

ГЛАВА II
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Действия над комплексными числами
в компонентах

101. Вычислить $(2 + 3i)(4 - 5i) + (2 - 3i)(4 + 5i)$.

102. Вычислить

$$(x - 1 - i)(x - 1 + i)(x + 1 + i)(x + 1 - i).$$

103. $(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i$. Найти x и y , считая их вещественными.

104. Решить систему, считая x, y, z, t вещественными:

$$\begin{aligned}(1 + i)x + (1 + 2i)y + (1 + 3i)z + (1 + 4i)t &= 1 + 5i, \\ (3 - i)x + (4 - 2i)y + (1 + i)z + 4it &= 2 - i.\end{aligned}$$

105. Вычислить:

a) $(1 + 2i)^6$; b) $(2 + i)^7 + (2 - i)^7$; c) $(1 + 2i)^5 - (1 - 2i)^5$.

106. Выяснить, при каких условиях произведение двух комплексных чисел чисто мнимо.

107. Выполнить указанные действия:

a) $\frac{1 + i \operatorname{tg} \alpha}{1 - i \operatorname{tg} \alpha}$; b) $\frac{a + bi}{a - bi}$; c) $\frac{(1 + 2i)^2 - (2 - i)^3}{(1 - i)^3 + (2 + i)^2}$; d) $\frac{(1 - i)^5 - 1}{(1 + i)^5 + 1}$.

108. Решить системы уравнений:

a) $(3 - i)x + (4 + 2i)y = 2 + 6i$, $(4 + 2i)x - (2 + 3i)y = 5 + 4i$;

b) $(2 + i)x + (2 - i)y = 6$, $(3 + 2i)x + (3 - 2i)y = 8$;

c) $x + yi - 2z = 10$, $x - y + 2iz = 20$,

$$ix + 3iy - (1 + i)z = 30.$$

109. Вычислить:

a) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$; b) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

*110. Пусть $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Вычислить:

a) $(a + b\omega + c\omega^2)(a + b\omega^2 + c\omega)$;

b) $(a + b)(a + b\omega)(a + b\omega^2)$;

c) $(a + b\omega + c\omega^2)^3 + (a + b\omega^2 + c\omega)^3$;

111. Доказать, что $x^2 + y^2 = (s^2 + t^2)^n$, если $x + yi = (s + ti)^n$.

112. Вычислить:

a) $\sqrt{2i}$; b) $\sqrt{-8i}$; c) $\sqrt{3-4i}$; d) $\sqrt{-15+8i}$;

e) $\sqrt{-11+60i}$; f) $\sqrt{-8-6i}$; g) $\sqrt{2-3i}$;

h) $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$; i) $\sqrt[4]{-1}$; j) $\sqrt[4]{2-i\sqrt{12}}$.

113. Решить уравнения:

a) $x^2 - (2+i)x + (-1+7i) = 0$;

b) $x^2 - (3-2i)x + (5-5i) = 0$;

c) $(2+i)x^2 - (5-i)x + (2-2i) = 0$.

*114. Решить уравнения и левые части их разложить на множители с вещественными коэффициентами:

a) $x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 100 = 0$; b) $x^4 + 2x^2 - 24x + 72 = 0$.

115. Решить уравнения:

a) $x^4 - 3x^2 + 4 = 0$; b) $x^4 - 30x^2 + 289 = 0$.

116. Составить формулу для решения биквадратного уравнения $x^4 + px^2 + q = 0$ с вещественными коэффициентами, удобную для случая, когда $\frac{p^2}{4} - q < 0$.

*117. Доказать, что $(\pm\sqrt{a} \pm i\sqrt{b})^n$ при целых положительных взаимно простых a и b не может быть вещественным, за исключением $(\pm 1 \pm i)^n$ (n делится на 4), $(\pm 1 \pm i\sqrt{3})^n$ (n делится на 3) и $(\pm\sqrt{3} \pm i)^n$ (n делится на 6).

