Математический анализ. 1й курс. 2й семестр.

19 августа 2014 г.

1 Глава 1. Неважно как она называется.

1.1 Параграф №1-9 уже учить не нужно.

1.2 Параграф №10. Формула Тейлора.

1.2.1 Многочлен Тейлора. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано.

Пусть $f\left(x\right)$определена в некоторой окрестности точки x_0 и диффиренцируема в точке x_0 n раз. Ставится задача определить многочелен n-ной степени: $P_n\left(x\right) = b_0 + b_1\left(x-x_0\right) + b_2\left(x-x_0\right)^2 + \ldots + b_n\left(x-x_0\right)^n$, удовлетворяющему условиям:

$$\begin{cases} P_n\left(x_0\right) = f\left(x_0\right) \\ P_n\prime\left(x_0\right) = f\prime\left(x_0\right) \\ P_n\prime\prime\left(x_0\right) = f\prime\prime\left(x_0\right) \\ \ldots \\ P_n^{(n)}\left(x_0\right) = f^{(n)}\left(x_0\right) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b_0 = f\left(x_0\right) \\ b_1 = f\prime\left(x_0\right) \\ 2!\cdot b_2 = f\prime\prime\left(x_0\right) \\ \ldots \\ n!\cdot b_n = f^{(n)}\left(x_0\right) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b_0 = f\left(x_0\right) \\ b_1 = f\prime\left(x_0\right) \\ b_2 = \dfrac{f\prime\prime\left(x_0\right)}{2!} \\ \ldots \\ b_n = \dfrac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!} \end{cases}$$

$b = \overline{0,n}$ и определим многочлен Тейлора:

$P_n\left(x\right) = f\left(x_0\right) + \dfrac{f\prime\left(x_0\right)}{1!}\left(x-x_0\right) + \dfrac{f\prime\prime\left(x_0\right)}{2!}\left(x-x_0\right)^2 + \ldots + \dfrac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n$

Отвечающий точке x_0.

Заметим, что в общем случае $f\left(x\right)$ и $P_n\left(x\right)$ - различные функции, при этом имеет место равенство:

$f\left(x\right) = P_n\left(x\right) + R_n\left(x\right)$

$$f\left(x\right) = f\left(x_0\right) + \frac{f\prime\left(x_0\right)}{1!}\left(x-x_0\right) + \frac{f\prime\prime\left(x_0\right)}{2!}\left(x-x_0\right)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n + R_n\left(x\right) \qquad (1)$$

(1) - Формула Тейлора.

$R_n\left(x\right) = f\left(x\right) - P_n\left(x\right)$ - n-ый остаток формулы Тейлора.

Геометрический смысл многочеленов Тейлора.

Замечание. Тут должна быть картинка, которую должен сделать Жорик.

$P_0\left(x\right) = f\left(x_0\right)\ \forall x\ const$

$P_1\left(x\right) = f\left(x_0\right) + f\prime\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$ - использует значение функции и угол касательной.

$P_2\left(x\right) = f\left(x_0\right) + f\prime\left(x_0\right)\left(x-x_0\right) + \dfrac{f\prime\prime\left(x_0\right)}{2!}\left(x-x_0\right)^2$- парабола учитываеткривизну графика.

Таким образом с ростом номера n график $P_n(x)$ приближается к $f(x)$ в точке x_0. В этом случае говорят, что $P_n(x)$ аппроксимирует функцию $f(x)$.

Теорема. *Пусть функция $y = f(x)$ n раз диффиренцируема в x_0, тогда в некоторой окрестности точки x_0 справедливо:*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right) \tag{2}$$

Замечание. Остаток $R_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$ б.м.ф. более высогоко порядка , чем $(x-x_0)^n$ при $x \longrightarrow x_0$.

Замечание. Формула (2) - локальныя формула Тейлора, а $R_n(x)$ - остаток формулы Тейлора в форме Пеано. Применяесть при вычислении пределов.

Доказательство. Вычислим предел.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} &= \left\{\begin{array}{c} R_n(x_0) = f(x_0) - P_n(x) = 0 \\ R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} \end{array}\right\} = \\
&= \lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \\
&= \left\{\ R_n'(x) = f'(x) - P_n' \longrightarrow 0\ \right\} = \\
&= \lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{R_n''(x)}{n(n-2)(x-x_0)^{n-2}} = \\
&= \dots = \\
&= \lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{R_n^{(n)}(x)}{n!} = \\
&= \left\{R_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - P_n^{(n)}(x) \longrightarrow 0\right\} = \\
&= 0
\end{aligned}$$

Тоесть $R_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$. ☐

1.2.2 Остаток формулы Тейлора в форме Лагранжа.

Теорема. *Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема $n+1$ раз в некоторой окрестности точки x_0, тогда в данной окреснтости справедливо равенство:*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varphi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{3}$$

где φ - точка из интервала $(x_0; x)$.

Замечание. Формула (3) - нелокальная формула Тейлора.

Замечание. $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\varphi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ - остаток формулы Тейлора в форме Лагранжа.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную формулу $g\left(x\right)=\left(x-x_0\right)^{n+1}$.

$g\left(x_0\right)=g'\left(x_0\right)=g''\left(x_0\right)=\ldots=g^{(n)}\left(x_0\right)=0$

$g^{(n+1)}\left(x_0\right)=\left(n+1\right)!$ - для любой точки x.

Выделим частное

$$\begin{aligned}
\frac{R_n\left(x\right)}{g\left(x\right)} &= \left\{\begin{array}{c} x\in U_g\left(x_0\right) \\ U_g\left(x_0\right)-\text{область в условии теоремы}\end{array}\right\}= \\
&= \frac{R_n\left(x\right)-R_n\left(x_0\right)}{g\left(x\right)-g\left(x_0\right)}= \\
&= \left\{\begin{array}{c} \text{Теорема Коши} \\ \exists c_1\in\left(x,x_0\right)\end{array}\right\}= \\
&= \frac{R_n{}'\left(c_1\right)}{g'\left(c_1\right)}= \\
&= \frac{R_n{}'\left(c_1\right)-R_n\left(x_0\right)}{g'\left(c_1\right)-g'\left(x_0\right)}= \\
&= \left\{\begin{array}{c} \text{По теореме Коши} \\ \exists c_2\in\left(x_0,c_1\right)\end{array}\right\}= \\
&= \frac{R_n{}''\left(c_2\right)}{g''\left(c_2\right)}= \\
&= \ldots= \\
&= \frac{R_n^{(n)}\left(c_n\right)}{g^{(n)}\left(c_n\right)}= \\
&= \frac{R_n^{(n)}\left(c_n\right)-R_n^{(n)}\left(x_0\right)}{g^{(n)}\left(c_n\right)-g^{(n)}\left(x_0\right)}= \\
&= \frac{R_n^{(n+1)}\left(\varphi\right)}{\left(n+1\right)!}= \\
&= \frac{f^{(n)}\left(\varphi\right)-f^{(n+1)}\left(\varphi\right)}{\left(n+1\right)!}= \\
&= \frac{f^{(n+1)}\left(\varphi\right)}{\left(n+1\right)!}
\end{aligned}$$

$$R_n\left(x\right)=\frac{f^{(n+1)}\left(\varphi\right)}{\left(n+1\right)!}\left(x-x_0\right)^{n+1} \qquad \square$$

Замечание. (3) - применяется на практике для вычислений прбликенных значений.

Замечание. Если обозначить $x-x_0=\triangle x$; $x=x_0+\triangle x$, то (3) примет вид

$f\left(x\right)=f\left(x_0\right)+\frac{f\left(x_0\right)}{1!}\cdot\triangle x+\frac{f'\left(x_0\right)}{2!}\cdot\triangle x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\cdot\triangle x^n+\frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\Theta\triangle x\right)}{\left(n+1\right)!}\cdot\triangle x^{n+1}$; $\Theta\in\left(0,1\right)$

Замечание. Если $x_0=0$, то получается частный случай формулы Тейлора, а именно, формула Маклорена.

$$f\left(x\right)=f\left(x_0\right)+\frac{f'\left(0\right)}{1!}\cdot x+\frac{f''\left(0\right)}{2!}\cdot x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}\left(0\right)}{n!}\cdot x^n+R_n\left(x\right)$$

где $R_n(x) = o(x^n)$ или $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$; $\Theta \in (0,1)$

1.2.3 Оценка остатка для формулы Маклорена.

Лемма. *Если* $\exists M > 0$ *и* $\exists \delta > 0$ *то* $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in U_g(0)$ $(|x| < \delta)$. $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$, *то остаток* $|R_n(x)| \leq \dfrac{M \cdot \delta^{n+1}}{(n+1)!}$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &= \left\{ \begin{array}{c} \text{Теорема Лагранжа} \\ \xi \in (0,x) \Longrightarrow \xi \in U_g(0) \end{array} \right\} = \\
&= \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot x^{n+!} \right| = \\
&= \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!} \cdot |x|^{n+1} \leq \\
&\leq \frac{M \cdot \delta^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

□

Пример. Вычислить число e с точностью до $\varepsilon = 10^{-3}$.

$f(x) = e^x$

$f(1) = e^1 = e$

$f(0) = e^0 = 1 \implies$

Так как $\left|f^{(n)}(x)\right| = |e^x| = e^x \leq e^1 \leq 3 \implies$

$|R_n(1)| = \dfrac{e^{\xi}}{(n+1)!} \cdot 1^{n+1} = \dfrac{e^{\xi}}{(n+1)!} < \dfrac{3}{(n+1)!} < 0.001 \implies$

$(n+1)! = 3000$; $n+1 = 7$; $n = 6$

$e^1 \approx 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} + \dfrac{1}{5!} + \dfrac{1}{6!}$

1.2.4 Разложение элементарных функций по формуле Маклорена. Общий вид формулы Тейлора.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + R_n(x)$$

$R_n(x)$ -остаток $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta \triangle x)}{(n+1)!}$ или $R_n(x) = o(x - x_0)$при $x \longrightarrow x_0$.

Если $x_0 = 0$ то получим формулу Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \; ; \; \Theta \in (0,1)$$

1. $f(x) = e^x$

   Пример. Так как $f(0) = 1$; $f'(0) = 1$; $\ldots$; $f^{(n-1)}(0) = 1$; $f^{(n)}(0) = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ получим

   $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

2. $f(x) = \sin x$

   Пример. $$\begin{array}{cc} f'(x) = \cos x & f(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x & f(0) = 0 \\ f'''(x) = -\cos x & f(0) = -1 \\ f''''(x) = \sin x & f(0) = 0 \end{array}$$

   $$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot (-1)^n + \frac{\sin\left(\Theta x + \pi n + \frac{3\pi}{2}\right)}{(2n+3)!} \cdot x^{2n+3}$$

   Замечание. И что то там дальше непонятное написано.....

3. $f(x) = \ln(x+1)$

   Пример. $f(0) = 0$

   $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$

   $f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$

   $f'''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$

   $f''''(x) = -\dfrac{6}{(1+x)^4}$

   $\ldots$

   $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(1+x)^n}$

   $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!$

   $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n + \dfrac{(-1)^n}{(1+\Theta x)^{n+1} \cdot (n+1)}$

   $f^{(n+1)}(\Theta x) = \dfrac{(-1)^n \cdot n!}{(1+\Theta x)^{n+1}}$

1.2.5 Асимптотические формулы. Вычисления пределов.

