\varphi(x)$ и начальную скорость $u_t(x,0)=\varphi(x)$ точек струны (стержня). Это начальные условия. Аналогичный вид они имеют для любого волнового уравнения.

Кроме того, надо записать режим на концах (краях) струны (стержня).

Так, если задан закон движения концов $u(0,t)=\mu_1(t)$, $u(l,t)=\mu_2(t)$, то мы будем называть такие дополнительные условия краевыми (граничными) условиями первого типа.

Если задан закон изменения силы, приложенной к концу струны (стержня) и действующей в направлении колебаний, то режим на концах можно записать следующим образом:

$$Eu_x\big|_{x=0}=f_1(t),\ Eu_x\big|_{x=l}=f_2(t) \text{ или } u'_x(0,t)=\gamma_1(t),\quad u'_x(l,t)=\gamma_2(t).$$

Это краевые условия второго типа.

Пусть к концу стержня ($x=l$) прикреплена пружина, действующая вдоль оси x. Тогда сила натяжения Eu_x на конце будет уравновешиваться силой действия пружины, равной αu. Краевой режим на этом конце запишется в виде: $Eu_x(l,t)=-\alpha\, u(l,t)$, где α – коэффициент жесткости пружины, или $u_x(l,t)=hu(l,t)=0$.

Если пружина в свою очередь движется по закону $x=\beta(t)$, то краевой режим можно представить следующим образом: $u_x(l,t)+h[u(l,t)-\beta(t)]=0$. Это краевое условие третьего типа. На левом конце $x=0$ оно имеет вид: $u_x(0,t)+h[u(0,t)-\beta(t)]=0$.

Для двух- и трехмерного случаев рассмотренные типы краевых условий имеют следующий вид:

$$u\big|_s=\mu(M,t) \text{ (первый тип),} \tag{1.8}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_S=v(M,t) \text{ (второй тип),} \tag{1.9}$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}+hu\right)\right|_S=\beta(M,t) \text{ (третий тип).} \tag{1.10}$$

Здесь $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ – производная по внешней нормали к поверхности S.

Такие же краевые условия встречаются в задачах, приводящихся к уравнениям параболического типа. Так, если задается температура на поверхности тела, то имеем краевое условие первого типа. Если задается плотность потока тепла $-k\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ через поверхность тела *S*, то имеем краевое условие второго типа. Если же на поверхности тела происходит теплообмен со средой, имеющей температуру $\beta(M,t)$, по закону Ньютона $-k\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\bigg|_{M\in S}=h[u-\beta]_{M\in S}$, то имеем краевое условие третьего типа.

Встречаются и другие типы краевых условий. Рассмотренные типы краевых условий являются линейными, поскольку искомая функция и ее производные входят в них линейно. Они называются однородными, если их правые части (μ,ν,β) тождественно равны нулю, и неоднородными – в противном случае.

Если нас будут интересовать значения искомой функции в точках, настолько удаленных от границы, что влиянием условий на границах можно пренебречь, то оправдана постановка задачи без краевых условий, т.е. задачи Коши.

В тех случаях, когда можно выделить круговую относительно некоторой оси или сферическую относительно некоторого центра симметрию по пространственным переменным, целесообразно уравнения и дополнительные условия записывать в цилиндрических или сферических координатах соответственно. В цилиндрических координатах $x=r\cdot\cos\varphi,\ y=r\cdot\sin\varphi,\ z=z$ оператор Лапласа принимает следующий вид $\Delta u=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

В сферических координатах $x=r\cos\varphi\sin\theta,\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\ z=r\cos\theta$ –

$$\Delta u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

1.4 *Задачи*

1. Верхний конец упругого, однородного, вертикально подвешенного тяжелого стержня длины l жестко прикреплен к потолку свободно падающего лифта, который, достигнув скорости v_0, мгновенно останавливается. Поставить краевую задачу о продольных колебаниях этого стержня.
2. Поставить краевую задачу о малых поперечных колебаниях струны в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости, предполагая, что концы струны закреплены жестко. Начальные условия произвольные.
3. Поставить краевую задачу о малых поперечных колебаниях *тяжелой* струны относительного вертикального положения равновесия, если ее верхний конец ($x = 0$) жестко закреплен, а нижний свободен. Начальные условия произвольные.
4. Поставить краевую задачу о малых поперечных колебаниях бесконечной струны под действием силы $F(x)$, приложенной, начиная с момента $t=0$, в точке $x=x_0$, перемещающейся вдоль струны со скоростью v_0.

5. Поставить краевую задачу о малых поперечных колебаниях струны с жестко закрепленными концами под действием импульса *P*, сообщенного струне в момент времени $t = 0$ в точке $x = x_0$.
6. На боковой поверхности тонкого стержня происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой $u_{cp} = \varphi(t)$. Поставить краевую задачу об определении температуры стержня, если на одном конце его поддерживается температура $f(t)$, а на другой подается тепловой поток $q(t)$.
7. Поставить краевую задачу об определении температуры стержня, боковая поверхность которого теплоизолирована, а на концах происходит конвективный теплообмен со средами, температура которых u_1 и u_2. Начальная температура стержня нулевая.
8. Поставить краевую задачу об определении температуры стержня $0 \le x \le l$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Начальная температура стержня нулевая, один конец поддерживается при нулевой температуре, а другой теплоизолирован, и с момента $t = 0$ в точке $x = x_0$ действует источник постоянной мощности *Q*.
9. Поставить краевую задачу об определении температуры шара радиусом *R*, на поверхности которого происходит конвективный теплообмен со средой нулевой температуры. Начальная температура шара $f(r)$.
10. Поставить краевую задачу об остывании сферической оболочки $R_1 \le r \le R_2$, на внутренней и внешней поверхностях которой происходит конвективный теплообмен со средой нулевой температуры. Начальная температура оболочки $f(r)$.
11. Поставить краевую задачу о малых продольных колебаниях, вызванных некоторым начальным возмущением, для упругого стержня $(0 \le x \le l)$ переменного сечения $S(x)$, концы которого упруго закреплены. Плотность массы равна $\rho(x)$, модуль упругости – $E(x)$.
12. Поставить краевую задачу о малых продольных колебаниях однородного стержня, один конец которого закреплен жестко, а к другому с момента $t = 0$ приложена сила $F_0 = const$. Начальные условия произвольные.

2 КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ПРИВЕДЕНИЕ ИХ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

2.1 *Классификация уравнений*

Линейное относительно старших производных уравнение второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(x, u, \mathrm{grad}u) = 0, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2.1}$$

в каждой фиксированной точке $x_0 = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$ можно привести к каноническому виду неособым линейным преобразованием $\xi = B^T x$, где B – такая матрица, что преобразование $y = B\eta$ приводит квадратичную форму

$$Q = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(x_0\right) y_i y_j, \tag{2.2}$$

где $a_{ij}\left(x_0\right)$ – значения коэффициентов при старших производных уравнения (2.1) в точке x_0, к каноническому виду:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\left(x_0\right) \eta_i^{\,2}, \alpha_i \in \left(-1; 0; 1\right). \tag{2.3}$$

При этом известно, что число положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов формы (2.3) не зависит от способа приведения этой формы к каноническому виду. На этом факте основана классификация уравнений второго порядка (2.1).

Говорят, что уравнение (2.1) относится в точке $x_0 = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$ к эллиптическому типу, если коэффициенты α_i формы (2.3) все отличны от нуля и одного знака, гиперболическому типу, если коэффициенты α_i формы (2.3) все отличны от нуля и одного знака за исключением одного, и параболическому типу если один из коэффициентов равен нулю, а остальные – одного знака.

2.2 *Приведение уравнений с двумя независимыми переменными к каноническому виду*

Рассмотрим уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными:

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

$$|a| + |b| + |c| \neq 0. \tag{2.4}$$

Указанное уравнение является (в точке или области) уравнением

гиперболического типа, если $b^2 - ac > 0$ (в точке или области);

параболического типа, если $b^2 - ac = 0$ (в точке или области);

эллиптического типа, если $b^2 - ac < 0$ (в точке или области).

Уравнение $a(x,y)(dy)^2 - 2b(x,y)dxdy + c(x,y)(dx)^2 = 0$ называется *уравнением характеристик* уравнения (2.4).