§ 2. Геометрическое изображение и тригонометрическая форма

118. Построить точки, изображающие комплексные числа:

$$1, -1, i, -i, -1+i, 2-3i.$$

119. Представить в тригонометрической форме следующие числа:

a) 1; b) -1; c) i ; d) $-i$; e) $1+i$; f) $-1+i$;

g) $-1-i$; h) $1-i$; i) $-1-i\sqrt{3}$; j) $\sqrt{3}-i$.

*120. Представить в тригонометрической форме число $2 + \sqrt{3} + i$.

121. Представить в тригонометрической форме число $1 + \cos \varphi + i \sin \varphi$, считая $-\pi < \varphi \leq \pi$.

122. Пользуясь таблицами, представить в тригонометрической форме следующие числа:

а) $3 + i$; б) $4 - i$; в) $-2 + i$.

123. Описать множество точек, изображающих комплексные числа:

а) модуль которых 1; б) аргумент которых $\frac{\pi}{6}$.

124. Описать множество точек, изображающих числа z , удовлетворяющие неравенствам:

а) $|z| < 2$; б) $|z - i| \leq 1$; в) $|z - 1 - i| < 1$.

*125. Доказать, что всякое комплексное число z , отличное от -1 , модуль которого 1, может быть представлено в форме $z = \frac{1+ti}{1-ti}$, где t — вещественное число.

*126. Пусть z проходит окружность $|z|=1$ в положительном направлении. Представить наглядно перемещение точки $Rz + \rho z^n$, где $0 < \rho < R$.

127. Как перемещается точка $\frac{1}{z}$, когда z описывает окружность с центром в точке $a + bi$ и с радиусом r .

128. Найти линию, по которой проходит точка z^2 , если z обходит квадрат с вершинами в точках $-1 - i$, $2 - i$, $2 + 2i$, $-1 + 2i$.

*129. Найти линию, по которой проходит точка $\frac{2aR}{z^2 - a^2 + R^2}$, когда z пробегает окружность $|z - a| = R$ (a — вещественное число).

130. Решить уравнение $|z| - z = a + bi$ и выяснить условие разрешимости.

131. Построить график функции $|x + \sqrt{x^2 - 1}|$ от вещественной переменной x , $-\infty < x < \infty$.

132. Найти $\min |3 + 2i - z|$, считая $|z| \leq 1$.

133. Доказать тождество

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2);$$

какой геометрический смысл имеет это тождество?

134. z и z' — два комплексных числа, $u = \sqrt{zz'}$. Доказать, что

$$|z| + |z'| = \left| \frac{z+z'}{2} - u \right| + \left| \frac{z+z'}{2} + u \right|.$$

135. Показать, что если $|z| < \frac{1}{2}$, то

$$|(1+i)z^3 + iz| < \frac{3}{4}.$$

136. Выполнить действия:

a) $(1+i\sqrt{3})(1+i)(\cos \varphi + i \sin \varphi)$;

b) $\frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\cos \psi - i \sin \psi}$; c) $\frac{(1-i\sqrt{3})(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{2(1-i)(\cos \varphi - i \sin \varphi)}$.

*137. Вычислить, пользуясь формулой Муавра:

a) $(1+i)^{26}$; b) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$; c) $\left(1 - \frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$;

d) $\frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}} + \frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$.

*138. Доказать, что:

a) $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4}\right)$;

b) $(\sqrt{3}-i)^n = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{6} - i \sin \frac{n\pi}{6}\right)$;

n — целое число.

†139. Доказать, что $\left(\frac{1+i \operatorname{tg} \alpha}{1-i \operatorname{tg} \alpha}\right)^n = \frac{1+i \operatorname{tg} n\alpha}{1-i \operatorname{tg} n\alpha}$.

140. Доказать, что если $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$, то

$$z^m + \frac{1}{z^m} = 2 \cos m\theta.$$

*141. Вычислить $(1 + \cos \alpha + i \sin \alpha)^n$.

142. Упростить $(1 + \omega)^n$, где $\omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$.

143. Извлечь корни:

a) $\sqrt[3]{i}$; b) $\sqrt[3]{2-2i}$; c) $\sqrt[4]{-4}$; d) $\sqrt[5]{1}$; e) $\sqrt[5]{-27}$.