Выпишим полученные разложения элементарных функция с остатком в форме Пеано.

$$\begin{cases} e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ \sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\ \cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \\ \ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n + o(x^n) \\ (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!} + \ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \end{cases} \tag{4}$$

Формулы *(4)* ассимптотические. Их используют при вычислении пределов при $x \longrightarrow 0$ и при раскрытии неопределенностей имеет место следующее выражение:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{A^n + o\left(x^n\right)}{B^m + o\left(x^m\right)} = \begin{cases} n > m, & 0 \\ n = m, & \dfrac{A}{B} \\ m > n, & \infty \end{cases}$$

1.3 Параграф №11. исследование функции.

1.3.1 Признак монотонности.

Теорема. *Функция $f\left(x\right)$дифференцируема на интервале $\left(a,b\right)$, неубывает(невозрастает) на $\left(a,b\right) \Longleftrightarrow f\prime\left(x\right) \geq 0 \left(f\prime\left(x\right) \leq 0\right)\ \forall x \in \left(a,b\right)$.*

Если $f\prime\left(x\right) > 0 \left(f\prime\left(x\right) < 0\right)\ \forall x \in \left(a,b\right)$ то $f\left(x\right)$ строго монотонно возрастает(убывает).

Доказательство. Необходимость.

Пусть $x_0 \in \left(a,b\right),\ x \in \left(a,b\right),\ \triangle x = x - x_0$

$$\frac{\triangle f}{\triangle x} = \frac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} \quad \begin{cases} f\prime\left(x_0\right) \geq 0 & \text{Неубывает} \\ f\prime\left(x_0\right) \leq 0 & \text{Невозрастает} \end{cases}$$

Достаточность.

Пусть $a < x_1 < x_2 < b \Longrightarrow$

$$f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right) = \left\{ \begin{array}{c} \text{Т. Лагранжа} \\ \exists c \in \left(x_1, x_2\right) \end{array} \right\} = f\prime\left(c\right)\left(x_2 - x_1\right)$$

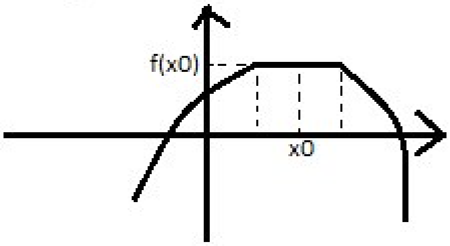
$f\prime\left(x\right) \geq 0$ на $\left(a,b\right)$, но $f\prime\left(c\right) \geq 0 \Longrightarrow f\left(x_2\right) \geq f\left(x_1\right)$ - неубывает.

$f\prime\left(x\right) \leq 0$ на $\left(a,b\right)$, но $f\prime\left(c\right) \leq 0 \Longrightarrow f\left(x_2\right) \leq f\left(x_1\right)$ - невозрастает.

Аналогично и для строгих знаков. $\square$

Замечание. Если $f\prime\left(x\right) > 0 \left(< 0\right)\ \forall x \in \left(a,b\right)$ то $\exists f'\left(x\right) = 0$. Например $f\left(x\right) = x^3$ то $f'\left(0\right) = 0$.

Замечание. Если $f\left(x_0\right) = f\left(x\right)\ \forall x \in U_\delta\left(x_0\right)$, то x_0 является точкой нестрогого максимума(минимума) функции $y = f\left(x\right)$.



1.3.2 Отыскание точеек экстремума.

Определение. Точка $x_0 \in D\left(f\right)$ - это точка локального минимума(максимума) $f\left(x\right)$, если $\exists U_\delta\left(x_0\right)\ \delta > 0\ \forall x \in U_\delta\left(x_0\right)\ f\left(x\right) \geq f\left(x_0\right)\ \left(f\left(x\right) \leq f\left(x_0\right)\right)$

Замечание. Если неравенство нестрогое при $x = x_0$, то если неет, то x_0- строго макс(минимума). (Так написано у Тимура, хз че это)

Определение. Точки минимумма и максимума функции называются ее экстремумами.

Теорема. (2) Необходимое условие экстремума.

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, определена в окрестности x_0 и x_0 является точкой локального экстремума, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Следует из теоремы Ферма. ☐

Замечание. Заметим что условие не является достаточным.

Пример. $y = x^3$; $y'(x) = 3x^2$; $y'(0) = 0$, но точка $x_0 = 0$ не является точкой экстремума.

Определение. Точки в которых выполняется условие $f'(x_0) = 0$ - это точки возможного экстремума, стационарные точки, критические точки и точки, подозреваемые на экстремум.

Теорема. *(3)* Первое достаточное условие существования экстремума.

Пусть точка x_0 является точкой возможного экстремума функции $y = f(x)$, так-же функция $y = f(x)$- дифференцируема в окрестности точки x_0.

Если $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ в левой полуокрестности точки x_0, а $f'(x) < 0$ $(f'(x) > 0)$ в правой полуокрестности точки x_0, то точка x_0 является точкой максимума(минимума) функции $f(x)$.

Если при переходе через точку x_0 $f'(x)$ не меняет знак, то x_0не является точкой экстремума.

Доказательство. Рассмотрим $x \in U_\delta(x_0)$

$$f(x) - f(x_0) = \{\text{т. Лагранжа}\} = \begin{array}{c} \exists c \in (x_0; x_0 + \delta) \\ \exists c \in (x_0 - \delta; x_0) \end{array} = f'(c)(x - x_0)$$

Пусть $f'(x)$меняет знак с + на -. $\Longrightarrow f(x) < f(x_0)$ $\forall x \in U_\delta(x_0) \Longrightarrow x_0$ - точка строгого локального максимума. ☐

Теорема. (4) *Второе достаточное условие существования экстремума.*

Пусть $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) \neq 0$, $f''(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки x_0.

Тогда x_0 - точка локального минимума функции $y = f(x)$ при $f''(x_0) > 0$ и максимума при $f''(x_0) < 0$.

Доказательство. Рассмотрим $f''(x) > 0 \Longrightarrow$ в некоторой окрестности точки x_0 $f''(x)$ сохраняет свой знак, то $f''(x) > 0$ $x \in U_\delta(x_0) \Longrightarrow (f'(x))' > 0 \Longrightarrow f'(x) \nearrow$ в $U_\delta(x_0)$ $\Longrightarrow f'(x) < f'(x_0)$ или $f'(x) > f'(x_0) \Longrightarrow$ производная меняет знак $\Longrightarrow$ по преведущей теореме $\Longrightarrow$ точка x_0 - точка локального минимума. ☐

1.3.3 Экстремумы недифференцируемой функции.

Теорема. *Пусть $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, за исключением самой точки x_0 и $f(x)$ непрерывна в этой окрестности.*

Если
$f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ в левой части
$f'(x) < 0$ $(f'(x) > 0)$ в правой части
то x_0 - точка максимума(минимима) функции $y = f(x)$.

Доказательство. Ограничимся случаем $\begin{array}{c} f'(x) > 0 \text{ слева} \\ f'(x) < 0 \text{ справа} \end{array}$ от x_0.

Рассмотрим $\forall x \in (x_0; x_0 + \delta)$, что функция $y = f(x)$ дифференцируема на $(x_0; x]$, непрерывна на отрезке $[x_0, x] \Longrightarrow$ по теореме Лагранжа $f(x) - f(x_0) = f'(c) \cdot (x - x_0) \Longrightarrow f(x) < f(x_0)$, аналогично и для левой части $\Longrightarrow x_0$ - точка максимума. ☐

1.3.4 Направление выпуклости графика функции.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на (a, b) в любой точке $M(x, f(x))$ - график функции $y = f(x)$ существует производная (касательная) через точку M.

Определение. Говорят что график функции $y = f(x)$ дифференцируем на (a, b) и имеет выпуклость на (a, b) вверх(вниз) если $\forall x \in (a, b)$ касательная к графику, проведенному через точку $M(x, f(x))$ лежит не выше(не ниже) графика $y = f(x)$.

Теорема. (6)

Если $\forall x \in (a, b)$ $\exists f''(x)$ *и* $f''(x) \geq 0$ *на* $(a, b)(f''(x) < 0$ *на* $(a, b))$*, то график функции* $y = f(x)$ *имеет на* (a, b) *выпуклость вниз (вверх).*

Доказательство. Рассмотрим $f''(x) \geq 0$ на (a, b).

Возьмем производную точки $c \in (a, b)$, докажем что касательная через $M(c, f(c))$ - не выше графика.

Уравнение касательной - $Y = f(c) - f'(c) \cdot (x - c)$

Для функции $y = f(x)$ выпишем разложение по формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа:

$$y = f(c) + f'(c) \cdot (x - c) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - c)^2$$

$$y - Y = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - c)^2 > 0 \Longrightarrow y > Y.$$

□

Теорема. (7) *Пусть* $f''(x)$ *положительна(отрицательна) в некоторой точке* с *и непрерывна в* $U_\delta(c)$*. Тогда график функции* $y = f(x)$ *имеет в* $U_\delta(c)$ *выпуклость вниз(вверх).*

Доказательство. Пусть $f''(c) > 0 \Longrightarrow f''(x)$ - непрерывна $\Longrightarrow$ по теореме о сохранении знака $\Longrightarrow f''(x) > 0$ $x \in U_\delta(c) \Longrightarrow$ в этой окрестности график $y = f(x)$ имеет выпуклость вниз. □

1.3.5 Точки перегиба.

Определение. Точка $M(c, f(c))$ называется точкой перегиба графика функции если существует такая окрестность $U_\delta(c)$, что в левой и правой полуокрестности точки c график $y = f(x)$ имеет разные направления выпуклости.

Теорема. (8) Необходимое условие точки перегиба.

Если точка с является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$, $f''(x)$ *непрерывна в* $U_\delta(c)$*,то* $f''(c) = 0$

Доказательство. Предположим обратное. Пусть $f''(c) \neq 0$, например $f''(c) > 0 \Longrightarrow$ по теореме о сохранении знака о непрерывности функции $\Longrightarrow f''(x) > 0$ $x \in U_\delta(c) \Longrightarrow$ в $U_\delta(c)$ график $y = f(x)$ имеет выпуклость вниз $\Longrightarrow$ при переходе через с неменяет (!!!) □

Замечание. $f''(c) = 0$ не является достаточным.

Теорема. (9) Достаточное условие.

Если $y = f''(x)$ *непрерывна в точке с и при переходе через точку с* $y = f''(x)$ *меняет знак* $\Longrightarrow$ *с - точка перегиба.*

Доказательство. Пусть $\begin{array}{l} f''(x) < 0 \text{ в левой полуокрестности} \\ f''(x) > 0 \text{ в правой полуокресности} \end{array}$ $\Longrightarrow$слева вверх выпуклость, справа вниз. □

Теорема. (10) Второе достаточное условие точки перегиба.

Если $f''(c) = 0$; $f'''(x)$*- непрерывна в точке c и* $f'''(c) \neq 0$ *, то точка c - точка перегиба графика функции* $y = f(x)$.

Доказательство. Пусть $f'''(c) > 0 \Longrightarrow f''(x)$ - возрастает в точке $c \Longrightarrow y = f''(x)$ в $U_\delta(c)$ слева отрицательна, а справа положительна $\Longrightarrow$ по Теореме №9 $\Longrightarrow$ с - точка перегиба графика функции. □

Теорема. (11) Третье достаточное условие экстремума и перегиба графика функции.