Для уравнения гиперболического типа уравнение характеристик имеет два различных действительных общих интеграла $\varphi(x,y) = C_1, \psi(x,y) = C_2$, т. е. существует два семейства действительных характеристик. С помощью замены переменных $\xi = \varphi(x,y), \eta = \psi(x,y)$ дифференциальное уравнение (2.4) приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2\widetilde{u}(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta}=F_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right).$$

Для уравнения параболического типа оба семейства характеристик совпадают, так как уравнение характеристик дает лишь один интеграл $\varphi(x,y)=C$. В этом случае нужно произвести замену переменных $\xi=\varphi(x,y), \eta=\psi(x,y)$, где $\psi(x,y)$ – какая-нибудь функция, для которой

$$\begin{vmatrix}\xi'_x & \xi'_y\\ \eta'_x & \eta'_y\end{vmatrix}=\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\neq 0.$$

После такой замены уравнение (2.4) приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2\widetilde{u}(\xi,\eta)}{\partial\eta^2}=F_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right).$$

Для уравнения эллиптического типа общие интегралы уравнения характеристик имеют вид $\varphi(x,y)\pm i\psi(x,y)=C_{1,2}$, где $\varphi(x,y),\psi(x,y)$ – действительные функции. Тогда с помощью замены переменных $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$ уравнение (2.4) приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2\widetilde{u}(\xi,\eta)}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\widetilde{u}(\xi,\eta)}{\partial\eta^2}=F_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right).$$

Пример 1. В каждой области, где сохраняется тип уравнения, привести к каноническому виду уравнение

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Решение. Здесь $a=x^2, b=0, c=-y^2, b^2-ac=x^2y^2\geq 0$, следовательно, при $x = 0$, $y \neq 0$ или $y = 0$, $x\neq 0$ – уравнение параболического типа, канонический вид при этом соответственно $u''_{yy}=0$ или $u''_{xx}=0$. При $x = 0$, $y = 0$ уравнение вырождается. В случае же, если $y \neq 0$, $x \neq 0$, уравнение – гиперболического типа.

Составляем уравнение характеристик:

$$x^2(dy)^2-y^2(dx)^2=0, \text{ или } (xdy+ydx)(xdy-ydx)=0.$$

Следовательно, имеем два дифференциальных уравнения $xdy+ydx=0$ и $xdy+ydx=0$, разделяя в которых переменные и интегрируя, получим $\ln y+\ln x=\ln C_1$, $\ln y-\ln x=\ln C_2$. Откуда находим $xy=C_1$, $y/x=C_2$ – уравнения двух семейств характеристик.

Введем новые переменные $\xi=xy$, $\eta=y/x$, тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=y\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\xi}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\eta};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=x\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\xi}+\frac{1}{x}\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\right)=y\left(\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)-$$

$$-\frac{y}{x^2}\left(\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)+2\frac{y}{x^3}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}=y^2\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}-2\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}+2\frac{y}{x^3}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}x\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\frac{1}{x}\right)=x^2\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}.$$

Подставив в дифференциальное уравнение выражения для производных, получим:

$$x^2\left(\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}y^2-2\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}\frac{y^2}{x^2}+\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}\frac{y^2}{x^4}+2\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\frac{y}{x^3}\right)-y^2\left(x^2\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}\right)=0;$$ или

после упрощений $\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{1}{2\xi}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}=0$, т.е. уравнение приведено к каноническому виду.

2.3 *Приведение к простейшему виду*

Заметим, что если коэффициенты уравнения (2.4) постоянны, после приведения этого уравнения к каноническому виду можно произвести дальнейшие упрощения уравнения. Так, вводя новую неизвестную функцию $w(\xi,\eta)$ по формуле $\tilde{u}(\xi,\eta)=w(\xi,\eta)e^{\lambda\xi+\mu\eta}$, подходящим подбором постоянных λ и μ можно добиться, чтобы коэффициенты при первых производных $w(\xi,\eta)$ в эллиптическом и гиперболическом случаях, и один из коэффициентов при первых производных и коэффициент при самой $w(\xi,\eta)$ в параболическом случае обращались в ноль.

Пример 2. Привести к каноническому виду и выполнить дальнейшие упрощения уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial y}-4u=0.$$

Решение. Здесь $a = 1$, $b = -1$, $c = 2$, $b^2-ac=-1<0$, т.е. уравнение – эллиптического типа.

Уравнение характеристик имеет вид $(dy)^2+2dxdy+2(dx)^2=0$. Отсюда $\frac{dy}{dx}=-1\pm i$; получаем $y+x-ix=C_1, y+x+ix=C_2$. Произведя замену переменных $\xi=x+y,\ \eta=x$, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}.$$

Подставив найденные выражения в дифференциальное уравнение, получим

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}-2\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}-2\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}+2\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}-4\tilde{u}=0.$$

Таким образом, каноническое уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}+\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}-4\tilde{u}=0.$$

Выполним дальнейшее упрощение путем введения новой неизвестной функции $w(\xi,\eta)$ по формуле $\tilde{u}(\xi,\eta)=w(\xi,\eta)e^{\lambda\xi+\mu\eta}$. Тогда

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}=\frac{\partial w}{\partial\xi}e^{\lambda\xi+\mu\eta}+\lambda we^{\lambda\xi+\mu\eta},\qquad \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}=\frac{\partial w}{\partial\eta}e^{\lambda\xi+\mu\eta}+\mu we^{\lambda\xi+\mu\eta},$$

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}e^{\lambda\xi+\mu\eta}+2\lambda\frac{\partial w}{\partial\xi}e^{\lambda\xi+\mu\eta}+\lambda^2 we^{\lambda\xi+\mu\eta},$$

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}e^{\lambda\xi+\mu\eta}+2\mu\frac{\partial w}{\partial\eta}e^{\lambda\xi+\mu\eta}+\mu^2 we^{\lambda\xi+\mu\eta},$$

и, следовательно, каноническое уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}e^{\lambda\xi+\mu\eta}+2\lambda\frac{\partial w}{\partial\xi}e^{\lambda\xi+\mu\eta}+\lambda^2 we^{\lambda\xi+\mu\eta}+\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}e^{\lambda\xi+\mu\eta}+2\mu\frac{\partial w}{\partial\eta}e^{\lambda\xi+\mu\eta}+$$

$$+\mu^2 we^{\lambda\xi+\mu\eta}+\frac{\partial w}{\partial\xi}e^{\lambda\xi+\mu\eta}+\lambda we^{\lambda\xi+\mu\eta}-4we^{\lambda\xi+\mu\eta}=0.$$

Выбирая $\lambda=-\frac{1}{2}$, $\mu=0$ и сокращая на $e^{\lambda\xi+\mu\eta}$, получим простейший канонический вид исходного уравнения $\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}-4{,}25w=0$.

2.4 *Задачи*

В каждой области, где сохраняется тип уравнения, привести к каноническому виду уравнения:

1. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$
2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$
3. $4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-e^{2x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-4y^2\frac{\partial u}{\partial x}=0.$
4. $y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2x\frac{\partial u}{\partial x}=0.$
5. $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$
6. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+0{,}5\frac{\partial u}{\partial y}=0.$
7. $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\sqrt{xy}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$
8. $y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

9. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

10. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

11. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

12. $xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{y}{2}\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{1}{2y}\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

13. $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

14. $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

15. $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

16. $y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 7x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

17. $y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} - u = 0.$

18. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\dfrac{\partial u}{\partial x} + u = 0.$

19. $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sqrt{xy}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{\sqrt{x}} - \sqrt{y}\right)\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

20. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \cos^2 x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \mathrm{ctg}x\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$

21. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\cos x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(3 + \sin^2 x\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

22. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \sin^2 y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mathrm{tg}y\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$

23. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y\sin x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (y\sin x)^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

24. $4y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^4 e^{2x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4y^2\dfrac{\partial u}{\partial x} - 4y^2\dfrac{\partial u}{\partial y} + u = 0.$

25. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2x\dfrac{\partial u}{\partial x} + 4y\dfrac{\partial u}{\partial y} + 16x^4 u = 0.$

Привести к простейшему каноническому виду уравнения:

1. $u''_{xx} - 4u''_{xy} - 3u''_{yy} - 2u'_x + 6u'_y = 0.$
2. $u''_{xx} - 2u''_{xy} - 3u''_{yy} + u'_y = 0.$
3. $u''_{xx} - 6u''_{xy} + 25u''_{yy} + 4u'_x + 8u'_y = 0.$
4. $4u''_{xx} - 4u''_{xy} + u''_{yy} + 6u'_x + 5u'_y = 0.$
5. $3u''_{xx} + 5u''_{xy} + 2u''_{yy} + u'_y + 8u = 0.$
6. $3u''_{xx} - 4u''_{xy} + u''_{yy} - 7u'_x + 5u = 0.$
7. $u''_{xx} - 3u''_{xy} + 2u''_{yy} + 4u'_x + 4u'_y = 0.$
8. $u''_{xx} + 4u''_{xy} + 4u''_{yy} + 3u'_x + 6u'_y = 0.$
9. $u''_{xx} + 2u''_{xy} + 5u''_{yy} + \tfrac{1}{2}u'_x + 2u'_y = 0.$
10. $3u''_{xx} - 5u''_{xy} - 2u''_{yy} + 3u'_x + u'_y = 0.$
11. $2u''_{xx} - 7u''_{xy} + 6u''_{yy} + 3u'_x + 5u = 0.$
12. $u''_{xx} + 3u''_{xy} + 2u''_{yy} + 3u'_x - 3u'_y - u = 0.$
13. $3u''_{xx} + 10u''_{xy} + 3u''_{yy} + 2u'_x + 4u = 0.$
14. $u''_{xx} + 4u''_{xy} + 5u''_{yy} + u'_x - u'_y + 4u = 0.$
15. $u''_{xx} - 2u''_{xy} + u''_{yy} + 9u'_x + 9u'_y - 9u = 0.$