144. Пользуясь таблицами, извлечь корни:

a) $\sqrt[3]{2+i}$; b) $\sqrt[3]{3-i}$; c) $\sqrt[5]{2+3i}$.

145. Вычислить:

a) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$; b) $\sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$; c) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$.

146. Выразить через $\cos x$ и $\sin x$:

a) $\cos 5x$; b) $\cos 8x$; c) $\sin 6x$; d) $\sin 7x$.

147. Выразить $\operatorname{tg} 6\varphi$ через $\operatorname{tg} \varphi$.

148. Составить формулы, выражающие $\cos nx$ и $\sin nx$ через $\cos x$ и $\sin x$.

*149. Представить в виде многочлена первой степени от тригонометрических функций углов, кратных x :

a) $\sin^3 x$; b) $\sin^4 x$; c) $\cos^5 x$; d) $\cos^6 x$; e) $\sin^3 x \cos^5 x$.

*150. Доказать, что:

$$a) \quad 2^{2m} \cos^{2m} x = 2 \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k \cos 2(m-k)x + C_{2m}^m;$$

$$b) \quad 2^{2m} \cos^{2m+1} x = \sum_{k=0}^m C_{2m+1}^k \cos (2m-2k+1)x;$$

$$c) \quad 2^{2m} \sin^{2m} x = 2 \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m+k} C_{2m}^k \cos 2(m-k)x + C_{2m}^m;$$

$$d) \quad 2^{2m} \sin^{2m+1} x = \sum_{k=0}^m (-1)^{m+k} C_{2m+1}^k \sin (2m-2k+1)x.$$

*151. Доказать, что $\frac{\sin mx}{\sin x} = (2 \cos x)^{m-1} - C_{m-2}^1 (2 \cos x)^{m-3} + C_{m-3}^2 (2 \cos x)^{m-5} - \dots$

*152. Выразить $\cos mx$ через $\cos x$.

*153. Найти суммы:

a) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots$; b) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots$

*154. Найти сумму

$$C_n^1 - \frac{1}{3} C_n^3 + \frac{1}{9} C_n^5 - \frac{1}{27} C_n^7 + \dots$$

*155. Доказать, что $(x+a)^m + (x+a\omega)^m + (x+a\omega^2)^m = 3x^m + 3C_m^3 x^{m-3} a^3 + \dots + 3C_m^n x^{m-n} a^n$, где $\omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$, а n есть наибольшее целое число, кратное 3 и не превосходящее m .

*156. Доказать, что

$$a) \quad 1 + C_n^3 + C_n^6 + \dots = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3} \right);$$

$$b) \quad C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \dots = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{(n-2)\pi}{3} \right);$$

$$c) \quad C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \dots = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{(n-4)\pi}{3} \right).$$

*157. Показать, что

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \cdot \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

158. Вычислить сумму $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$.

159. Вычислить сумму

$$1 + a \cos \varphi + a^2 \cos 2\varphi + \dots + a^k \cos k\varphi.$$

† 160. Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{4} \cos 2x + \dots + \frac{1}{2^n} \cos nx \right).$$

161. Доказать, что если n — целое положительное, а θ — угол, удовлетворяющий условию $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2n}$, то

$$\cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} + \dots + \cos \frac{2n-1}{2} \theta = n \sin n\theta.$$

162. Доказать, что если x меньше единицы по абсолютной величине, то ряды

$$\text{а) } \cos \alpha + x \cos (\alpha + \beta) + x^2 \cos (\alpha + 2\beta) + \dots \\ \dots + x^n \cos (\alpha + n\beta) + \dots,$$

$$\text{б) } \sin \alpha + x \sin (\alpha + \beta) + x^2 \sin (\alpha + 2\beta) + \dots \\ \dots + x^n \sin (\alpha + n\beta) + \dots$$

сходятся и суммы соответственно равны

$$\frac{\cos \alpha - x \cos (\alpha - \beta)}{1 - 2x \cos \beta + x^2}, \quad \frac{\sin \alpha - x \sin (\alpha - \beta)}{1 - 2x \cos \beta + x^2}.$$