Пусть $y = f(x)$ *- непрерывна вместе со своими производными до* $(n+1)$ *порадны* $n \in \mathbb{N}$ *в некоторой окрестности точки c .*

$f''(c) = f'''(c) \ldots = f^{(m)}(c) = 0$; $f^{(m-1)}(c) \neq 0$ *если* $(n+1)$ *четно и* $f'(c) = 0$, *то* $x = c$ *- точка экстремума, причем* $f^{(m+1)}(c) > 0$ (< 0) $\Longrightarrow$ *это точка минимума(максимума). Если* $(n+1)$ *- четно то* $x = c$ *- точка перегиба.*

Доказательство. 1) $(n+1)$ - четное, $f'(c) = 0$

Тогда в окресности точки с $f(x)$ разложим по формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа.

$$f(x) = f(c) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

$$f(x) - f(c) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

Так как $f^{(n+1)}(c) \neq 0 \Longrightarrow f^{(n+1)}(x)$ непрерывна в $U_\delta(c)$ с сохранением знака $\Longrightarrow f^{(n+1)}(x) > 0$ (< 0) в этой окрестности $\Longrightarrow f^{(n+1)}(\xi) > 0$ (< 0) .

Если $f^{(n+1)}(c) > 0 \Longrightarrow f^{(n+1)}(\xi) > 0 \Longrightarrow \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} > 0 \Longrightarrow f(x) - f(c) > 0 \Longrightarrow$ $f(x) > f(c)\ \forall x \in U_\delta(c) \Longrightarrow$ с - точка минимума. Для максимума аналогично.

2) $(n+1)$ - нечетное. Рассмотрим формулу Тейлора.

$$g(x) = f''(x) \Longrightarrow \begin{array}{c} g(x) = g(c) + \dfrac{g'(c)}{1!}(x-c) + \ldots \\ f''(x) = f''(c) + \dfrac{f'''(c)}{1!}(x-c) + \ldots + \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1} \end{array} \Longrightarrow f''(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

Так как $y = f^{(n+1)}(x)$ - непрерывна $\Longrightarrow$ по теореме о сохранении знака $f^{(n+1)}(\xi)$ имеет такой же знак как $f^{(n+1)}(c)$, а $(x-c)^{n+1}$ - меняет знак при переходе через точку с $\Longrightarrow f''(x)$ - меняет знак при переходе через точку с $\Longrightarrow$ по 1ому достаточному условию точки перегиба : точка с- точка перегиба. □

1.3.6 Асимптоты графика функции.

Определение. Прямая $y = a$ называется вертикальной ассимптотой $y = f(x)$ если $\lim\limits_{x \longrightarrow a-0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \longrightarrow a+0} f(x) = \infty$.

Определение. Если существует предел $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=a$ или $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)=b$, $y=a$ или $y=b$ называют горизонтальной асимптотой $y=f(x)$ при $x\longrightarrow+\infty$ или $x\longrightarrow-\infty$.

Определение. График $y=f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y=kx+b$ при $x\longrightarrow+\infty\ (-\infty)$ есл имеет место представление $f(x)=kx+b+\alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\alpha(x)=0$ $\left(\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\alpha(x)=0\right)$

Теорема. *Пусть*
$y=f(x)$ *имеет наклонную асимптоту* $y=kx+b$ () *при* $x\longrightarrow\pm\infty$
$\Longleftrightarrow \exists \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty\ (-\infty)}\dfrac{f(x)}{k}=k\ \&\ \exists \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty\ (-\infty)}(f(x)-kx)=b.$

Доказательство. " $\Longrightarrow$ " Пусть выполнено представление (1.3.6), тоесть есть асимптоту $\Longrightarrow$ разделив (1.3.6) на x в пределе получится

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty\ (-\infty)}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow+\infty\ (-\infty)}\frac{kx+b+\alpha(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow+\infty\ (-\infty)}\left(k+\frac{b}{x}+\frac{\alpha(x)}{x}\right)=k$$

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty\ (-\infty)}(f(x)-kx)=\lim_{x\longrightarrow+\infty\ (-\infty)}(b+\alpha(x))=b$$

" $\Longleftarrow$ " Пусть $\exists \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty\ (-\infty)}(f(x)-kx)=b\ \Longrightarrow$

$\Longrightarrow f(x)-kx=b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м.п при $x\longrightarrow+\infty\ (-\infty)\ \Longrightarrow f(x)=kx+b+\alpha(x)\ \Longrightarrow$ (1.3.6) выполнено. ☐

1.3.7 Общая схема исследования функции.

При исследовании $y=f(x)$ и построении её графика можно предерживаться следующей схемы:

1. Находим $D(f)$ и $E(f)$.
2. Исследуем на четность/нечетность/переодичность/непериодичность.
3. Ищем точки пересечения графика функции с осями координат и находим промежутки знакопостоянства.
4. Находим асимптоты.
5. Исследуем с помощью $f\prime(x)$ - промежутки монотонности и точки экстремума.
6. Исследуем с помощью $f\prime\prime(x)$ - направления выпуклости и точки перегиба.
7. Построение графика функции.

2 Глава 2. Неопределенный интеграл

2.1 Параграф №1. Первообразная и неопределенный интеграл.

2.1.1 Понятие первообразной.

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на промежутке $X\subset\mathbb{R}$, если $F\prime(x)=f(x)$.

Пример. $f(x) = \sin 2x$

$F(x) = -\frac{\cos 2x}{2}$

$\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)' = \sin 2x$ на $X = \mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$

Пример. $f(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}/$

так как $\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = -\frac{-x}{1+x^2}$ при $x \in (-1; 1)$

то $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ на $x \in (-1; 1)$

Пример. $f(x) = -\frac{1}{\cos 2x}$

$F(x) = \mathrm{tg} x$

$x = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$

Лемма. *(1) Если $F'(x) \equiv 0$ на промежутке X, то $F(x) \equiv const = c$ на X.*

Доказательство. Для $\forall x_1, x_2 \in X \quad F(x_1) - F(x_2) = \{$т. Лагранжа$\} = F'(x_1)(x_2 - x_1) = 0$

$F(x_1) = F(x_2) \ \forall x_1, x_2 \in X \Longrightarrow F(x) = const$ $\square$

Теорема. *(1) Если $F(x)$- первообразная функции $f(x)$ на промежутке X, то любая первообразная имеет вид $\Phi = F(x) + c$*

Доказательство. Рассмотрим $\Phi(x) - F(x)$.

$\forall x \in X \ (\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Longrightarrow$Лемма 1$\Longrightarrow \Phi(x) - F(x) \equiv c$ на X $\Longrightarrow \Phi(x) = F(x) + c$ $\square$

2.1.2 Неопределенный интеграл.

Определение. Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на X, то семейство функций вида $\{F(x) + c\}$ $c \in \mathbb{R}$ на X обозначают $\int f(x)\,dx = F(x) + c$.

Замечание. $f(x)$ - подынтегральная функция.

Замечание. $f(x)\,dx$ - подынтегральное выражение.

Замечание. $F'(x)\,dx = df(x)$

Пример. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$

так как $(2\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ при $X = (0; +\infty)$

Пример. $\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c$

Так как $\left(\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c\right) = \frac{x}{x^2+1}$

2.2 Параграф №2. Основные свойства неопределенного интеграла.

1. *Свойство* $\left(\int f\left(x\right)dx\right)' = f\left(x\right)$ *или* $d\left(\int f\left(x\right)dx\right) = f\left(x\right)dx$

   Доказательство. $\left(\int f\left(x\right)dx\right)' = \left(F\left(x\right) + c\right)' = F'\left(x\right) + c' = f\left(x\right)$
   $d\left(\int f\left(x\right)dx\right) = \left(\int f\left(x\right)dx\right)'dx = f\left(x\right)dx$ □

2. *Свойство* $\int df\left(x\right) = F\left(x\right) + c$ *или* $\int F'\left(x\right)dx = F\left(x\right) + c$

3. *Свойство* $\int kf\left(x\right)dx = k \cdot \int f\left(x\right)dx \quad \forall x \in \mathbb{R}$

   Доказательство. Пусть $F\left(x\right)$ - первообразная функции $f\left(x\right) \Longrightarrow k \cdot \int f\left(x\right)dx = k \cdot F\left(x\right) + \tilde{c}$, где $\tilde{c} = k \cdot c$.
   $\int kf\left(x\right)dx = \{k \cdot F\left(x\right)$- первообразная для $f\left(x\right)\} = k \cdot f\left(x\right) + c$ □

4. *Свойство* $\int \left(f\left(x\right) \pm g\left(x\right)\right)dx = \int f\left(x\right)dx \pm \int g\left(x\right)dx$ *если* $F\left(x\right)$ *и* $G\left(x\right)$ *существуют.*

2.3 Порaграф №3. Таблица интегралов.

1. $\int 0dx = c(c = const)$
2. $\int dx = x + c$
3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c(\alpha \neq -1)$
4. $\int \frac{dx}{x} = ln\left|x\right| + c$
5. $\int e^x = e^x + c$
6. $\int \sin(x) = -\cos(x) + c$
7. $\int \cos x = \sin x + c$
8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna}$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$
11. $\int shxdx = chx + c$
12. $\int chxdx = shx + c$
13. $\int \frac{dx}{ch^2x} = thx + c$
14. $\int \frac{dx}{sh^2x} = -cthx + c$
15. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + c$
16. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + c\ ,\ \{\left|x\right| > \left|a\right|\}$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin\frac{x}{a}+c$, $\{a \neq 0\}$

2.4 Параграф №4

2.4.1 Основные методы интегрирования.

Непосредственное интегрирование. (1/3) Метод непосредственного интегрирования заключается в интегрировании функций с использованием основных свойств неопределенногго интеграла и таблицы интегралов.

Пример.

$$\int\left(5x\sqrt{x}-\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{sin^2x}{cos^2x}\right)dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx - 4\int\frac{dx}{\sqrt{x}}+\int\left(\frac{1}{cos^2x}-1\right)dx =$$
$$= 5\cdot\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} - 4\cdot 2\cdot x^{\frac{1}{2}} + tgx + -x + c =$$
$$= 2x^2\sqrt{x} - 8\sqrt{x} + tgx - x + c$$

Пример.

$$\int\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx = \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}+\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + arccosx + c$$

Метод замены переменной. (2/3)

Теорема. *Пусть функция* $x = \varphi(t)$ *определена и дифференцируема на промежутке* T *и принимает значения на промежутке* $X = E(\varphi(t)) = D(f(x))$. *Если на промежутке* X *функция* $f(x)$ *интегрируема, то справедлива следующая формула:* $\int f(\varphi(t))\cdot\varphi\prime(t)\,dt = \int f(x)\,dx$ () .

Доказательство. Пусть $F(x)$ - первообразная для $f(x)\Longrightarrow$

$(F(\varphi(t)))\prime = F'(\varphi(t))\cdot\varphi\prime(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi\prime(t)$. $\int f(\varphi(t))\cdot\varphi\prime(t)\,dx = \int f(x)\,dx$.

$(F(x))\prime = f(x)\Longrightarrow$слева (2.4.1) *получается неопределенный интеграл* $F(\varphi(t))+c$, *а справа* $F(x)+c$; $|x=\varphi(t)|.\Longrightarrow$

семейства функций совпадают $\Longrightarrow$ (2.4.1) верно ☐

Замечание. Исследование формулы слева направо называется методом внесения под знак дифференциала, справа-налево - метод подстановки.