16. $u''_{xx} + 4u''_{xy} + 3u''_{yy} + 5u'_x + u'_y + 4u = 0.$

17. $u''_{xx} + 2u''_{xy} + u''_{yy} + 3u'_x - 5u'_y + 4u = 0.$

18. $2u''_{xx} + 2u''_{xy} + u''_{yy} + 4u'_x + 4u'_y + u = 0.$

19. $u''_{xx} + 7u''_{xy} + 10u''_{yy} + 9u'_x + 3u'_y + \frac{1}{3}u = 0.$

20. $9u''_{xx} - 6u''_{xy} + u''_{yy} - 4u'_x + 6u'_y + 12u = 0.$

21. $16u''_{xx} - 8u''_{xy} + u''_{yy} - u'_x - u'_y + 16u = 0.$

22. $2u''_{xx} + 3u''_{xy} - 2u''_{yy} - 2u'_x + 5u'_y - u = 0.$

23. $2u''_{xx} - 5u''_{xy} + 2u''_{yy} + u'_x + 4u'_y + 3u = 0.$

24. $4u''_{xx} + 4u''_{xy} + 5u''_{yy} - 2u'_x + 4u'_y + 2u = 0.$

25. $9u''_{xx} - 12u''_{xy} + 4u''_{yy} - 6u'_x - 4u'_y + 3u = 0.$

3 МЕТОДЫ, НАИБОЛЕЕ ЧАСТО ПРИМЕНЯЕМЫЕ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

3.1 *Задача Коши для волнового уравнения. Метод характеристик*

3.1.1 Решение задачи Коши на прямой

Рассмотрим задачу Коши для одномерного волнового уравнения при отсутствии внешних сил

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < \infty,\ t > 0, \tag{3.1}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x). \tag{3.2}$$

Выполнив замену переменных $\xi = x - at,\ \eta = x + at$, приведем уравнение (3.1) к каноническому виду $\tilde{u}''_{\xi\eta} = 0$. Общее решение последнего уравнения дается соотношением $\tilde{u}(\xi,\eta) = F(\xi) + \Phi(\eta)$, где $F(\xi), \Phi(\eta)$ – произвольные дважды дифференцируемые функции.

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения свободных колебаний струны имеет вид: $u(x,t) = F(x - at) + \Phi(x + at)$.

Подбирая функции $F(\xi), \Phi(\eta)$ так, чтобы функция $u = u(x,t)$ удовлетворяла приведенным начальным условиям, приходим к системе

$$\begin{cases} F(x) + \Phi(x) = \varphi(x), \\ -aF'(x) + a\Phi'(x) = \psi(x), \end{cases}$$

решая которую, находим

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x) - \frac{1}{a}\int_0^x \psi(y)dy\right) - C; \ \ \Phi(x) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x) + \frac{1}{a}\int_0^x \psi(y)dy\right) + C.$$

Таким образом, решение исходного дифференциального уравнения при заданных начальных условиях дается соотношением

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(y)dy\,, \qquad (3.3)$$

которое носит название формулы Д'Аламбера.

В случае неоднородного уравнения (см. уравнение (1.2)) решение принимает вид

$$u(x,t))=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(y)dy+\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}F(y,\tau)dyd\tau. \qquad (3.4)$$

Пример 3. Найти решение задачи Коши для уравнения

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{2}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

в полуплоскости $y>0$, удовлетворяющее начальным условиям

$$u\big|_{y=1}=1-x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=1}=3\,.$$

Решение. Сначала найдем общее решение уравнения в полуплоскости $y>0$. Для этого приведем уравнение к каноническому виду.

Общими интегралами характеристического уравнения $-y^2dxdy+(dx)^2=0$ являются $x=C_1$, $3x-y^3=C_2$. Следовательно, в исходном уравнении нужно сделать замену переменных $\xi=x,\ \eta=3x-y^3$. Тогда уравнение приводится к каноническому виду $\tilde{u}''_{\xi\eta}=0$. Интегрируя это уравнение, находим $u(x,y)=F(x)+\Phi(3x-y^3)$. Воспользуемся теперь заданными начальными условиями:

$$\begin{cases}F(x)+\Phi(3x-1)=1-x,\\ -3\Phi'(3x-1)=3.\end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $F(x)=2x+C,\ \Phi(x)=-x-C$. Следовательно, решением задачи является функция

$$u(x,y)=y^3-x\,.$$

Пример 4. Найти решение задачи Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ t>0,\ |x|<\infty,\ u\big|_{t=0}=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=x.$$

Решение. Здесь $a=2,\ \varphi(x)=0, \psi(x)=x$. Отсюда по формуле Д'Аламбера (3.3) получим

$$u(x,t)=\frac{1}{4}\int\limits_{x-2t}^{x+2t}ydy=\frac{1}{8}y^2\Bigg|_{x-2t}^{x+2t}=\frac{1}{8}\Big[(x+2t)^2-(x-2t)^2\Big]=xt.$$

3.1.2 Решение задачи Коши в пространстве

Решение задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u, \quad t > 0, -\infty < x, y, z < \infty,$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x, y, z)$$

дается формулой Пуассона

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{S_{at}} \psi(\xi, \eta, \varsigma) dS + \frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\iint_{S_{at}} \varphi(\xi, \eta, \varsigma) dS\right) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{D_{at}} \frac{f\left(\xi, \eta, \varsigma, t - \dfrac{r}{a}\right)}{r} d\xi d\eta d\zeta,$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\varsigma)^2}, \; S_{at} - \text{сфера } r = at. \qquad (3.5)$$

В плоском случае формула Пуассона (3.5) принимает вид

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a}\left(\iint_{Q_{at}} \frac{\psi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial t}\left(\iint_{Q_{at}} \frac{\varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}\right) + \int_0^t \iint_{Q_{a(t-\tau)}} \frac{f(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta d\tau}{\sqrt{a^2 (t-\tau)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}\right),$$

$$Q_{at} - \text{круг } (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \le (at)^2. \qquad (3.6)$$

Пример 5. Решить задачу Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + 2, \quad t > 0, -\infty < x, y < \infty,$$

$$u\big|_{t=0} = x, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = y.$$

Решение. Для нахождения решения задачи воспользуемся формулой (3.6). Посчитаем каждый интеграл в отдельности

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \le t^2} \frac{\eta d\xi d\eta}{\sqrt{t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}} = \begin{bmatrix} x - \xi = u \\ y - \eta = v \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{y}{2\pi}\iint_{u^2 + v^2 \le t^2} \frac{du dv}{\sqrt{t^2 - u^2 - v^2}} - \frac{1}{2\pi}\iint_{u^2 + v^2 \le t^2} \frac{v du dv}{\sqrt{t^2 - u^2 - v^2}} = \begin{bmatrix} u = r\cos\varphi \\ v = r\sin\varphi \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{y}{2\pi}\int_0^t \int_0^{2\pi} \frac{r dr d\varphi}{\sqrt{t^2 - r^2}} = yt.$$

Аналогично

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\iint\limits_{Q_t}\frac{\xi d\xi d\eta}{\sqrt{t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}\right)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}(2\pi xt)=x,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t\iint\limits_{Q_{(t-\tau)}}\frac{2d\xi d\eta d\tau}{\sqrt{(t-\tau)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}=2\int\limits_0^t(t-\tau)d\tau=t^2.$$

Таким образом, $u(x,y,t)=x+yt+t^2$ – решение задачи.

3.1.3 Задачи

Найти решение задачи Коши:

1. $u''_{xx}-u''_{yy}+2u'_x+2u'_y=0,\ |x|<\infty,\ y>0;\ u\big|_{y=0}=x,\ u'_y\big|_{y=0}=0.$
2. $u''_{xx}-u''_{yy}-2u'_x-2u'_y=0,\ |y|<\infty,\ x<0;\ u\big|_{x=0}=-y,\ u'_x\big|_{x=0}=y-1.$
3. $u''_{xx}-6u''_{xy}+5u''_{yy}=0,\ |x|<\infty,\ y>0;\ u\big|_{y=0}=\cos x,\ u'_y\big|_{y=0}=0.$
4. $u''_{xx}-5u''_{xy}+4u''_{yy}=0,\ |x|<\infty,\ y>0;\ u\big|_{y=0}=0,\ u'_y\big|_{y=0}=x.$
5. $u''_{xx}+4u''_{xy}+3u''_{yy}=0,\ |x|<\infty,\ y>0;\ u\big|_{y=0}=0,\ u'_y\big|_{y=0}=\sin x.$
6. $u''_{xx}-u''_{xy}-12u''_{yy}=0,\ |x|<\infty,\ y>0;\ u\big|_{y=0}=e^x,\ u'_y\big|_{y=0}=0.$
7. $5u''_{xx}+2u''_{xy}-3u''_{yy}=0,\ |x|<\infty,\ y>0;\ u\big|_{y=0}=x^2,\ u'_y\big|_{y=0}=x.$
8. $u''_{tt}=4u''_{xx},\ t>0,\ |x|<\infty;\ u\big|_{t=0}=0,\ u'_t\big|_{t=0}=x.$
9. $u''_{tt}=u''_{xx}+6,\ t>0,\ |x|<\infty;\ u\big|_{t=0}=x^2,\ u'_t\big|_{t=0}=4x.$
10. $u''_{tt}=u''_{xx}+xt,\ t>0,\ |x|<\infty;\ u\big|_{t=0}=x,\ u'_t\big|_{t=0}=\sin x.$
11. $4u''_{tt}=u''_{xx}+x^2+t^2,\ t>0,\ |x|<\infty;\ u\big|_{t=0}=x^2\sin x,\ u'_t\big|_{t=0}=\cos 2x.$
12. $u''_{tt}=u''_{xx}+x\sin t,\ t>0,\ |x|<\infty;\ u\big|_{t=0}=e^{-x^2},\ u'_t\big|_{t=0}=\dfrac{1}{x+1}$
13. $u''_{tt}=9u''_{xx}+e^{-t},\ t>0,\ |x|<\infty;\ u\big|_{t=0}=\dfrac{1}{x^2+1},\ u'_t\big|_{t=0}=\sin x.$
14. $u''_{tt}=u''_{xx}+e^x,\ t>0,\ |x|<\infty;\ u\big|_{t=0}=\sin x,\ u'_t\big|_{t=0}=\cos x.$
15. $u''_{tt}=a^2\Delta u,\ \ t>0,\ \ -\infty<x,y,z<\infty;\ \ u\big|_{t=0}=x^2-y^2,\ \ u'_t\big|_{t=0}=xy.$