† 163. Найти суммы:

$$\text{а) } \cos x + C_n^1 \cos 2x + \dots + C_n^n \cos (n+1)x;$$

$$\text{б) } \sin x + C_n^1 \sin 2x + \dots + C_n^n \sin (n+1)x.$$

* 164. Найти сумму

$$\sin^2 x + \sin^2 3x + \dots + \sin^2 (2n-1)x.$$

† 165. Показать, что:

$$\text{а) } \cos^2 x + \cos^2 2x + \dots + \cos^2 nx = \frac{n}{2} + \frac{\cos (n+1)x \sin nx}{2 \sin x};$$

$$\text{б) } \sin^2 x + \sin^2 2x + \dots + \sin^2 nx = \frac{n}{2} - \frac{\cos (n+1)x \sin nx}{2 \sin x}.$$

• * 166. Найти суммы:

$$\text{а) } \cos x + 2 \cos 2x + 3 \cos 3x + \dots + n \cos nx;$$

$$\text{б) } \sin x + 2 \sin 2x + 3 \sin 3x + \dots + n \sin nx.$$

§ 3. Уравнения третьей и четвертой степени

167. Решить по формуле Кардано уравнения:

$$\text{а) } x^3 - 6x + 9 = 0; \quad \text{б) } x^3 + 12x + 63 = 0;$$

$$\text{с) } x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0; \quad \text{д) } x^3 + 6x^2 + 30x + 25 = 0;$$

$$\text{е) } x^3 - 6x + 4 = 0; \quad \text{ф) } x^3 + 6x + 2 = 0;$$

$$\text{г) } x^3 + 3x^2 - 6x + 4 = 0; \quad \text{х) } x^3 + 3x - 2i = 0;$$

$$\text{и) } x^3 - 6ix + 4(1-i) = 0; \quad \text{ж) } x^3 - 3abx + a^3 + b^3 = 0;$$

$$\text{к) } x^3 - 3abfgx + f^2ga^3 + fg^2b^3 = 0.$$

168. Доказать, что при решении кубических уравнений с рациональными коэффициентами по формуле Кардано все корни в формуле «извлекаются» в том и только в том случае, если корни уравнения имеют вид $2a$, $-a \pm bi\sqrt[3]{3}$ при рациональных a и b .

***169.** Пользуясь таблицами, решить уравнения:

a) $x^3 - 4x - 1 = 0$; b) $x^3 - 4x + 2 = 0$.

***170.** Пользуясь формулой Кардано, доказать, что

$$(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 = -4p^3 - 27q^2,$$

если x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 + px + q = 0$.

(Выражение $-4p^3 - 27q^2$ называется дискриминантом уравнения $x^3 + px + q = 0$.)

171. Доказать, что

$$\sqrt[3]{a + bi} = \frac{u(a + bi) + u^2i}{2a\sqrt[3]{a^2 + b^2}},$$

где u — корень уравнения $u^3 - 3(a^2 + b^2)u - 2b(a^2 + b^2) = 0$.

***172.** Вывести формулу для алгебраического решения уравнения

$$x^5 - 5ax^3 + 5a^2x - 2b = 0.$$

173. Решить уравнения:

- a) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$;
- b) $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6x - 15 = 0$;
- c) $x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$;
- d) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$;
- e) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 4x - 6 = 0$;
- f) $x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 27x - 56 = 0$;
- g) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = 0$;
- h) $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 10 = 0$;
- i) $x^4 + 2x^3 + 8x^2 + 2x + 7 = 0$;
- j) $x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 8 = 0$;
- k) $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3 = 0$;
- l) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x - 5 = 0$;
- m) $x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$;
- n) $x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1 = 0$.

174. Способ Феррари для решения уравнения четвертой степени $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ состоит в том, что левая часть представляется в виде

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{a^2}{4} + \lambda - b\right)x^2 + \left(\frac{a\lambda}{2} - c\right)x + \left(\frac{\lambda^2}{4} - d\right)\right]$$

и затем λ подбирается так, чтобы выражение в квадратных скобках было квадратом двучлена первой степени. Для этого необходимо и достаточно, чтобы было

$$\left(\frac{a\lambda}{2} - c\right)^2 - 4\left(\frac{a^2}{4} + \lambda - b\right)\left(\frac{\lambda^2}{4} - d\right) = 0,$$

т. е. λ должно быть корнем некоторого вспомогательного кубического уравнения. Найдя λ , раскладываем левую часть на множители.