Внесение под знак дифференциала. (3/3)

Пример.

$$\begin{aligned}\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{\left(x^2\right)' dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \left|y = x^2\right| = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{1-y}} = \\ &= \left\{ \begin{array}{c} d\left(ay+b\right) = \left(ay+b\right)' dy = ady \\ dy = \frac{d(ay+b)}{a} \end{array} \right\} = \int \frac{d\left(1-y\right)}{\sqrt{1-y}} = \\ &= \left|z = 1-y\right| = -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = -\sqrt{z} + c = \\ &= \sqrt{1+x^2} + c\end{aligned}$$

Пример.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3dx}{x^8-2} &= \frac{1}{4}\int \frac{\left(x^4\right)' dx}{x^8-2} = \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{dx^4}{x^8-2} = \left|y = x^4\right| = \frac{1}{4}\int \frac{dy}{y^2-2} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right| + c\end{aligned}$$

Пример.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{xlnxlnlnx} &= \int \frac{d\left(ln\left|x\right|\right)}{lnxlnlnx} = \left|y = lnx\right| = \\ &= \int \frac{dy}{ylny} = \int \frac{dlny}{lny} = \int \frac{dz}{z} = ln\left|z\right| + c = ln\left|lnlnx\right| + c\end{aligned}$$

Пример.

$$\begin{aligned}\int \mathrm{tg} x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \\ &= \int \frac{\left(\cos x\right)'}{\cos x} dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = \left|y = \cos x\right| = -\int \frac{dy}{y} = \\ &= -ln\left|\cos x\right| + c\end{aligned}$$

Пример.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} &= \{x > 0\} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \\ &= -\int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \left\{y = \frac{1}{x}\right\} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2+1}} = \\ &= -ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) + c = -ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right) + c\end{aligned}$$

Пример.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\cos^2 x} &= \int \frac{dx}{\cos^2 x\left(tg^2 x + 3\right)} = \\ &= \int \frac{d\mathrm{tg}x}{\mathrm{tg}^2 x + 3} = \{y = \mathrm{tg}x\} = \int \frac{dy}{y^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{y}{\sqrt{3}} + c = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}tgx}{3}\right) + c\end{aligned}$$

Метод подстановки (Обратный ход).

Пример.

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt[3]{1-x}dx &= \left\{\begin{array}{c}\sqrt[3]{1-x} = t\\ 1-x = t^3\\ x = 1-t^3\\ dx = d\left(1-t^3\right) = \left(1-t^3\right)' dt = -3t^2 dt\end{array}\right\} = \\ &= \int \left(1-t^3\right)^2 t\left(-3t^2\right)dt = -3\int\left(t^3 - 2t^6 + t^9\right)dt = \\ &= -3\left(\frac{t^4}{4} - \frac{2t^2}{2} + \frac{t^{10}}{10}\right) + c = \ldots\end{aligned}$$

Где $t = \sqrt[3]{1-x}$.

Пример.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}} &= \left\{\begin{array}{c} t = \sin x\\ dx = \cos dt\\ t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\\ 1-x^2 = 1-\sin^2 = \cos^2 t\end{array}\right\} = \\ &= \int \frac{\cos t dt}{\left(\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \mathrm{tg}t + c = \frac{\sin t}{\cos t} + c = \\ &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + c\end{aligned}$$

2.4.2 Метод интегрирования по частям.

Теорема. *Пусть функции $U(x)$ и $V(x)$ дифференцируемы на X и существует первообразная для функции $V(x)\cdot U\prime(x)$, тогда $V(x)\cdot U\prime(x)$ также интегрируема на X и выполняется равенство: $\int U(x)\cdot V\prime(x)\,dx = U(x)\cdot V(x) - \int V(x)\cdot U\prime(x)\,dx$.*

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{5}$$

Формула (5) применяется в случаях, когда интеграл в правой части вычисляется легче, чем интергал в левой части.

Доказательство. $(u(x) \cdot v(x))\prime = u\prime(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v\prime(x)$

Умножим на dx и проинтегрируем

$\int (u(x) \cdot v(x))\prime dx = \int u\prime(x) \cdot v(x)\,dx + \int u(x) \cdot v\prime(x)\,dx \Longrightarrow \left\{\int (u(x) \cdot v(x))\prime dx = u(x) \cdot v(x) + c\right\} \Longrightarrow$

$u(x) \cdot v(x) = \int u\prime(x) \cdot v(x)\,dx + \int u(x) \cdot v\prime(x)\,dx \Longrightarrow \int U(x) \cdot V\prime(x)\,dx = U(x) \cdot V(x) - \int V(x) \cdot U\prime(x)\,dx$ □

Пример.

$$\int \ln x dx = \left\{ \begin{array}{ccc} u = & \ln x & \\ dx = & dv & \\ du = & (ln)\prime dx = & \frac{dx}{x} \\ x = & v & \end{array} \right\} = x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = $$
$$= x \ln x - x + c$$

Пример.

$$\int x^n \ln x dx = \left\{ \begin{array}{c} u = \ln x \\ dv = x^n dx \\ du = \frac{dx}{x} \\ v = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{array} \right\} = \frac{x^{n+1} \cdot \ln x}{n+1} - \frac{1}{n+1} \cdot \int x^{n+1} \cdot \frac{dx}{x} =$$
$$= \frac{x^{n+1} \cdot \ln x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c$$

Пример.

$$\int x \cdot \mathrm{arctg} x \cdot dx = \left\{ \begin{array}{c} u = \mathrm{arctg} x \\ dv = x dx \\ du = \frac{dx}{x^2+1} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2 \mathrm{arctg} x}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2+1} dx =$$
$$= \frac{x^2 \mathrm{arctg} x}{2} - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \frac{x^2 \mathrm{arctg} x}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \mathrm{arctg} x + c =$$
$$= \frac{1}{2} \left((x^2+1)\mathrm{arctg} x - x\right) + c$$

Пример.

$$\int \left(x^2-3x+5\right)\cdot sin2x\cdot dx=\left\{\begin{aligned} u =&x^2-3x+5\\ dv =&\sin 2x\cdot dx\\ du =&(2x-3)\,dx\\ v =&-\frac{\cos 2x}{2}\end{aligned}\right\}=$$

$$=-\frac{x^2-3x+5}{2}\cdot\cos 2x+\frac{1}{2}\int(2x-3)\cos 2xdx+c=$$

$$=\left\{\begin{aligned} u =&2x-3\\ dv =&\cos 2xdx\\ du =&2\cdot dx\\ v =&\frac{\sin 2x}{2}\end{aligned}\right\}=$$

$$=-\frac{x^2-3x+5}{2}\cdot\cos 2x+\frac{1}{2}\left(\frac{2x-3}{2}\cdot\sin 2x-\int\sin 2xdx\right)=$$

$$=\frac{-2x^2+6x\ldots}{\ldots}\ldots$$

Пример.

$$\int e^{ax}\cdot\cos bxdx=\left\{\begin{aligned} u =&e^{ax}\\ dv =&\cos bxdx\\ du =&ae^{ax}\\ v =&\frac{\sin bx}{b}\end{aligned}\right\}=\frac{e^{ax}\sin bx}{b}-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bxdx=$$

$$=\left\{\begin{aligned} u =&e^{ax}\\ dv =&\sin bxdx\\ du =&ae^{ax}dx\\ v =&-\frac{\cos bx}{b}\end{aligned}\right\}=\frac{e^{ax}\sin bx}{b}-\frac{a}{b}\left(-\frac{e^{ax}\cdot\cos bx}{b}+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bxdx\right)=$$

$$=\frac{e^{ax}\cdot(b\sin bx+a\cos bx)}{b^2}-\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bxdx$$

Получили уравнение относительно I ; $\left\{I\equiv\int\right\}$

$$I=\frac{e^{ax}\left(b\sin bx+a\cos bx\right)}{b^2}-\frac{a^2}{b^2}\cdot I$$

$$I\cdot\frac{b^2+a^2}{b^2}=\frac{e^{ax}\left(b\sin bx+a\cos bx\right)}{b^2}$$

$$I=\frac{e^{ax}\left(b\sin bx+a\cos bx\right)}{b^2+a^2}$$

Определение. Таким образом существует 3 вида подынтегральных выражений, к которым применяется метод интегрированием по частям

1. Интегралы содержащие в подынтегральном выражении в качестве множетеля $\ln^{(n)} x$,$\mathrm{arctg} x$,$\arcsin x$. В этом случае указываемые функции выбираются в качестве $u(x)$.
2. Это интергралы вида $\int P_n(x) \cdot \varphi(x)\, dx$, где $\varphi(x) = \left\{ \begin{matrix} \sin ax \\ \cos ax \\ e^{ax} \end{matrix} \right\}$. В качестве $u(x) = P_n(x)$.

   Метод интегрирования по частям применяется n раз
3. Это интерграл вида $\int e^{ax} \cos bx dx$; $\int e^{ax} \sin bx dx$; $\int \cos \ln x dx$; $\int \sin \ln x dx$. Вычисляются с вычисляется двукратным интегрированием по частям, с последующим решением уравнения, относительно искомого интеграла

Замечание. Существуют исключения.

Пример.

$$\int \frac{xdx}{\cos^2 x} = \left\{ \begin{matrix} u = x \\ dv = \dfrac{dx}{cos^2 x} \\ du = dx \\ v = \mathrm{tg} x \end{matrix} \right\} =$$

$$= x \cdot \mathrm{tg} x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = x \mathrm{tg} x - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} =$$

$$= x \mathrm{tg} x + \ln|\cos x| + c$$

Пример. $I = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, $n \in \mathbb{N}$

Выведем рекурентную формулу для I.

$$
\begin{aligned}
K_n &= \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2 \cdot dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} = \\
&= \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2+x^2-x^2}{\left(x^2+a^2\right)^n} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2} \int x \cdot \frac{2x}{\left(a^2+x^2\right)^n} dx = \\
&= \left\{
\begin{aligned}
u =& x \\
dv =& \frac{2x}{\left(a^2+x^2\right)^n} dx \\
du =& dx \\
v =& \int \frac{d\left(x^2+a^2\right)}{\left(a^2+x^2\right)^n} = \\
& = \left\{
\begin{aligned}
x^2+a^2 &= t \\
d\left(x+c\right) &= dx
\end{aligned}
\right\} = \\
& = \int \frac{dt}{t^n} = \frac{1}{t^{n-1}\left(1-n\right)} = \\
& = \frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^{n-1}\left(1-n\right)}
\end{aligned}
\right\} = \\
&= \frac{1}{a^2} K_{n-1} - \frac{1}{2a^2} \left(\frac{x}{\left(a^2+x^2\right)^{n-1}\left(1-n\right)} - \frac{1}{1-n} \int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^{n-1}} \right) = \\
&= \frac{K_{n-1}}{a^2} - \frac{K_{n-1}}{2a^2\left(n-1\right)} + \frac{x}{2a^2\left(n-1\right)\left(a^2+x^2\right)^{n-1}} = \\
&= \frac{2n-3}{a^2\left(2n-2\right)} \cdot K_{n-1} + \frac{x}{2a^2\left(n-1\right)\left(a^2+x^2\right)^{n-1}}
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow$$

$$
K_n = \frac{2n-3}{a^2\left(2n-2\right)} \cdot K_{n-1} + \frac{x}{2a^2\left(n-1\right)\left(a^2+x^2\right)^{n-1}}
$$

Пример. Вычислить$\int \frac{dx}{\left(x^2+9\right)^2}$

$K_1 = \int \frac{dx}{x^2+3^2} = \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\frac{x}{3} + c$
$K_2 = \{n = 2\} = \frac{1}{9\cdot 2} \cdot \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\frac{x}{3} + \frac{x}{18\cdot 1(x^2+9)} + c$

2.5 Параграф №5

2.5.1 Интегрирование рациональных функций

Определение. Функция вида $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots a_{n-1}+a_n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots b_{n-1}+b_n}$, где $n, m \in \mathbb{N}$; $a_i, b_j \in \mathbb{R}\left(i=\overline{0,n}\ ;\ j=\overline{0,m}\right)$, называются рациональной функцией

2.5.2 Интегрирования элементарных дробей

Определение. Элементарными называются дроби вида
$\frac{A}{x-a}$; $\frac{Mx+N}{x^2+px+q} \cdot p^2-4q<0$
$\frac{A}{(x-a)^n}$; $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$; $p^2-4q<0$, где
$A, M, N, p, q \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$; $n \neq -1$

Проинтегрируем элементарные дроби

1.