3.2 *Решение задач для волнового уравнения на полупрямой*

3.2.1 Решение задач с однородным краевым условием

Рассмотрим задачу Коши для одномерного волнового уравнения (3.1), (3.2). Нетрудно убедиться в справедливости следующих лемм.

***Лемма* 1**. Пусть в задаче (3.1), (3.2) функции, описывающие начальные данные $\varphi(x), \psi(x)$, нечетные относительно $x = 0$, т.е. $\varphi(x) = -\varphi(-x)$, $\psi(x) = -\psi(-x)$, тогда решение этой задачи $u(x,t)$ обращается в 0 при x=0, т.е. $u(0,t) = 0$.

***Лемма* 2**. Пусть в задаче (3.1), (3.2) функции, описывающие начальные данные $\varphi(x)$, $\psi(x)$, четные относительно x= 0, т.е. $\varphi(x) = \varphi(-x)$, $\psi(x) = \psi(-x)$, тогда производная решения этой задачи $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ обращается в 0 при x=0, т.е. $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0$.

Рассмотрим теперь смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \ 0 < x < \infty, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x), \ u(0,t) = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Для решения этой задачи нельзя непосредственно воспользоваться формулой Д'Аламбера, так как входящая в эту формулу разность $x - at$ может быть отрицательной, в то время как начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ не определены для отрицательного аргумента.

Продолжим нечетным образом функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ на отрицательную ось и обозначим

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), x \geq 0; \\ -\varphi(-x), x < 0, \end{cases} \quad \psi_1(x) = \begin{cases} \psi(x), x \geq 0; \\ -\psi(-x), x < 0. \end{cases}$$

Тогда решением поставленной задачи (3.7) будет функция

$$u(x,t) = \frac{\varphi_1(x-at) + \varphi_1(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_1(y) dy.$$

Действительно, при $x > at$ получим соотношение (3.3), которое удовлетворяет уравнению (3.1) и начальным условиям. При $x < at$ будем иметь

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi_1(y) dy.$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что и в этом случае функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (3.1). Краевое условие выполнено в силу *леммы* 1. Таким образом, решение исходной задачи можно записать

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi_1(y)dy, & t<\dfrac{x}{a};\\ \dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at}\psi_1(y)dy, & t>\dfrac{x}{a}.\end{cases} \quad (3.8)$$

Смешанная задача

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ t>0, \ 0<x<\infty,\\ u\big|_{t=0}=\varphi(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0\end{cases}$$

решается аналогично, но при этом $\varphi(x)$, $\psi(x)$ продолжаются четным образом. В результате получается

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi_1(y)dy, & t<\dfrac{x}{a};\\ \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\left(\displaystyle\int_{0}^{x+at}\psi_1(y)dy+\int_{0}^{at-x}\psi_1(y)dy\right), & t>\dfrac{x}{a}.\end{cases} \quad (3.9)$$

3.2.2 Решение задач с неоднородным краевым условием

Перейдем к рассмотрению задачи для уравнения (3.1) с неоднородными краевыми условиями

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x), \quad u\big|_{x=0}=\mu(t).$$

Эта задача в силу ее линейности может быть разбита на две

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \ t>0, \ x>0,\\ v\big|_{t=0}=\varphi(x), \ \dfrac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x), \ v\big|_{x=0}=0\end{cases} \text{ и } \begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \ t>0, \ x>0,\\ w\big|_{t=0}=0, \ \dfrac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0}=0, \ w\big|_{x=0}=\mu(t).\end{cases}$$

При этом $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$. Первая задача решается приведенным выше способом, решение второй задачи ищется в виде прямой волны $w(x,t)=\Phi(x-at)$, так как краевой режим является единственной причиной возбуждения колебаний в струне. Тогда из начальных условий $w(x,0)=\Phi(x)\equiv 0, \ \dfrac{\partial w(x,0)}{\partial t}=-a\Phi'(x)=0, \ x\geq 0 \Rightarrow \Phi(x)\equiv 0, \ x\geq 0$. Из краевого условия $w(0,t)=\Phi(-at)=\mu(t), \ t>0$. Таким образом

$$\Phi(z)=\begin{cases}0, & z\geq 0,\\ \mu\left(\dfrac{-z}{a}\right), & z<0,\end{cases} \text{ т.е.}$$

$$
w(x,t)=\begin{cases} 0, & t\le \dfrac{x}{a},\\ \mu\left(t-\dfrac{x}{a}\right), & t>\dfrac{x}{a}. \end{cases} \qquad (3.10)
$$

Пример 6. Решить смешанную задачу

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ t>0, \ x>0,\\ u\big|_{t=0}=x^2, \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=x, \ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=t^2. \end{cases}
$$

Решение. Разобьем исходную задачу на две

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \ t>0, \ x>0,\\ v\big|_{t=0}=x^2, \ \dfrac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0}=x, \ v\big|_{x=0}=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \ t>0, \ x>0,\\ w\big|_{t=0}=0, \ \dfrac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0}=0, \ w\big|_{x=0}=t^2, \end{cases}
$$

при этом $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$. Решение первой задачи, пользуясь формулой (3.8), можно записать

$$
v(x,t)=\begin{cases} \dfrac{(x+t)^2+(x-t)^2}{2}+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t} y\,dy, \ t<x;\\ \dfrac{(x+t)^2+(t-x)^2}{2}+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{t-x}^{x+t} y\,dy, \ t>x, \end{cases} \quad \text{или} \quad v(x,t)=\begin{cases} x^2+xt+t^2, \ t\le x;\\ 3xt, \ t>x. \end{cases}
$$

Решение второй задачи в соответствии с формулой (3.10) $w(x,t)=\begin{cases} 0, \ t\le x,\\ (t-x)^2, \ t>x. \end{cases}$. Тогда $u(x,t)=x^2+t^2+xt, \ t>0$.

Пример 7. Решить смешанную задачу

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6xt, \ x>0, \ t>0,\\ u\big|_{t=0}=x^3, \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0, \ u\big|_{x=0}=t^3. \end{cases}
$$

Решение. При помощи замены переменных $\xi=x+2t, \ \eta=x-2t$ приводим уравнение к каноническому виду (см. раздел 2.2) $u''_{\xi\eta}=\frac{3}{64}\left(\eta^2-\xi^2\right)$, из которого находим $u(\xi,\eta)=\frac{1}{64}\xi\eta\left(\eta^2-\xi^2\right)+f(\xi)+g(\eta)$. Здесь $f(\xi)$ и $g(\eta)$ произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Выполнив обратную замену переменных, получим общее решение исходного уравнения $u(x,t)=f(x+2t)+g(x-2t)+\frac{1}{2}xt^3-\frac{1}{8}x^3t$. Неизвестные функции найдем из начальных и краевого условий:

$$\begin{cases} f(x)+g(x)=x^3,\ x\ge 0,\\ f'(x)-g'(x)=-\tfrac{1}{16}x^3,\ x\ge 0,\\ f(2t)+g(-2t)=t^3,\ t\ge 0.\end{cases}$$

Из первых двух уравнений системы находим $f(x)=\frac{1}{2}x^3\left(1-\frac{1}{64}x\right)+C$, $g(x)=\frac{1}{2}x^3\left(1+\frac{1}{64}x\right)-C$ при $x\ge 0$. Подставляя найденную функцию $f(x)$ в третье уравнение системы, получим $g(x)=\frac{1}{8}x^3\left(3+\frac{1}{16}x\right)-C,\ x\le 0$. Следовательно, решением задачи является функция

$$u(x,t)=\begin{cases} \frac{1}{2}(x+2t)^3\left(1-\frac{1}{64}(x+2t)\right)+\frac{1}{2}(x-2t)^3\left(1+\frac{1}{64}(x-2t)\right),\ x>2t,\\ \frac{1}{2}(x+2t)^3\left(1-\frac{1}{64}(x+2t)\right)+\frac{1}{8}(x-2t)^3\left(3+\frac{1}{16}(x-2t)\right),\ x<2t,\end{cases}$$