Выразить корни вспомогательного уравнения через корни уравнения четвертой степени.

§ 4. Корни из единицы

175. Написать корни из единицы степени:

а) 2; б) 3; в) 4; д) 6; е) 8; ф) 12; г) 24.

176. Выписать первообразные корни из единицы степени:

а) 2; б) 3; в) 4; д) 6; е) 8; ф) 12; г) 24.

177. Показать, что число первообразных корней n -й степени из единицы четное, если $n > 2$.

178. Для каждого корня а) 16-й; б) 20-й; в) 24-й степени из единицы указать показатель, которому он принадлежит.

179. Выписать «круговые полиномы» $X_n(x)$ для n , равного:

а) 1; б) 2; в) 3; д) 4; е) 5; ф) 6; г) 7; д) 8;

и) 9; ж) 10; з) 11; л) 12; м) 15; н) 105.

180. Написать полином $X_p(x)$, где p — простое число.

*181. Написать полином $X_{p^m}(x)$, где p — простое число.

*182. Найти сумму всех корней n -й степени из 1.

*183. Вычислить $1 + 2\epsilon + 3\epsilon^2 + \dots + n\epsilon^{n-1}$, где ϵ — корень n -й степени из 1.

*184. Пусть ϵ — первообразный корень степени $2n$ из 1. Вычислить сумму $1 + \epsilon + \epsilon^2 + \dots + \epsilon^{n-1}$.

185. Найти суммы:

а) $\cos \frac{2\pi}{n} + 2 \cos \frac{4\pi}{n} + \dots + (n-1) \cos \frac{2(n-1)\pi}{n}$;

б) $\sin \frac{2\pi}{n} + 2 \sin \frac{4\pi}{n} + \dots + (n-1) \sin \frac{2(n-1)\pi}{n}$.

*186. Определить сумму первообразных корней:

а) 15-й; б) 24-й; в) 30-й степени из единицы.

*187. Составить простейшее алгебраическое уравнение, корнем которого является длина стороны правильного 14-угольника, вписанного в круг радиуса 1.

188. Доказать, что

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(t + \varepsilon_k)^n - 1}{t} = \prod_{k=1}^{n-1} [t^n - (\varepsilon_k - 1)^n],$$

где $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$.

189. Показать, что корни уравнения $\lambda(z-a)^n + \mu(z-b)^n = 0$, где λ, μ, a, b — комплексные, лежат на одной окружности, которая в частном случае может вырождаться в прямую (n — натуральное число).

190. Решить уравнения:

a) $(x+1)^m - (x-1)^m = 0$; b) $(x+i)^m - (x-i)^m = 0$;

c) $x^n - nax^{n-1} - C_n^2 a^2 x^{n-2} - \dots - a^n = 0$.

191. Доказать, что если A — комплексное число, модуль которого 1, то уравнение

$$\left(\frac{1+ix}{1-ix} \right)^m = A$$

имеет все корни вещественные и различные.

*192. Решить уравнение

$$\cos \varphi + C_n^1 \cos(\varphi + \alpha) x + C_n^2 \cos(\varphi + 2\alpha) x^2 + \dots + C_n^n \cos(\varphi + n\alpha) x^n = 0.$$

Доказать следующие теоремы:

193. Произведение корня степени a из 1 на корень степени b из 1 есть корень степени ab из 1.

194. Если a и b взаимно просты, то все корни степени ab из 1 получаются умножением корней степени a из 1 на корни степени b из 1.

195. Если a и b взаимно просты, то произведение первообразного корня степени a из 1 на первообразный корень степени b из 1 есть первообразный корень степени ab из 1 и обратно.

196. Доказать, что $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, если a и b взаимно просты, пользуясь тем, что $\varphi(n)$ есть число первообразных корней степени n .