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int -\frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a|+c$$

2.

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^n} == \frac{A}{(1-n)\cdot(x-a)^{n-1}}+c$$

3.

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\int \frac{(x^2+px+q)'}{x^2+px+q}dx - \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}} =$$

$$= \left\{\begin{matrix} a-\frac{p^2}{4}=\frac{4q-p^2}{4}=\left(\frac{\sqrt{4a-p^2}}{2}\right)^2 \\ 4q-p^2>0\ \text{, так как } p^2-4q<0 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} - \frac{2N-Mp}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot\text{arctg}\frac{\frac{2x+p}{2}}{\sqrt{\frac{4q-p^2}{2}}} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) - \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\text{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+c$$

Пример.

$$\int \frac{3x-1}{x^2+x+2}dx = \frac{3}{2}\int \frac{(x^2+x+2)'}{x^2+x+2}dx - \frac{5}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+2-\frac{1}{4}} =$$

$$= \int \frac{d(x^2+x+2)}{x^2+x+2} - \frac{5}{2}\int \frac{d\left(\frac{2x+1}{2}\right)}{\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left(x^2+x+2\right)+\ldots$$

4.

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n} = \int \frac{\left(x^2+px+q\right)'}{\left(x^2+px+q\right)}dx + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^n} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \text{Интегрирование степенной функции} \\ \int \frac{dt}{t^n} = \frac{1}{(-n+1)t^{n-1}} \\ q-\frac{p^2}{4} = \left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\right)^2 \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{M}{2}\cdot\frac{1}{(1-n)\left(x^2+px+q\right)^{n-1}} + \frac{2N-Mp}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}$$

2.5.3 Метод неопределенных коэффицентов

Определение. Рациональная функция $f\left(x\right) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ - называется правильной дробью, если $n < m$ и неправельной если $n \geq m$.

Пример. $f\left(x\right) = \frac{2x^3-40x-8}{x(x+4)(x-2)}$: n=3,m=3 - дробь неправельная

- Произведем деление многочелена на многочлен $\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$.

  $2x^3-40x-8 \mid x^3+2x^2-8x$

  $-2x^3+4x^2-16x \mid 2$

  $-4x^2-24x-8$

- Получим представление функции в виде правильной дроби.

  $f\left(x\right) = 2 - \frac{4x^2+24x+8}{x(x+4)(x-2)}$- в виде суммы многочленов степени $(n-m)$ и правильной дроби. Таким образом задача интегрирования рациональных функции сводится к задаче интеррирования правильной дроби.

  В курсе алгебры доказывается теорема

Теорема. *Всякую правильную дробь вида* $\frac{P(x)}{Q(x)}$*- знаменатель которой имеет вид :* $Q\left(x\right) = \left(x-b_1\right)^{B_1}\cdot\left(x-b_2\right)^{B_2}\cdot\ldots\cdot\left(x-b_l\right)^{B_l}\cdot\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\lambda_1}\cdot\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot\left(x^2+p_kx+q_k\right)^{\lambda_k}$ *то можно однозначно преставить в виде суммы* $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{B_1^1}{x-b_1} + \frac{B_2^1}{(x-b_1)^2} + \ldots + \frac{B_{B_1}^1}{(x-b_1)^{B_1}} + \{\ldots\} + \frac{B_1^l}{x-b_l} + \frac{B_2^l}{(x-b_l)^2} + \ldots + \frac{B_{B_l}^l}{(x-b_l)^{B_l}} + \frac{M_1{\prime}+N_1{\prime}}{x^2+p_1x+q_1} + \ldots + \frac{M_{\lambda_1}{\prime}+N_{\lambda_1}{\prime}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}} + \{\ldots\} +$

$+\frac{M_1^kx+N_1^k}{x^2+p_kx+q_k} + \ldots + \frac{M_{\lambda_k}^kx+N_{\lambda_k}^k}{(x^2+p_kx+q_k)^{\lambda_k}}$

Все коэффиценты N_j^i, M_j^i, B_j^i- находятся однозначно с помощью метода неопределенных коэффицентов.

Пример. $\int\frac{2x^3-40x-8}{x(x+4)(x-2)}dx = \int\left(2-\frac{4x^2+24x+8}{x(x+4)(x-2)}\right)dx$

$$g\left(x\right) = \frac{4x^2+24x+8}{x\left(x+4\right)\left(x-2\right)} = \left\{\text{ Это правильная дробь }\right\} =$$

$$= \frac{^{x^2+2x-8}A}{x} + \frac{^{x^2+2x}B}{x+4} + \frac{^{x^2+4x}C}{x-2} =$$

$$= \frac{\left(A+B+C\right)x^2+\left(2A-2B+4C\right)x-8A}{x\left(x+4\right)\left(x-2\right)}$$

Так как в левой и правой части выражения тождественно равны и равны их знаменатели, то и многочлены 2й степени могут так же совпадать. Следовательно прировняем коэффиценты при одинаковых степенях, получим систему:

$$\begin{matrix} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{matrix} \begin{cases} A+B+C=4 \\ 2A-2B+4C=24 \\ -8A=8 \end{cases} \iff \begin{cases} C=6 \\ B=-1 \\ A=-1 \end{cases}$$

$$I=2x-\int\left(-\tfrac{1}{x}-\tfrac{1}{x+4}+\tfrac{6}{x-2}\right)dx=2x+\ln|x|+\ln|x+4|-6\ln|x-2|+c$$

Пример. $I=\int\frac{x^3+6x^2+15x+2}{(x-2)(x+2)^3}dx$

$$f(x)=\{n=3\ <\ 4=m\}=$$
$$=\frac{{}^{\underline{x^3+6x^2+12x+8}}A}{x-2}+\frac{{}^{\underline{x^3+2x^2-4x-8}}B}{(x+2)}+\frac{{}^{\underline{x^2-4}}C}{(x+2)^2}+\frac{{}^{\underline{x-2}}D}{(x+2)^3}=$$
$$=\frac{(A+B)x^3+(6A+2B+C)x^2+(12A-4B+D)x+(8A-8B-4C-2D)}{(x-2)(x+2)^3}$$

$$\begin{matrix} x^3 \\ x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{matrix} \begin{cases} A+B=1 \\ 6A+2B+C=6 \\ 12A-4B+8=15 \\ 8A-8B-4C-2D=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ -4B+C=0 \\ -16B+D=3 \\ -16B-4C-2D=-6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ -4B+C=0 \\ -4C+D=3 \\ -8C-2D=-6 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -4B+C=0 \\ -4C+D=3 \\ -4D=-12 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} D=3 \\ C=0 \\ B=0 \\ A=1 \end{cases}$$

$$I=\int\left(\tfrac{1}{x-2}+\tfrac{3}{(x+2)^3}\right)dx=\ln|x-2|-\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{(x+2)^2}+c$$

Пример. $I=\int\frac{2x^3+4x^2+2x+2}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)}dx$

$$f(x)=\{\text{Правильная дробь}\}=\frac{{}^{\underline{x^2+x+2}}Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{{}^{\underline{x^2+x+1}}Cx+D}{x^2+x+2}=$$
$$=\frac{(A+C)x^3+(A+B+C+D)x^2+(2A+B+C+D)x+2B+D}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)}$$

$$\begin{matrix} x^3 \\ x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{matrix} \begin{cases} A+C=2 \\ A+B+C+D=4 \\ 2A+B+C+D=2 \\ 2B+D=2 \end{cases} \iff \begin{cases} D=2 \\ C=4 \\ B=0 \\ A=-2 \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{-2x}{x^2+x+1}dx + \int \frac{(4x+2)\,dx}{x^2+x+2} = \\
&= -\int \frac{(x^2+x+1)'dx}{x^2+x+1} + 1\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + 2\cdot\int \frac{(x^2+x+2)'dx}{x^2+x+2} = \\
&= -\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + 2\ln\left(x^2+x+2\right) + c
\end{aligned}
$$

2.6 Параграф №6

2.6.1 Интегрирование иррациональностей

Пункт 1/3. Вычисление интегралов вида

$$I = \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right) \tag{6}$$

В (6) $p_i \in \mathbb{Z}$; $q_i \in \mathbb{N}$; $i = \overline{1,n}$; $a, b, c, d \in \mathbb{R}$; R - рациональная функция своих аргументов.

Обозначим выражение $\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$, где m - наименьшее общее кратное всех знаменателей $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, ну или это общий знаменатель дробей $\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_n}{q_n}$.

$\Longrightarrow ax + b = cx \cdot t^m + d \cdot t^m$

$x\left(a - c \cdot t^m\right) = d \cdot t^m - b$

$x = \frac{d \cdot t^m - b}{a - c \cdot t^m}$

$dx = \frac{d \cdot m \cdot t^{m-1} \cdot (a - c \cdot t^m)}{(a - c \cdot t^m)^2} dt = \frac{(ad - cb) \cdot m \cdot t^{m-1}}{(a - c \cdot t^m)^2} dt$

Получим

$$I = m\left(ad - cb\right) \int R\left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}, t^{\frac{mp_1}{q_1}}, t^{\frac{mp_2}{q_2}}, \ldots, t^{\frac{mp_n}{q_n}}\right) \frac{t^{m-1}}{\left(a - c \cdot t^m\right)^2} dt \tag{7}$$

Если применение подстановки приводит к интегрированию рациональной функции, то говорят, что подстановка рацианализирует исходный интеграл. В нашем случае (6) рацианализарует (7).