или

$$u(x,t)=\begin{cases} x^3+12xt^2-\frac{1}{2}xt^3-\frac{1}{32}x^3t,\ x>2t,\\ \frac{7}{8}x^3+\frac{3}{4}x^2t+\frac{21}{2}xt^2+t^3-\frac{1}{2}xt^3-\frac{1}{32}x^3t,\ x<2t.\end{cases}$$

3.2.3 Задачи

Решить смешанные задачи:

1. $u''_{tt}=u''_{xx}+6,\ x>0,\ t>0,$
   $u(x,0)=\sin x,\ u'_t(x,0)=1,\ u(0,t)=t.$
2. $u''_{tt}=u''_{xx},\ x>0,\ t>0,$
   $u(x,0)=e^{-x},u'_t(x,0)=0,u'_x(0,t)=e^{-t}.$
3. $u''_{tt}=9u''_{xx},\ x>0,\ t>0,$
   $u(x,0)=x^2+1,\ u'_t(x,0)=4x,$
   $u'_x(0,t)=\dfrac{1}{1+t}.$
4. $u''_{tt}=u''_{xx},\ x>0,\ t>0,$
   $u(x,0)=x\cos x,\ u'_t(x,0)=1,$
   $u(0,t)=\sin t\cdot\ln(1+t).$
5. $u''_{tt}=u''_{xx},\ x>0,\ t>0,$
   $u(x,0)=\cos x, u'_t(x,0)=0,$
   $u'_x(0,t)=\sin t.$
6. $u''_{tt}=u''_{xx},\ x>0,\ t>0,$
   $u(x,0)=x, u'_t(x,0)=1, u'_x(0,t)=\cos t.$
7. $u''_{tt}=9u''_{xx}+e^t,\ x>0,\ t>0,$
   $u(x,0)=1+x,\ u'_t(x,0)=4-3\cos\dfrac{x}{3},$
   $u(0,t)=2-\cos t.$
8. $u''_{tt}=0{,}01\cdot u''_{xx},\ x>0,\ t>0,$
   $u(x,0)=-\dfrac{1}{x^2+1},\ u'_t(x,0)=1,$
   $u'_x(0,t)=\cos(10t).$
9. $u''_{tt}=16u''_{xx},\ x>0,\ t>0,$
   $u(x,0)=x, u'_t(x,0)=\sin x,$
   $u'_x(0,t)=\cos t.$
10. $u''_{tt}=4u''_{xx},\ x>0,\ t>0,$
    $u(x,0)=e^{-x},\ u'_t(x,0)=\sin x,$
    $u'_x(0,t)=u(0,t)-t.$

3.3 *Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности*

3.3.1 Формула Пуассона

Классической задачей Коши для уравнения теплопроводности называется задача о нахождении функции $u(x,y,z,t)$, характеризующей температуру в точке пространства $(x,y,z)\in R^3$ в момент времени $t>0$. Функция $u(x,y,z,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t}=a^2\Delta u(x,y,z,t)+f(x,y,z,t), \tag{3.11}$$

описывающему процесс распространения тепла в однородном изотропном пространстве, и начальному условию

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0}=\varphi(x,y,z), \tag{3.12}$$

задающему начальное распределение температур. Функция f характеризует интенсивность внутренних источников тепла.

Если функция $f(x,y,z)\in C^2$, а функция $\varphi(x,y,z)\in C$ и ограничена, то решение задачи Коши (3.11), (3.12) существует, единственно и выражается формулой Пуассона

$$\begin{gathered}u(x,y,z,t)=\frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^3}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi,\eta,\zeta)e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}d\xi d\eta d\zeta+\\+\int\limits_0^t\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi,\eta,\zeta,\tau)}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^3}e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2(t-\varsigma)}}d\xi d\eta d\zeta d\tau.\end{gathered} \tag{3.13}$$

Очевидно, для случая одной пространственной переменной задача Коши запишется

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t), \tag{3.11'}$$

$$u(x,t)\big|_{t=0}=\varphi(x),\ t>0. \tag{3.12'}$$

И формула Пуассона соответственно примет вид:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi+\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\varsigma)}}d\xi d\tau. \tag{3.13'}$$

При решении задач для уравнения теплопроводности (3.11) на полупрямой применяются те же подходы, что и при решении задач для волнового уравнения на полупрямой (см. п. 3.2). Положим в уравнении (3.11’) $f(x)\equiv 0$. При этом выбор характера продолжения заданных условий на всю ось определяется следующими леммами.

***Лемма* 3**. Пусть в задаче (3.11’), (3.12’) функция $\varphi(x)$ нечетная относительно x=0, т.е. $\varphi(x)=-\varphi(-x)$, тогда $u(0,t)=0$.

***Лемма* 4**. Пусть в задаче (3.11’), (3.12’) функция $\varphi(x)$ четная относительно x=0, т.е. $\varphi(x)=\varphi(-x)$, тогда $\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0$.

Пример 8. Решить задачу:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=4\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+t+e^t,\ t>0,\ -\infty<x<\infty,\ u(x,t)\big|_{t=0}=2.$$

Решение. Для решения задачи воспользуемся формулой Пуассона (3.13’). При этом получим

$$u(x,t)=\frac{2}{4\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{16t}}d\xi+\frac{1}{4}\int_0^t\frac{\left(\tau+e^{\tau}\right)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{16(t-\tau)}}d\xi d\tau.$$

Посчитаем первый интеграл, для этого введем новую переменную $x-\xi=\alpha,\ d\xi=-d\alpha$ и воспользуемся табличным значением интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{16t}}d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\alpha^2}{16t}}d\alpha=2\int_0^{\infty}e^{-\frac{\alpha^2}{16t}}d\alpha=4\sqrt{\pi t}.$$

Тогда решение можно переписать следующим образом:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}4\sqrt{\pi t}+\frac{1}{4}\int_0^t\frac{\left(\tau+e^{\tau}\right)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}4\sqrt{\pi(t-\tau)}d\tau=$$

$$=2+\frac{t^2}{2}+e^t-1=\frac{t^2}{2}+e^t+1.$$

3.3.2 Задачи

1. $u'_t=u''_{xx}+3t^2,\ t>0,\ -\infty<x<\infty,\ u(x,0)=\sin x$.
2. $u'_t=4u''_{xx},\ t>0,\ -\infty<x<\infty,\ u(x,0)=\begin{cases}u_1, x<0\\ u_2, x\ge 0\end{cases}$.
3. $9u'_t=u''_{xx},\ t>0,\ -\infty<x<\infty,\ u(x,0)=2e^{-x^2}$.
4. $u'_t=u''_{xx},\ t>0,\ x>0,\ u(x,0)=\cos x,\ u(0,t)=0$.
5. $u'_t=u''_{xx},\ t>0,\ x>0,\ u(x,0)=x,\ u'_x(0,t)=0$.

3.4 *Метод разделения переменных решения смешанных задач*

3.4.1 Сущность метода

Пусть в области *D*, ограниченной замкнутой кусочно-гладкой поверхностью *S*, для $t>0$ требуется найти функцию $u(M,t)$, удовлетворяющую уравнению

$$L(u)=u''_{tt}\quad \left(L(u)=u'_t\right), \tag{3.14}$$

граничным условиям

$$\left[\textit{г}_1 \frac{\partial u}{\partial n} + \textit{г}_2 \cdot u\right]_{M \in S} = 0 \tag{3.15}$$

и начальным

$$u(M,0) = \varphi(M), \quad u_t'(M,0) = \psi(M), \tag{3.16}$$

соответственно

$$u(M,0) = \varphi(M). \tag{3.16’}$$

$L(u)$ – линейный дифференциальный оператор второго порядка по пространственным переменным.

Идея метода *Фурье* (*разделения переменных*) заключается в следующем.

А) Ищем нетривиальное (не равное тождественно нулю) решение уравнения (3.14), удовлетворяющее только краевым условиям (3.15), среди функций вида $u(M,t) = \Phi(M) \cdot \Psi(t)$. Подставив функцию $\Phi(M) \cdot \Psi(t)$ в уравнение (3.14) и разделив обе части уравнения на $\Phi(M) \cdot \Psi(t)$, получим $L(\Phi)/\Phi = \Psi''/\Psi$ (соответственно Ψ'/Ψ). Для тождественного выполнения этого равенства, необходимо и достаточно, чтобы обе дроби были равны одной и той же константе: $L(\Phi)/\Phi = \Psi''/\Psi = -\lambda$. Таким образом, должны выполняться тождества

$$\Psi'' + \lambda\Psi = 0 \;\; (\Psi' + \lambda\Psi = 0), \tag{3.17}$$

$$L(\Phi) + \lambda\Phi = 0, \tag{3.18}$$

причем функция Ф(*M*) должна удовлетворять краевому условию

$$\left[\textit{г}_1 \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \textit{г}_2 \cdot \Phi\right]_{M \in S} = 0. \tag{3.19}$$

Задачу (3.18), (3.19) называют задачей *Штурма – Лиувиля*. Она имеет нетривиальное решение не при всех значениях λ.