*197. Доказать, что при n нечетном, большем 1, $X_{2n}(x) = X_n(-x)$.

198. Доказать, что если d составлено из простых делителей, входящих в n , то каждый первообразный корень из 1 степени nd есть корень степени d из первообразного корня n -й степени из 1 и обратно.

*199. Доказать, что если $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, где p_1, p_2, \dots, p_k — различные простые числа, то $X_n(x) = X_{n'}(x^{n''})$, где

$$n' = p_1 p_2 \dots p_k; \quad n'' = \frac{n}{n'}.$$

*200. Доказать, что коэффициенты полинома $X_{pq}(x)$, где p и q — неравные нечетные простые числа, равны 0, 1 или -1 .

201. Доказать, что все полиномы $X_n(x)$ при $n \leq 104$ имеют коэффициенты 0, 1, -1 .

202. Пусть p — простое число, не делящее n . Доказать, что

$$X_{pn}(x) = \frac{X_n(x^p)}{X_n(x)}.$$

203. Доказать, что сумма первообразных корней n -й степени из 1 равна функции Мёбиуса $\mu(n)$.

204. Доказать, что $X_n(x) = \prod (x^d - 1)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}$, где d пробегает все делители n .

*205. Найти $X_n(1)$.

*206. Найти $X_n(-1)$.

*207. $S = 1 + \varepsilon + \varepsilon^4 + \varepsilon^9 + \dots + \varepsilon^{(n-1)^2}$, где ε — первообразный корень степени n из 1. Найти $|S|$.

§ 5. Показательная функция и натуральный логарифм

Показательная функция от комплексной переменной z определяется при помощи формулы Эйлера: $e^{a+bi} = e^a (\cos b + i \sin b)$. Из нее следует: $\cos \varphi = \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$, $\sin \varphi = \frac{1}{2i} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$. Тригонометрическая форма комплексного числа: $\alpha = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ превращается в $\alpha = r e^{i\varphi} = e^{\ln r + i\varphi}$. Это делает естественным определение натурального логарифма: $\ln \alpha = \ln r + i\varphi$. Натуральный логарифм определен с точностью до целого кратного $2\pi i$.

*208. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a+bi}{n}\right)^n$.

209. Во что превращается в свете формулы Эйлера правило сложения аргументов при умножении комплексных чисел? Тот же вопрос для формулы Муавра.

210. Вычислить: а) $e^{\pi i}$; б) $e^{-\frac{\pi}{2} i}$.

211. Вычислить: а) $\ln(-1)$; б) $\ln(1+i)$.

212. Найти $\ln(x+i\sqrt{1-x^2})$, $-1 \leq x \leq 1$.

213. Выразить $\operatorname{arctg} x$ через логарифмическую функцию.

§ 6. Некоторые обобщения

214. Пусть K — поле и $m \in K$ не является квадратом элемента из K . Рассмотрим множество пар (a, b) элементов $a, b \in K$, считая

1) $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c, b = d,$

2) $(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d),$

3) $(a, b) \cdot (c, d) = (ac + mbd, ad + bc).$

Доказать, что множество пар с таким определением действий образует поле K_i (называемое квадратичным расширением поля K), в котором m является квадратом, именно $m = (0, 1)^2$. Пары $(a, 0)$ образуют подполе, изоморфное K , поэтому естественно не различать $a \in K$ и $(a, 0) \in K_i$. Любая пара записывается, при этом соглашении, в виде $a + bj$, где $j = (0, 1)$, $j^2 = m$.

215. Показать, что в квадратичном расширении поля $\operatorname{GF}(p)$, $p \geq 3$, содержится ровно p^2 элементов.

216. Показать, что конструкция, описанная в задаче 214, при применении к полю $\operatorname{GF}(p)$ приводит к изоморфным полям, независимо от выбора m .

217. Доказать, что все квадратичные расширения (в смысле задачи 214) поля \mathbb{R} вещественных чисел изоморфны полю \mathbb{C} комплексных чисел.

218. Доказать, что поле рациональных чисел имеет бесконечно много неизоморфных квадратичных расширений.