Пример. $I = \int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} \cdot \frac{dx}{(2-x)^2}$

$a = -1$; $b = 2$; $c = 1$; $d = 2$; $\frac{p}{q} = \frac{1}{3} \Longrightarrow N = 3$

$\frac{2-x}{2+x} = t^3 \Longrightarrow 2 - x = 2t^3 + xt^3 \Longrightarrow x\left(t^3 + 1\right) = 2 - 2t^3$

$x = \frac{2-2t^3}{t^3+1}$

$dx = 2 \cdot \frac{-3t^2\left(t^3+1\right) - \left(1-t^3\right) \cdot 3t^2}{\left(t^3+1\right)^2} dt = \frac{-12t^2}{\left(t^3+1\right)^2} dt$

$I = \int t \cdot \frac{-12t^2}{\left(t^3+1\right)^2} \cdot \frac{dt}{\left(2 - \frac{2-2t^3}{t^3+1}\right)^2} = -12 \int \frac{t^3}{16t^6} dt = -\frac{3}{4} \int \frac{dt}{t^3} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{t^{-2}}{-2} + c = \frac{3}{8} \sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + c$

Пример.

$$I = \int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)} dx = \left\{ \begin{array}{c} \frac{p_i}{q_i} : \frac{2}{3}; \frac{1}{6}; \frac{1}{3} \Longrightarrow N = 6 \\ x = t^6 \Longrightarrow \sqrt[2]{x^2} = t^4 \\ \sqrt[6]{x} = t \ ; \ \sqrt[3]{t} = t^2 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right\} = \int \frac{t^6 + t^4 + t}{t^6\left(1 + t^2\right)} 6t^5 dt =$$

$$= 6 \int \frac{t^5 + t^3 + 1}{t^2 + 1} dt = 6 \int \left(t^3 + \frac{1}{t^2 + 1}\right) dt = 6\left(\frac{t^4}{4} + \operatorname{arctg} t\right) + c =$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + 6\operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + c$$

Пункт 2/3. Подстановка Эйлера Рассмотрим интеграл вида

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx \tag{8}$$

($\sqrt{ax^2+bx+c}$ - Квадратичная иррациональность)

Рассмотрим различия подстановки, рацианализарующие интергал (8).

- Возможные случаи:

  1. $a > 0 \implies \sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}x$

     Ограничимся случаем с “-”. $ax^2+bx+c = t^2 - 2\sqrt{a} \cdot t \cdot x + ax^2 \Longrightarrow x \cdot (b + 2\sqrt{a}t) = t^2 - c \Longrightarrow \frac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}t}$ $dx = \frac{2t\left(b+2\sqrt{a}t\right)-\left(t^2-c\right)2\sqrt{a}}{\left(b+2\sqrt{a}t\right)} = \varphi\left(t\right)$ ($\varphi\left(t\right)$ - рациональная функция) $\Longrightarrow$ $I = \int R\left(\frac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}t}, t - \sqrt{a} \cdot \frac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}t}\right)\varphi\left(t\right)dt$

     Пример. $I = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$
     $a > 0\ ;\ a = 1 \implies$
     $\sqrt{x^2+x+1} = t - x$
     $x^2+x+1 = t^2 - 2tx + x^2$
     $x\left(1+2t\right) = t^2 - 1$
     $x = \frac{t^2-1}{2t+1}\ ;\ dx = \frac{2t(2t+1)-\left(t^2-1\right)\cdot 2}{(2t+1)^2}$
     $I = \int \frac{\left(2t^2+2t+2\right)dt}{\left(\frac{t^2-1}{2t+1}+t-\frac{t^2-1}{2t+1}\right)^2(2t+1)^2} = \int \frac{t^2+t+1}{t(2t+1)^2}$

  2. $c > 0 \Longrightarrow \sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$

     Рассмотрим случай когда стоит плюсик. *(Тимофею эта строчка кажется очень милой =))*

     Возведем в квадрат.
     $ax^2+bx+c = x^2t^2 + 2\sqrt{c}xt + c$
     $ax + b = xt^2 + 2\sqrt{c}t$
     $x\left(a - t^2\right) = 2\sqrt{c}t - b$
     $x = \frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2}$- рациональная функция.$\Longrightarrow dx = \varphi\left(t\right)dt$
     Интеграл рационализируется.

Пример.

$$I = \int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - x - x^2}} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} a < 0 \ ; \ c = 1 \, (> 0) \\ \sqrt{1 - x - x^2} = xt + 1 \\ 1 - x - x^2 = x^2 t^2 + 2xt + 1 \\ -1 - x = xt^2 + 2t \\ x \left(t^2 + 1\right) = -1 - 2t \\ x = -\frac{2t+1}{t^2+1} \\ dx = -\frac{2\left(t^2-1\right)-4t^2-2t}{\left(t^2+1\right)^2} dt = \frac{2t^2+2t-2}{\left(t^2+1\right)^2} dt \end{array} \right\} =$$

$$= 2 \int \frac{t^2 + t - 1}{\left(1 + -\frac{2t+1}{t^2+1} \cdot t + 1\right) \left(t^2 + 1\right)^2}$$

3. Если существуют вещественные корни x_1 и x_2 квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ то применяется подстановка:
   $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \cdot (x - x_1)$
   $a\,(x - x_1)\,(x - x_2) = t^2\,(x - x_1)$
   $ax - ax_2 = t^2 x - t^2 x_1$
   $x\,(t^2 - a) = t^2 x_1 - ax^2$
   $x = \frac{t^2 x_1 - a x_2}{t^2 - a}$ - раациональная функция.
   Интеграл рацианализаруется.

   Пример. $I = \int \frac{dx}{2x - \sqrt{-x^2+5x-4}}$
   $a = -1 < 0 \ ; \ c = -4 < 0$
   $-x^2 + 5x - 4 = -\left(x^2 - 5x + 4\right) - (x - 1)\,(x - 4)$
   $\sqrt{-x^2 + 5x - 4} = t\,(x - 1)$
   $-\,(x - 1)\,(x - 4) = t^2\,(x - 1)^2$
   $\begin{array}{r} x\,(t^2 + 1) = t^2 + 4 \\ -x + 4 = t^2 x - t^2 \end{array} \Longrightarrow x = \frac{t^2+4}{t^2+1}$
   $dx = \frac{6t}{\left(t^2+1\right)^2} dt$

Пункт 3/3. Интегрирование биноминальных дифференциалов. Подстановки Чебышева. Рассмотрим интеграл вида:

$$I = \int x^m \cdot (a + bx^n)^p \, dx \tag{9}$$

$a, b \in \mathbb{R}$; $m, n, p \in \mathrm{Q}$

Подынтегральное выражение - биномиальный дифференциал (дифференциальный бином).

1. $p \in \mathbb{Z} \Longrightarrow m = \frac{p_1}{q_1}$; $n = \frac{p_2}{q_2} \Longrightarrow$Согласно Пункту 1 используется подстановка.

   $x = t^n$- первая подстановка Чебешева.

2. $p \notin \mathbb{Z} \Longrightarrow$ Делаем замену $x^n = z \Longrightarrow x = z^{\frac{1}{n}}$

   $dx = \frac{1}{n} \cdot z^{\frac{1}{n}-1} dz = \frac{1}{n} z^{\frac{1-n}{n}} dz$

   $I = \int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx = \frac{1}{n} \int \left(a + bz\right)^p \cdot z^{\frac{m}{n} + \frac{1-n}{n}} dz = \frac{1}{n} \int \left(a + bz\right) z^{\frac{m+1}{n} - 1}$

   Если $q = \frac{m+1}{n} - 1 \in \mathbb{Z}$то согласно пункту 1 применяется подстановка $t = \sqrt[l]{a + bz} = \sqrt[l]{a + bx^n}$, где n - знаменатель дроби p. Это вторая подстановка Чебышева.

   $\int \sqrt[5]{5x + z} \left(tx^3 + 1\right) dx$

   $(5x + z) = t^5$

3. Если $q \notin \mathbb{Z}$, то есть $\frac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z}$, то

   $I = \frac{1}{n} \int \left(\frac{a+bz}{z}\right)^p \cdot z^{q+p} dz$

   Если $q + p \in \mathbb{Z}$, то есть $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, то применяется последняя замена, согласно пункту 1:

   $\frac{a+bz}{z} = t^l$ или $t = \sqrt[l]{\frac{a+bz}{z}} = \sqrt[l]{b + ax^{-n}}$ - Третья подстановка Чебешева.

Замечание. Чебышевым было доказано, что интеграл рацианализируется только в этих трех перечисленных случаях.

1. $p \in Z \Longrightarrow x = t^N$

2. $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \Longrightarrow t = \sqrt[l]{a + bx^n}$

3. $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z} \Longrightarrow t = \sqrt[l]{b + sx^{-n}}$

Пример. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1 + \sqrt[4]{x}\right)}$

$$I = \int x^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + x^{\frac{1}{4}}\right)^{-10} dx = \left\{ \begin{array}{c} m = -\frac{1}{2} \ ; \ m = \frac{1}{4} \Longrightarrow N = 4 \\ p = -10 \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \text{Первая подстановка Чебышева} \\ x = t^4 \\ dx = 4t^3 dt \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{1}{t^2} \left(1 + t\right)^{-10} \cdot 4t^3 dt = 4 \int \frac{t + 1 - 1}{\left(t + 1\right)^{10}} dt = 4 \int \left(\frac{1}{\left(t + 2\right)^9} - \frac{1}{\left(t + 1\right)^{10}} \right) d\left(t + 1\right) =$$

$$= 4 \frac{\left(t + 1\right)^{-8}}{-8} - 4 \frac{\left(t + 1\right)^{-9}}{-9} + c = \frac{4}{9\left(1 + \sqrt[4]{x}\right)^9} - \frac{1}{2\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)^8}$$

Пример. $I = \int \frac{dx}{x\sqrt[6]{x^6+1}}$

$m = -1 \ ; \ a = b = 1 \ ; \ n = 6 \ ; \ p = -\frac{1}{6} \ ; \ \frac{m+1}{n} = \frac{-1+1}{6} = 0 \in \mathbb{Z}$

$t = \sqrt[6]{1+x^6}$

$t^6 1 + x^6 \ ; \ x^6 = t^6 - 1 \ ; \ x = \sqrt[6]{t^6-1} = \left(t^6-1\right)^{\frac{1}{6}}$

$I = \int \left(t^6-1\right)^{-\frac{1}{6}} \cdot t^{-1} \cdot \frac{1}{6}\left(t^6-1\right)^{-\frac{5}{6}} 6t^5 dt = \int \frac{t^4}{t^6-1} dt$

$$I = \int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^5}} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \int x^m \cdot \left(a+bx^4\right)^p dx \\ m = -2 \\ n = 3 \\ p = -\frac{5}{3} \\ \frac{m+1}{n} + p = \frac{-2+1}{3} - \frac{5}{3} = -2 \in \mathbb{Z} \\ \text{3я подстановка Чебышева} \\ \sqrt[3]{2 \cdot x^{-3} + 1} = t \\ 2 \cdot x^{-3} + 1 = t^3 \\ \Longrightarrow x = \left(\frac{t^3-1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} \\ dx = -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{t^3-1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}} \cdot \frac{3t^2}{2} dt \\ x^2 = \left(\frac{t^3-1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^5}} = \frac{1}{x^5 \cdot \sqrt[3]{\left(2 \cdot x^{-3}+1\right)^5}} = \frac{\left(t^3-1\right)^{\frac{5}{3}}}{2^{\frac{5}{3}} \cdot t^5} \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{\left(t^3-1\right)^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{\left(t^3-1\right)^{\frac{5}{3}}}{2^{\frac{5}{3}} \cdot t^5} \cdot \frac{\left(t^3-1\right)^{-\frac{4}{3}}}{2^{-\frac{4}{3}}} \cdot \frac{t^2}{2} dt = \frac{1}{4} \int \frac{t^3-1}{t^3} dt = \dots$$

Дальше благодаря Чебышеву всё легко.

2.7 Параграф №7. Интегрирование тригонометрических выражений.