Определение. Те значения λ, при которых задача (3.18), (3.19) имеет нетривиальные решения, называют *собственными значениями*, а соответствующие им нетривиальные решения $\Phi(M)$ – *собственными функциями*.

Б) Решаем задачу Штурма – Лиувиля. Она имеет счетное количество решений. Пусть $\Phi_1(M), \Phi_2(M), ..., \Phi_n(M), ...$ суть собственные функции этой задачи, а $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...$ – отвечающие им собственные значения.

В) Для каждого собственного значения λ_n находим решение уравнения (3.17). Общее его решение имеет вид $\Psi_n(t) = C_n \cos\left(\sqrt{\lambda_n} t\right) + D_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n} t\right)$ для уравнения (3.14) гиперболического типа и $\Psi_n(t) = C_n e^{-\lambda_n t}$ для уравнения (3.14) параболического типа.

Таким образом, частными решениями уравнения (3.14), удовлетворяющими только краевым условиям (3.15) являются функции $u_n(M,t) = \left(C_n \cos\left(\sqrt{\lambda_n} t\right) + D_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n} t\right)\right) \cdot \Phi_n(M)$, или $u_n(M,t) = C_n e^{-\lambda_n t} \cdot \Phi_n(M)$ соответственно.

Г) Взяв сумму таких частных решений по всем собственным функциям, получим общее решение уравнения (3.14), удовлетворяющее краевым условиям (3.15)

$$u(M,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)+D_n\sin\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)\right)\cdot\Phi_n(M) \tag{3.20}$$

или

$$u(M,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\lambda_n t}\cdot\Phi_n(M). \tag{3.20'}$$

Коэффициенты C_n и D_n находим из начальных условий (3.16), (3.16') в виде

$$C_n=\frac{1}{\|\Phi_n\|^2}\int_D\varphi(M)\Phi(M)d\tau_M,\ D_n=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}\|\Phi_n\|^2}\int_D\psi(M)\Phi(M)d\tau_M,$$

$$\|\Phi_n\|^2=\int_D\Phi^2(M)d\tau_M.$$

3.4.2 Метод Фурье решения смешанных задач для уравнений гиперболического типа

Рассмотрим задачу о свободных колебаниях однородной струны длины l, закрепленной на концах. Эта задача сводится к решению уравнения (3.1) при начальных условиях (3.2) и граничных условиях

$$u(x,t)\big|_{t=0}=0,\ \ u(x,t)\big|_{t=0}=0. \tag{3.21}$$

Будем сначала искать нетривиальные частные решения уравнения (3.1), удовлетворяющие условиям (3.21), в виде $u(x,t)=X(x)T(t)$. Тогда из уравнения (3.1) получим

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \tag{3.22}$$

$$T''(t)+a^2\lambda T(t)=0. \tag{3.23}$$

Из граничных условий (3.21) и требования нетривиальности решения вытекают условия $X(0)=0,\ \ X(l)=0$.

Таким образом, приходим к задаче Штурма – Лиувилля

$X''(x)+\lambda X(x)=0,$

$X(0)=0,\ \ X(l)=0.$

Найдем собственные числа и собственные функции этой задачи. Рассмотрим отдельно случаи, когда коэффициент λ положителен, отрицателен и равен нулю.

При $\lambda<0$ общее решение примет вид $X(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$, тогда из граничных условий $C_1=-C_2,\ C_2=0\Rightarrow X(x)\equiv 0$.

При $\lambda=0$ общее решение примет вид $X(x)=C_1x+C_2$, тогда из граничных условий $C_1=0,\ C_2=0\Rightarrow X(x)\equiv 0$.

При $\lambda>0$ общее решение примет вид $X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$, тогда из граничных условий $C_1=0,\ C_2\sin\sqrt{\lambda}x=0\Rightarrow\lambda_n=(\pi n/l)^2,\ n=1,2\ldots$ Найденным собственным числам соответствуют собственные функции $X_n(x)=\sin\pi nx/l$.

При $\lambda=\lambda_n$ из (3.23) находим $T_n(t)=a_n\cos\frac{n\pi at}{l}+b_n\sin\frac{n\pi at}{l}$. Поэтому функция $u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=\left(a_n\cos\frac{n\pi at}{l}+b_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$ удовлетворяет уравнению (3.1) и граничным условиям (3.21) при любых a_n, b_n.

Тогда общее решение уравнения (3.1), удовлетворяющее условиям (3.21), запишем в виде ряда:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi at}{l}+b_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{3.24}$$

Постоянные a_n, b_n определим из начальных условий. Подставляя (3.24) в (3.2), приходим к равенствам

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{\pi nx}{l},\qquad \psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi na}{l}b_n\sin\frac{\pi nx}{l}.$$

Данные формулы дают разложения функций $\varphi(x),\psi(x)$ в ряд Фурье на интервале $[0;l]$. Известно, что коэффициенты этих разложений вычисляются по формулам

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,\qquad b_n=\frac{2}{\pi na}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx. \tag{3.25}$$

Пример 9. Пусть струна, закрепленная на концах $x=0$, $x=1$, имеет в начальный момент форму параболы $u=4hx(x-1)$. Определим смещение точек струны от оси абсцисс, если начальные скорости отсутствуют (рис. 3.1)

Решение. Для уравнения (3.1) заданы начальные условия $u(x,t)\big|_{t=0}=4hx(1-x),\ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0$ и граничные условия (3.21). Пусть $a=1$.

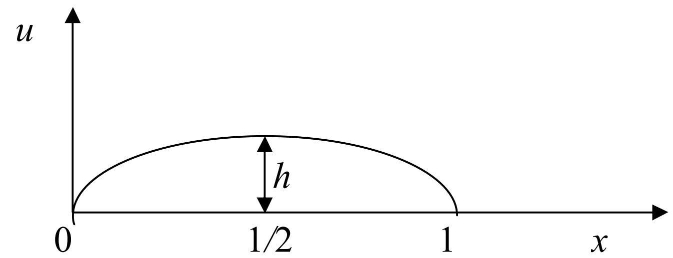

Рис. 3.1

Тогда решение задачи будет иметь вид

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\pi nt+b_n\sin\pi nt)\sin\pi nx,$$

в котором коэффициенты a_n, b_n находим из соотношений

$$b_n=\frac{2}{\pi n}\int_0^1\psi(x)\sin\pi nxdx=0,\quad a_n=2\int_0^1\varphi(x)\sin\pi nxdx=8h\int_0^1(x-x^2)\sin\pi nxdx.$$

Дважды интегрируем по частям

$$a_n=-8h(x-x^2)\frac{1}{\pi n}\cos\pi nx\Big|_0^1+\frac{8h}{n\pi}\int_0^1(1\text{-}2\mathrm{x})\cos\pi nxdx=\frac{8h}{n\pi}\int_0^1(1\text{-}2\mathrm{x})\cos\pi nxdx=$$

$$=\frac{8h}{n^2\pi^2}(1-2x)\sin\pi nx\Big|_0^1+\frac{16h}{n^3\pi^3}\int_0^1\sin\pi nxdx=-\frac{16h}{n^3\pi^3}\left[1-(-1)^n\right].$$

Подставляя значения коэффициентов, получим

$$u(x,t)=\frac{16h}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[1-(-1)^n\right]}{n^3}\cos n\pi t\sin n\pi x.$$

Если $n=2k$, то $1-(-1)^n=0$, а если $n=2k+1$, то $1-(-1)^n=2$, поэтому окончательно будем иметь

$$u(x,t)=\frac{32h}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\cos(2k+1)\pi t\sin(2k+1)\pi x.$$

3.4.3 Метод Фурье решения смешанных задач для уравнений параболического типа

Задача о распространении тепла в тонком однородном стержне $0\le x\le l$, боковая поверхность которого и граница $x=l$ теплоизолированы, а на границе $x=0$ поддерживается нулевая температура, приводится к решению уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\tag{3.26}$$

при следующих граничных условиях $u(x,t)\big|_{x=0}=0\quad u'_x(x,t)\big|_{x=l}=0$

и начальном условии $u(x,t)\big|_{t=0}=\varphi(x)$.

Применяя метод разделения переменных, ищем частные решения уравнения (3.26) в виде $u(x,t)=X(x)T(t)$. Подставляя заданное представление в исходное уравнение, приходим к уравнению для $T(t)$

$$T'(t)+a^2\lambda t(t)=0\tag{3.27}$$

и задаче для $X(x)$:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,$$
$$X(0)=0,\ \ X'_x(l)=0.$$

Найдем собственные числа и собственные функции этой задачи. Рассмотрим отдельно случаи, когда коэффициент λ положителен, отрицателен и равен нулю.

При $\lambda<0$ общее решение примет вид $X(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$, тогда из граничных условий $C_1=-C_2$, $C_1e^{\sqrt{-\lambda}l}=C_2e^{-\sqrt{-\lambda}l}\Rightarrow C_1=C_2=0\Rightarrow X(x)\equiv 0$.

При $\lambda=0$ общее решение примет вид $X(x)=C_1x+C_2$, тогда из граничных условий $C_2=0,\ C_1=0\Rightarrow X(x)\equiv 0$.

При $\lambda>0$ общее решение примет вид $X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$, тогда из граничных условий $C_1=0,\ C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l=0\Rightarrow\lambda_n=\dfrac{\pi^2}{4l^2}(1+2n)^2,\ n=1,2\ldots$

Найденным собственным числам соответствуют собственные функции $X_n(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)\dfrac{x}{l},\ n=1,2\ldots$

Значениям $\lambda=\lambda_n$ соответствуют следующие решения уравнения (3.27):

$$T_n(t)=a_ne^{-\left(\frac{a(\pi+2\pi n)}{2l}\right)^2t},\ n=1,2\ldots$$

Тогда функции $u_n(x,t)=a_ne^{-\left(\frac{a(\pi+2\pi n)}{2l}\right)^2t}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)\dfrac{x}{l}$ являются частными решениями уравнения (3.26) при любых постоянных a_n. Следовательно, общее решение уравнения, удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-\left(\frac{a(\pi+2\pi n)}{2l}\right)^2t}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\frac{x}{l}.$$

Из начальных условий находим $\varphi(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)\dfrac{x}{l}$, откуда $a_n=\dfrac{2}{l}\int\limits_0^l\varphi(x)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)\dfrac{x}{l}.$

3.4.4 Решение неоднородных задач методом Фурье

Задача о нахождении смещений точек однородной струны $0<x<l$, жестко закрепленной на концах, в результате ее вынужденных колебаний под действием внешней силы с плотностью $g(x)$, приводится к решению уравнения (1.2)
$u''_{tt}=a^2u''_{xx}+F(x,t),\ \ a^2=T/\rho,\ \ F(x,t)=g(x,t)/\rho$
при начальных условиях (3.2) $u|_{t=0}=\varphi(x), u'_t|_{t=0}=\psi(x)$

и граничных условиях (3.21) $u(x,t)\big|_{t=0} = 0, \;\; u(x,t)\big|_{t=0} = 0$.

Решение этой задачи ищется в виде суммы *u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)*, где *v(x,t)* – решение задачи I, состоящей из неоднородного уравнения (1.2), граничных условий (3.21) и нулевых начальных условий $v(x,t)\big|_{t=0} = 0, \;\; v_t'(x,t)\big|_{t=0} = 0$.

w(x,t) – решение задачи II, состоящей из однородного уравнения $w_{tt}'' = a^2 w_{xx}''$, граничных условий (3.21) и начальных условий (3.2).

Решение *v(x,t)* описывает вынужденные колебания струны (эти колебания совершаются под действием внешней возмущающей силы при отсутствии начальных возмущений), а решение *w(x,t)* описывает свободные колебания струны (они обусловлены начальными возмущениями).

Задача II решена ранее (см. п. 3.4.2).

Функцию *v(x,t)* будем искать в виде ряда

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\Phi_n(x) \qquad (3.28)$$

по собственным функциям $\Phi_n(x) = \sin\dfrac{n\pi x}{l}$ задачи II. Подставляя (3.28) в (1.2), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{l} = g(x,t).$$

Разлагая функцию $g(x,t)$ в интервале $(0;l)$в ряд Фурье по собственным функциям $\Phi_n(x)$ задачи II $g(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(t)\sin\dfrac{n\pi x}{l}$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых членах ряда, приходим к дифференциальным уравнениям

$$T_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = g_n(x,t), \qquad (3.29)$$

где $g_n(x,t) = \dfrac{2}{l}\int\limits_0^l g(\xi,t)\sin\dfrac{n\pi\xi}{l}d\xi, \;\; (n=1,2,\ldots)$. Решая уравнения (3.20) при нулевых начальных условиях $T_n(0), \; T_n'(0) = 0$, находим $T_n(t)$, а затем определяем $v(x,t)$ с помощью формулы (3.28). Заметим, что решение $T_n(t)$ для однородных начальных условий можно представить в виде

$$T_n(t) = \frac{2}{n\pi a}\int\limits_0^t\int\limits_0^l g(\xi,\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi d\tau.$$

Тогда решение задачи (1.2), (3.2), (3.21) $u(x,t)$ представляется в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi at}{l} + b_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right]\sin\frac{n\pi x}{l},$$

где коэффициенты a_n, b_n определяются формулами (3.25).

Задача о вынужденных колебаниях ограниченной струны $0 < x < l$ под действием внешней силы в случае, когда концы струны двигаются по некоторому закону, сводится к решению уравнения (1.2) при начальных условиях (3.2) и граничных условиях вида

$$u(x,t)\big|_{x=0} = \mu_1(t),\ u(x,t)\big|_{x=l} = \mu_2(t). \tag{3.30}$$

Решение задачи (1.2), (3.2), (3.30) может быть представлено в виде $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$, где функция $w(x,t)$ подбирается таким образом, чтобы она удовлетворяла граничным условиям. В случае, когда заданы условия первого рода (3.30), эту функцию можно построить следующим образом: $w(t) = \mu_1(t) + \dfrac{x}{l}\left(\mu_2(t) - \mu_1(t)\right)$.

Тогда функция $v(x,t)$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + g_1(x,t)\text{, где } g_1(x,t) = g(x,t) - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

В этом нетрудно убедиться, подставив в уравнение (1.2) представление $u(x,t)$ в виде суммы двух функций. При этом начальные условия для $v(x,t)$ примут вид $v(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x) - w(x,0),\ v'_t\big|_{t=0} = \psi(x) - \dfrac{\partial w(x,0)}{\partial t}$,

а граничные – $v(x,t)\big|_{x=0} = 0,\ v(x,t)\big|_{x=l} = 0$.

Таким образом, для нахождения $v(x,t)$ приходим к задаче типа (1.2), (3.2), (3.21).

3.4.5 Метод Фурье решения краевых задач для уравнений эллиптического типа

Уравнение теплопроводности (в плоском случае) для стационарного случая обращается в уравнение Лапласа вида

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0\text{, так как } \frac{\partial u}{\partial t} \equiv 0.$$

Пусть имеется однородная тонкая круглая пластина радиусом R. Будем искать стационарное распределение температур в круге, описываемое функцией $u(x,y)$, если на границе пластины поддерживается заданный температурный режим. В полярной системе координат задача описывается уравнением вида

$$r^2 \frac{\partial^2 u(r,\varphi)}{\partial r^2} + r\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial^2 u(r,\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{3.31}$$

и граничным условием

$$u(r,\varphi)\big|_{r=R} = f(\varphi), \tag{3.32}$$

где $f(\varphi)$ – непрерывная на окружности функция, задающая температурный режим на границе пластины.

Рассмотрим применение метода Фурье к решению данной задачи. Допустим, что частное решение ищется в виде $u(r,\varphi)=Q(r)T(\varphi)$. Тогда получим

$$r^2Q''(r)T(\varphi)+rQ'(r)T(\varphi)+Q(r)T''(\varphi)=0.$$

Разделяя переменные, будем иметь

$$\frac{T''(\varphi)}{T(\varphi)}=-\frac{r^2Q''(r)+rQ'(r)}{Q(r)}.$$

Приравнивая каждую часть равенства постоянной $-k^2$, получим два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$T''(\varphi)+k^2T(\varphi)=0,\ r^2Q''(r)+rQ'(r)\text{-}k^2Q(r)=0.$$

Отсюда при k=0 получим $T(\varphi)=A_0+B_0\varphi,\ \ Q(r)=C_0+D_0\ln r$.

Если же k>0, то $T(\varphi)=A_k\cos k\varphi+B_k\sin k\varphi$. Решение второго уравнения будем искать в виде $Q(r)=r^m$, что дает $r^2m(m-1)r^{m-2}+rmr^{m-2}-k^2r^m=0$, или $r^m\left(m^2-k^2\right)=0$, т. е. $m=\pm k$. Следовательно, $Q(r)=C_kr^k+D_kr^{-k}$.