2.7.1 Применение формул преобразования произведения в сумму и формула понижения степени.

- При вычислении интегралов вида

$$\int \cos mx \cdot \cos nx \cdot dx$$

$$\int \sin mx \cdot \cos nx \cdot dx$$

$$\int \sin mx \cdot \sin nx \cdot dx$$

Применяется:

  - $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha+\beta\right) + \cos\left(\alpha-\beta\right)\right)$
  - $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\alpha+\beta\right) + \sin\left(\alpha-\beta\right)\right)$
  - $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha-\beta\right) - \cos\left(\alpha+\beta\right)\right)$

Пример.

$$\begin{aligned} I &= \int \cos 3x \cos 5x dx = \\ &= \frac{1}{2}\int \left(\cos 8x + \cos 2x\right) dx = \frac{\sin 8x}{16} + \frac{\sin 2x}{4} + c \end{aligned}$$

Пример.

$$\begin{aligned} I &= \int \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \cdot dx = \\ &= \frac{1}{2}\int \left(\cos x - \cos 3x\right) \cdot \sin 3x \cdot dx = \\ &= \frac{1}{2}\int \left(\sin 3x \cos x - \sin 3x \cos 3x\right) \cdot dx = \\ &= \frac{1}{4}\int \left(\left(\sin 4x + \sin 2x\right) - \left(\sin 6x - \sin 0\right)\right) \cdot dx = \\ &= -\frac{\cos 4x}{16} - \frac{\cos 2x}{8} + \frac{\cos 6x}{24} + c \end{aligned}$$

- При вычислении интегралов вида
$\int \cos^{2k} ax \cdot \cos^{2m} bx \cdot dx$
$\int \cos^{2k} ax \cdot \sin^{2m} bx \cdot dx$
$\int \sin^{2k} ax \cdot \sin^{2m} bx \cdot dx$
Нужно использовать формулы понижения степени.

Пример.

$$
\begin{aligned}
I = \int \cos^3 2x \cdot \cos^2 3x \cdot dx &= \left\{ \begin{array}{l} \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \\ \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{1}{4}\int (1+\cos 4x)\cdot(1+\cos 6x)\cdot dx = \\
&= \frac{1}{4}\int \left(1+\cos 4x+\cos 6x+\frac{1}{2}(\cos 10x+\cos 2x)\right)\cdot dx = \\
&= \frac{x}{4}+\frac{\sin 4x}{16}+\frac{\sin 6x}{24}+\frac{\sin 10x}{80}+\frac{\sin 2x}{16}+c
\end{aligned}
$$

2.7.2 Универсальная тригонометрическая подстановка

При вычислении интеграла

$$I = \int R(\sin x, \cos x)\, dx$$

Можно использовать подстановку:

$$
\begin{aligned}
t &= \mathrm{tg}\frac{x}{2};\ \ x \in (-\pi, \pi) \\
x &= 2\mathrm{arctg}t; \\
dx &= \frac{2}{1+t^2}\cdot dt \\
\sin x &= \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

Тогда интеграл примет вид:

$$I = 2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{dt}{1+t^2}$$

Пример.

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 5} = \\
&= \left\{ \begin{array}{c} t = \mathrm{tg}\frac{x}{2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right\} = \\
&= 2\int \frac{dt}{\left(3\cdot\dfrac{2t}{1+t^2} + 4\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2} + 5\left(1+t^2\right)\right)\left(1+t^2\right)} = \\
&= \int \frac{dt}{6t + 4 - 4t^2 + 5 + 5t^2} = \\
&= 2\int \frac{d\left(t+3\right)}{\left(t+3\right)^2} = \\
&= -\frac{2}{\left(t+3\right)} + c = \\
&= -\frac{2}{\mathrm{tg}\dfrac{x}{2} + 3} + c
\end{aligned}
$$

2.7.3 Частные случаи вычисления интеграла.

$$I = \int R\left(\sin x, \cos x\right)\cdot dx$$

Использование универсальной тригонометрической подстановки приводит нередко к громоздким вычислениям, рассмотрим случай, когда можно применить более простые подстановки.

- $R\left(-\sin x, \cos x\right) = -R\left(\sin x, \cos x\right)$- это нечётность по синусу.

  $R\left(\sin x, \cos x\right)dx = R\dfrac{\left(\sin x, \cos x\right)\cdot\sin x}{\sin x}dx = R_1\left(\sin^2 x, \cos x\right)d\left(\cos x\right) = R_1\left(1-\cos^2 x, \cos x\right)d\left(\cos x\right)$ и далее $y = \cos x$. Интеграл рационализируется.

  Пример.

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sin dx}{\left(3\cos x - 1\right)^3} = \\
&= \left\{ \; R\left(-\sin x, \cos x\right) = -R\left(\sin x, \cos x\right) \; \right\} = \\
&= -\int \frac{d\left(\cos x\right)}{\left(3\cos x - 1\right)^3} = \left\{y = \cos x\right\} = \\
&= -\int \frac{dy}{\left(3y-1\right)^3} = \left\{\frac{d\left(ax+b\right)}{a} = dy\right\} = \\
&= -\frac{1}{3}\int \frac{d\left(3y-1\right)}{\left(3y-1\right)^3} = \left\{3y - 1 = z\right\} = \\
&= -\frac{1}{3}\int \frac{dz}{z^3} = \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{z^2} = \\
&= \frac{1}{6\left(3\cos x - 1\right)^2} + c
\end{aligned}
$$

- Нечетность по косинусу.

  $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$

$$\begin{aligned} R(\sin x, \cos x)\,dx &= \frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}\cdot \cos x \cdot dx = \\ &= R_1\left(\sin x, \cos^2 x\right) d\sin x = \\ &= R_1\left(\sin x, 1-\sin^2 x\right) d\sin x \,\{y = \sin x\} \end{aligned}$$

Пример.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin dx}{(3\cos -1)^3} = \left\{ \begin{array}{c} R(-\sin x, \cos x) = \\ = -R(\sin x, \cos x) \end{array} \right\} = \\ &= \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 -6\sin x + 5} = \{\text{Нечетность по } \cos\} = \\ &= \int \frac{d(\sin x - 3)}{(\sin x - 3)^2 - 4} = \{y = \sin -3\} \ldots \end{aligned}$$

- $R(-\sin x, -\cos x)\,dx = R(\sin x, \cos x)\,dx$ - четность по совокупности переменных.

  $t = \text{tg}x$; $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Пример. $I = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^{10} x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x}\cdot\left(\frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}\right)\cdot\frac{1}{\cos^4 x} = \left\{ \begin{array}{c} \cos^2 x = \frac{1}{1+\text{tg}^2 x} \\ \text{tg}x = t \\ \frac{1}{\cos^4 x} = \left(1+\text{tg}^2 x\right)^2 \end{array} \right\} =$ $\int t^4\cdot\left(1+t^2\right)^2\cdot dt = \ldots$

Пример. $I = \int \frac{\cos^5 x}{\sin^5 x}dx = \int \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)\cos^4 x\frac{dx}{\sin^2 x} = \left\{ \begin{array}{c} t = \text{ctg}\, x \\ \cos^4 x = \left(\frac{1}{1+\text{tg}^2 x}\right)^2 = \frac{t^4}{(1+t^2)^2} \end{array} \right\} =$ $-\int \frac{t\cdot t^4}{(1+t^2)^2}dt = \ldots$

Пример. $I = \int \frac{1+\text{tg}x}{\sin 2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x\cos x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1+\text{tg}x}{tgx}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} = \{t = \text{tg}x\} =$ $\frac{1}{2}\int \frac{1+t}{t}dt = \ldots$

2.7.4 Интегрирование иррацианальностей при помощи тригонометрических и гиперболических подстановок.

При вычислении интеграла вида

$$I = R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$$

Применение подстановок Эйлера часто приводит к грамозтким вычислениям.

Применяя к квадратному трехчлену метод выделения полного квадрата можно интеграл I свести к одному из трех возможных видов.

1. $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$
2. $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx$
3. $\int R\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right) dx$

В этих случаях применяется соответственно подстановки

1. $x = a \sin t \ ; \ a \cos t \ ; \ x = a \operatorname{th} t$

   $1 - \sin^2 x = \cos^2 x \ ; \ 1 + \cos^2 x = \sin^2 x \ ; \ 1 - \dfrac{\mathrm{sh}^2 t}{\mathrm{ch}^2 t} = \dfrac{\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t}{\mathrm{ch}^2 t}$

2. $x = \dfrac{a}{\cos t} \ ; \ x = a\mathrm{ch}t$

   $1 - \dfrac{1}{\cos^2 t} = \dfrac{\cos^2 t - 1}{\cos^2 t} - 1 = \mathrm{tg}^2 t \ ; \ \mathrm{ch}^2 t - 1 = \mathrm{sh}^2 t$

3. $x = a\mathrm{tg}t \ ; \ x = a\mathrm{sh}t$

   $1 + \mathrm{tg}^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t} \ ; \ 1 + \mathrm{sh}^2 t = \mathrm{ch}^2 t$

Пример. Вычислить интеграл.

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{(2x-1)\cdot\sqrt{4x^2+4x+5}} = \\
&= \left\{4x^2+4x+5=(2x+1)^2+4\right\} = \\
&= \int \frac{d\left(2x+1\right)}{(2x+1)\sqrt{(2x+1)^2+2^2}} = \{y=2x+1\} = \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y\sqrt{y^2+2^2}} = \left\{ \begin{array}{c} y=2\mathrm{tg}t \\ a=2 \\ dy=\dfrac{2dt}{\cos^2 t} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2}{2\mathrm{tg}t\sqrt{4\cdot(\mathrm{tg}^2 t+1)}}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t} = \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{\cos t\cdot dt}{\sin t\cdot\dfrac{1}{\cos t}\cdot\cos^2 t} = \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{\sin t dt}{\sin t\sin t} = \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{d\cos t}{1=\cos^2 t} = \{\cos t = z\} = \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{dz}{z^2-1} = \\
&= \frac{1}{8}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + c = \\
&= \frac{1}{8}\ln\left|\frac{\cos t-1}{\cos t+1}\right| + c = \\
&= \left\{ \cos t = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{y^2}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{2}{\sqrt{4x^2+4x+5}} \right\} = \\
&= \frac{1}{8}\ln\left|\frac{\dfrac{2}{\sqrt{4x^2+4x+5}}-1}{\dfrac{2}{\sqrt{4x^2+4x+5}}+1}\right| + c = \\
&= \frac{1}{8}\ln\left|\frac{2-\sqrt{4x^2+4x+5}}{2+\sqrt{4x^2+4x+5}}\right| + c
\end{aligned}
$$

2.8 Параграф №8. Определенный интеграл

2.8.1 Понятие определенного интеграла, геометрический смысл.

Пусть $y=f\left(x\right)$ определена на $[a,b]$.

Разобьем отрезок $[a,b]$ точками $\{x_i\}$; $i=\overline{1,n}$.

$a=x_0<x_2<x_3<\ldots<x_i<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$

Обозначим $\triangle x_i = x_{i+1}-x_i$; $i=\overline{0,n-1}$

На каждом элементарном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ выберем определенную точку $\xi \in [x_i, x_{i+1}]$.

Геометрически: изображаем систему прямоугольников.