Заметим, что $u(r,\varphi)$ как функция от φ есть периодическая функция с периодом 2π, так как для однозначной функции величины $u(r,\varphi)$ и $u(r,\varphi+2\pi)$ совпадают. Поэтому $B_0 = 0$, а k может принимать только целые значения. Далее $D_k = 0$ (k = 0,1,2…), так как в противном случае функция $u(r,\varphi)$, описывающая температуру, имела бы разрыв в точке r = 0. Итак, получено бесчисленное множество частных решений уравнения (3.23), непрерывных в круге, которые можно записать в виде:

$$u_0(r,\varphi)=a_0\ \ (a_0=A_0+C_0),$$

$$u_n(r,\varphi)=(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)r^n,\ n=1,2,\ldots\ \ (a_n=A_nC_n,\ b_n=B_nC_n\ ).$$

Составим теперь функцию

$$u(r,\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)r^n,$$

которая в силу линейности и однородности уравнения Лапласа также служит его решением. Таким образом, остается определить величины a_0,a_n,b_n так, чтобы функция удовлетворяла условию $u(r,\varphi)\big|_{r=R}=f(\varphi)$, т.е.

$$f(\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)R^n.$$

Получили разложение функции $f(\varphi)$в ряд Фурье на промежутке $[-\pi,\pi]$. В силу известных формул для коэффициентов ряда Фурье находим

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)d\theta,\ a_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\cos n\theta d\theta,\ b_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\sin n\theta d\theta.$$

Таким образом,

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{n}\cos n(\theta-\varphi)\right]d\theta.$$

Полученный результат можно упростить, суммируя ряд,

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta.$$

Получили решение задачи Дирихле для круга, описывающее стационарное распределение температур в однородной тонкой круглой пластине, имеющей на границе заданный температурный режим. Интеграл, стоящий в правой части, называется интегралом Пуассона.

3.4.6 Задачи

Решить методом разделения переменных следующие задачи:

1. $4u''_{tt}=u''_{xx},\quad 0<x<l,\ t>0,$
$u(0,t)=u(l,t)=0,$
$u(x,0)=0,\ u'_t(x,0)=\sin\dfrac{2\pi x}{l}.$

2. $u''_{tt}=9u''_{xx},\quad 0<x<l,\ t>0,$
$u(0,t)=u'_x(l,t)=0,$
$u(x,0)=\sin\dfrac{5\pi x}{2l},\ u'_t(x,0)=\cos\dfrac{\pi x}{2l}.$

3. $u'_t=u''_{xx},\quad 0<x<1,\quad t>0,$
$u'_x(0,t)=u(1,t)=0,\ u(x,0)=x^2-1.$

4. $u'_t=2u''_{xx},\quad 0<x<1,\quad t>0,$
$u'_x(0,t)=u'_x(1,t)=0,\ u(x,0)=e^{-x}.$

5. $u''_{xx}=\frac{1}{4}u''_{tt},\quad 0<x<l,\ t>0,$
$u'_x(0,t)=u(1,t)=0,$
$u(x,0)=\cos x,\ u'_t(x,0)=\sin 2x.$

6. $u'_t=u''_{xx},\quad 0<x<l,\quad t>0,$
$u(0,t)=u'_x(1,t)=0,$
$$u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{x}{l}, 0<x<l/2,\\ \dfrac{l-x}{l}, l/2<x<l.\end{cases}$$

7. $u'_t=u''_{xx},\quad 0<x<l,\quad t>0,$
$u'_x(0,t)=u'_x(l,t)=u_0,\ u(x,0)=Ax.$

8. $u'_t=u''_{xx}-4u,\ 0<x<\pi,\ t>0,$
$u(0,t)=u(\pi,t)=0,$
$u(x,0)=x^2-\pi x.$

9. $u'_t=u''_{xx}+2,\ 0<x<l,\ t>0,$
$u(0,t)=u(l,t)=0,\ u(x,0)=0.$

10. $u''_{tt}=u''_{xx}+2u,\ 0<x<1, t>0,$
$u'_x(0,t)=u'_x(1,t)=0,$
$u(x,0)=x^2-x,\ u'_t(x,0)=0.$

11. $u'_t=u''_{xx}+u,\ 0<x<l, t>0,$
$u'_x(0,t)=u(l,t)=0,$
$u(x,0)=\cos x+\sin x.$

12. $u''_{tt}=u''_{xx}+x,\ 0<x<l,\ t>0,$
$u(0,t)=u(l,t)=0,$
$u(x,0)=u'_t(x,0)=0.$

13. $u''_{tt}=u''_{xx}+\sin t,\ 0<x<l, t>0,$
$u(0,t)=u'_x(l,t)=0,$
$u(x,0)=0,\ u'_t(x,0)=\cos\dfrac{\pi x}{2l}.$

14. $u''_{tt}=u''_{xx},\ 0<x<l,\ t>0,$
$u(0,t)=t, u'_x(l,t)=t+1, u(x,0)=e^{-x}.$

15. $u''_{tt} = u''_{xx},\ 0 < x < \pi,\ t > 0,$
$u(0,t) = 1,\ u'_x(\pi,t) = 1,$
$u(x,0) = \sin\frac{1}{2}x,\ u'_t(x,0) = 1.$

16. $u''_{tt} = u''_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0,$
$u(0,t) = t+1,\ u(1,t) = t^3 + 2,$
$u(x,0) = x+1,\ u'_t(x,t) = 0.$

17. $u'_t = u''_{xx} + t(x+1),\ 0 < x < 1,\ t > 0,$
$u'_x(0,t) = t^2,\ u(1,t) = t^2,\ \ u(x,0) = 0.$

18. $u''_{tt} = u''_{xx} + xe^{-t},\ 0 < x < l,\ t > 0,$
$u(0,t) = u(l,t) = e^{-t},$
$u(x,0) = x,\ u'_t(x,0) = 0.$

19. $u''_{tt} + u'_t = u''_{xx},\ 0 < x < 1, t > 0,$
$u'_x(0,t) = -t,\ u(1,t) = 0,$
$u(x,0) = 0,\ u'_t(x,0) = 1 - x.$

20. $u'_t = u''_{xx} - 2u'_x + u - xt + 2(t+1),$
$0 < x < \pi,\ t > 0,$
$u'_x(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 1+t,\ u(x,0) = x.$

21. $u''_{tt} - 3u'_t = u''_{xx} + u - x(t+4),$
$0 < x < \pi,\ t > 0,$
$u'_x(0,t) = 1+t,\ u(1,t) = \pi(1+t),$
$u(x,0) = u'_t(x,0) = x.$

22. $u''_{tt} - u'_t = u''_{xx} + 2u'_x - 2t - x + \sin 3x$,
$0 < x < l,\ t > 0,$
$u(0,t) = u(l,t) = 0,$
$u(x,0) = 0,\ u'_t(x,0) = x.$

23. $u''_{tt} = a^2u''_{xx} - b^2u + A,$
$0 < x < l,\ t > 0,$
$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = B,$
$u(x,0) = u'_t(x,0) = 0.$

24. $u'_t = u''_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0,$
$u(0,t) = u(l,t) = t,\ u(x,0) = 0.$

25. $u'_t - u''_{xx} + 2u'_x - u = e^x \sin x - t,$
$0 < x < \pi,\ t > 0,$
$u'_x(0,t) = u(\pi,t) = 1+t,$
$u(x,0) = 1 + e^x \sin 2x.$

26. $u''_{tt} - 3u'_t = u''_{xx} + u - x(4-t) + \cos\frac{3\text{x}}{2},$
$0 < x < \pi,\ t > 0,$
$u(0,t) = t,\ u(\pi,t) = \pi(t+1),$
$u(x,0) = u'_t(x,0) = x.$

27. $u''_{tt} + 2u'_t = u''_{xx} + 4x = 8e^t \cos x,$
$0 < x < \pi/2,\ t > 0,$
$u'_x(0,t) = 2t,\ u(\pi/2,t) = \pi t,$
$u(x,0) = \cos x,\ u'_t(x,0) = 2x.$

28. $u''_{yy} + u''_{xx} = 0,\ 0 < x < l,\ 0 < y < m,$
$u(0,y) = 0,\ u(l,y) = \frac{h}{m}y,$
$u(x,0) = 0,\ u(x,m) = \frac{h}{l}x.$

29. $u''_{tt} = u''_{xx} + u'_x - 2u,$
$0 < x < \pi,\ t > 0,$
$u(0,t) = t,\ u'_x(\pi,t) = \pi t,\ u(x,0) = x.$

29. Найти гармоническую функцию внутри единичного круга такую, чтобы $u(r,\varphi)\big|_{r=R} = f(\varphi)$, где:
a) $f(\varphi) = \cos^2\varphi$, b) $f(\varphi) = \sin^3\varphi$.

30. Найти гармоническую функцию внутри кольца $R_1 < r < R_2$ такую, чтобы $u(r,\varphi)\big|_{r=R_1} = u_1,\ u(r,\varphi)\big|_{r=R_2} = u_2$.

31. Найти решение краевых задач в кольце $R_1 < r < R_2$ для уравнения $\Delta u = A$ с краевыми условиями

a) $u(r,\varphi)\big|_{r=R_1} = u_1,\ u(r,\varphi)\big|_{r=R_2} = u_2$;

b) $u(r,\varphi)\big|_{r=R_1} = u_1,\ \left.\dfrac{\partial u(r,\varphi)}{\partial n}\right|_{r=R_2} = u_2$.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики/ А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М.: Наука, 1972.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.
3. Диткин В.А. Интегральные преобразования и операционное исчисление/ В.А. Диткин, А.П. Прудников. М.: Наука, 1974.
4. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного/ М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. М.: Наука, 1973.
5. Трантер К.Д. Интегральные преобразования в математической физике. М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1956.
6. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984.
7. Снеддон И. Преобразование Фурье. М.: ИЛ, 1955.
8. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.

Содержание