Рассмотрим выражение: $f(\xi_i) \cdot \triangle x_i$- площадь прямоугольника с основанием $\triangle x_i$ и высотой $h_i = f(\xi_i)$. Конечная сумма $\sigma_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \triangle x_i$ называется интегральной суммой для функции $f(x)$, отвечающей разбиению x_i ; $i = \overline{1,n}$ отрезка $[a,b]$ и выбранному набору точек $\{\xi_i\}$; $n = \overline{0, n-1}$. Геометрический смысл σ_n - площадь заштрихованных прямоугольников. Обозначим $\lambda = max\{\lambda_i\}$; $i = \overline{0, n-1}$, где $\lambda_i = \triangle x_i$.

Определение. Если существует конечный предел при $n \longrightarrow \infty$; $\lambda \longrightarrow 0$ последовательность интегральных сумм σ_i независящих от способа зазбиения и выбора точек $\{\xi_i\}$; $i = \overline{0, n-1}$ то его называют определенным интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ и обозначают$\int\limits_a^b f(x)\,dx \overset{def}{\Longleftrightarrow} \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \triangle x_i$. $f(x)$- называется интегрированной на $[a,b]$.

Геометрический смысл: при $n \longrightarrow \infty$; $\lambda \longrightarrow 0$ стремящаяся функция переходит $f(x)$, a s системы прямоугольников $\longrightarrow$ к S криволинейной трапеции $ABCD$.

Так как $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow 0} \sigma_n = \int\limits_a^b f(x)\,dx = I$ a $f(x)$ называется интегрируема на $[a,b]$, то по определению предела в точке можем записать следующее: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)\ \forall \lambda\ |\lambda| < S \Longrightarrow |\sigma_n - I| < \varepsilon$.

Лемма. *Если $f(x)$ - интегрируема на $[a,b]$ то она ограночена на $[a,b]$.*

Доказательство. От противного. Пусть $\exists \int\limits_a^b$, но $f(x)$ - неограничена на $[a,b]$. Рассмотрим произвольное $n \in \mathbb{N}$ и разбиение x_i ; $i = \overline{0,n}$ отрезка $[a,b]$. При этом хотябы на 1ом отрезке, $[x_i, x_{i+1}]$ функция $f(x)$ неограничена. Интегральная сумма σ_n запишется в виде $\sigma_n = (f(\xi_0) \cdot \triangle x_0 + f(\xi_1) \cdot \triangle x_1 + \ldots + f(\xi_{i-1}) \cdot \triangle x_{i-1} + f(\xi_{i+1}) \cdot \triangle x_{i+1} + \ldots + f(\xi_{n-1}) \cdot \triangle x_{n-1}) + f(\xi_i) \cdot \triangle x_i$ -выражение в скобрах - конечная сумма, ее значение зафиксируем. так как $f(x)$неограничена, то $\xi \in [x_i, x_{i+1}]$ можно подобрать такое, что $f(\xi_i) \triangle x_i$ будет настолько большим, что σ_i примет значение превосходящее любое наперед-заданное число $\Longrightarrow \lim\limits_{\lambda \longrightarrow 0} \sigma_n$не существует и $f(x)$ не интегрируема. Обратное в общем случае не верно. ☐

Пример. Функция Дерихле $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathrm{Q} \cap [0;1] \\ 0, & x \in [0;1] \setminus \mathrm{Q} \end{cases}$ Заметим что для любого разбиения x_i

$\exists \{\xi_i'\}\ \xi_i' \in [x_i, x_{i+1}] \cap \mathrm{Q}\ \sigma_n' = \sum\limits_{i=0}^{n-1} D(\xi_i') \cdot \triangle x_i = 1 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n-1} \triangle x_i = b - a$

$\exists \{\xi_i''\}\ \xi_i'' \in [x_i, x_{i+1}] \setminus \mathrm{Q}\ \sigma_n'' = \sum\limits_{i=0}^{n-1} D(\xi_i') \cdot \triangle x_i = 0 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n-1} \triangle x_i = 0$

$\sigma_i' \neq \sigma_i''$

2.8.2 Суммы Дарбу.

Пусть функция $y = f(x)$ - ограничена на $[a,b]$. Рассмотрим разбиение точек $\{x_i\}$; $i = \overline{0,n}$ отрезка $[a,b]$.

Обозначим

$m_i = \inf f(x)$ на $[x_i, x_{i+1}]$; $i = \overline{0, n-1}$

$M_i = \sup f(x)$ на $[x_i, x_{i+1}]$; $i = \overline{0, n-1}$

Определение. Конечные суммы $s_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i \cdot \triangle x_i$, $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i \cdot \triangle x_i$ называются нижней и верхней суммами Дарбу для функции $f(x)$ отвечающие разбиению x_i отрезка $[a, b]$.

Геометрически, нижняя сумма Дарбу выражает площадь системы прямоугольников, лежащих внутри криволинейной тропеции $ABCD$, а S - площадь систем покрывающих трапеции $ABCD$ прямоугольника.

Так как $\forall \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$; $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$ то $s_n \le \sigma_n \le S_n$.

Лемма. (1) *При заданном разбиении $\{x_i\}$ суммы Дарбу s_n и S_n являются точными границами для интегральных сумм σ_n, зависящих от $\{\xi_i\}$.*

Доказательство. Докажем что $S = \sup\limits_{\{\xi_i\}} \sigma_n$.

(Используем основное свойство точных граней, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \sigma_n \ S - \varepsilon < \sigma_m \le S$)

Так как $M_i = \sup\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$ то $\exists \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ $M_i - \dfrac{\varepsilon}{b-a} < f(\xi_i) \Longrightarrow \sum\limits_{i=0}^{n-1} \left(M_i - \dfrac{\varepsilon}{b-a} \right) \cdot \triangle x_i < \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Longrightarrow \sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i \cdot \triangle x_i - \varepsilon \cdot \sum\limits_{i=0}^{n-1} \triangle x_i < \sigma_n$. □

Лемма. (2) *При добавлении точек в разбиение $\{x_i\}$ отрезка $[a, b]$ нижняя сумма Дарбу s_n не убывает, а верхняя не возрастает.*

Доказательство. Ограничимся случаем нижней суммы.

Рассмотрим разбиение $\{x_i\}$; $i = \overline{1, n}$ отвечающее s_n.

Добавим одну точку $x' \in [x_i, x_{i+1}]$.

Тогда в нижней сумме Дарбу s'_n соответствующее слагаемое примет вид: $\inf\limits_{[x_i, x'_i]} f(x) \cdot (x'_i - x_i) + \inf\limits_{[x'_i, x_{i+1}]} f(x) \cdot (x_{i+1} - x'_i) \ge m_i (x'_i - x_i + x_{i+1} - x'_i) = m_i \cdot \triangle x_i$ и оно не меньше соответствующего слагаемого в s_n. □

Лемма. (3) *Всякая нижняя сумма Дарбу не превосходит произвольную верхнюю сумму Дарбу, даже если они отвечают различным разбиениям.*

Утверждение. Пусть s' и S" - произвольные суммы, отвечающие различным разбиениям $\{x'_i\}$и $\{x''_i\}$. Докажем $s' \le S''$. Расмотрим новое разбиение $\{x_i\} = \{x'_i\} \cup \{x''_i\}$. Обозначим s и S - соответствующие разбиению суммы Дарбу. По Лемме 2 - $s' \le s \le S \le S'' \Longrightarrow s' \le S''$.

2.8.3 Критерии интегрирования функции.

Теорема. *(Необходимое и достаточное условие интегрируемости)*

Функция $y = f(x)$ интегрируема на $[a, b] \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow 0} (S - s) = 0$

Доказательство. Докажем необходимость и достаточность:

- (⇒)Необходимость.
- (⇐) Достаточность.

  Пусть $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} (S - s) = 0$, тогда

  т.к. $s \le I_* \le I^* \le S \implies 0 \le I^* - I_* \le S - s \implies I^* - I_* = 0 \Longleftrightarrow \exists I = I^* = I_*$.

Рассмотрим одну из интегральных сумм, отвечающих выбранному разбиению $\{x_i\}$, σ , $s \leq \sigma \leq S$.

т.к. $0 \leq |\sigma - I| \leq S - s \implies$ при $\lambda \longrightarrow 0 \implies \lim\limits_{\lambda \longrightarrow 0} (\sigma - I) = 0 \implies \exists \lim\limits_{\lambda \longrightarrow 0} \sigma = I = \int\limits_a^b f(x)\, dx$.

□

Замечание. Доказанные критерии можно сформулировать иначе.

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda \longrightarrow 0} (S - s) &= \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \left(\sum_{i=0}^{n-1} M_i \triangle x_i - \sum_{i=0}^{n-1} m_i \triangle x_i \right) = \\
&= \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) = \ldots = \\
&= \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \triangle x_i = 0
\end{aligned}$$

2.8.4 Классы интегрируемых функций.

Теорема. *Функции непрерывная на отрезкке интегрируема на нем.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ - непрерывна на отрезке $[a,b]$. $\implies$ по теореме Кантора, она равномерно тнепрерывна на нем.

Теорема Кантора:$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x', x'' \in [a,b]\ \ |x' - x''| < \delta \implies |f(x') - f(x'')| - \dfrac{\varepsilon}{b-a}$

$\left(\dfrac{\varepsilon}{b-a}\right)$ Будем рассматривать такие разбиения $\{x_i\}$ что $\lambda = \max\limits_i |\triangle x_i| < \delta$.

В этом случае $\forall i = \overline{0, n-1}$ колебания

$$\begin{aligned}
\omega_i &= M_i - m_i = \sup_{\triangle x_i} f(x) = -\inf_{\triangle x_i} f(x) = \{\text{2я теорема Вейштрассе}\} = \max_{\triangle x_i} f(x) - \min_{\triangle x_i} f(x) = \\
&= \{\exists x^*, x_* \in \triangle x_i\} = f(x^*) - f(x_*) < \frac{\varepsilon}{b-a}
\end{aligned}$$

$$0 \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \triangle x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \Sigma \triangle x_i = \varepsilon$$

□

Теорема. *Если функция $y = f(x)$ имеет лишь конечное число точек разрыва 1го рода на отрезке $[a,b]$, то $y = f(x)$ - интегрируема на $[a,b]$.*

Доказательство. Будем рассматривать разбиения $\{x_i\}$ отрезка $[a,b]$ причем получаемые элементарные отрезки $[x_i, x_{i+1}]$ разобьем на 2 группы:

1я - покрывающая точкиразрыва

2я - покрывающая оттальные отрезки

$\sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \triangle x_i = \Sigma' \omega_i \triangle x_i + \Sigma'' \omega_i \triangle x_i$. (“”’ - точки разрыва, “”” - остальное)

$$\Sigma'\omega_i\triangle x_i \le \left\{ \begin{array}{c} \omega_i = M_i - m_i \le M - m \\ \text{где } M = \sup\limits_{[a,b]} f(x) \\ m = \inf\limits_{[a,b]} f(x) \\ \lambda = \max \triangle\acute{x}_i < \dfrac{\varepsilon}{(M-m)\cdot 2\cdot k} \\ \text{где } k \text{ — количество точек разрыва} \end{array} \right\} = \ldots$$ □

Теорема. *Функция, монотонная на отрезке, интегрируема на нем.*

....

2.8.5 Свойства определенного интеграла.

1. $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$

   Доказательство. $\forall\triangle x_i = 0$ □

2. Если $f(x)$ - интегрируема на $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$

   Доказательство. $\forall$ращбиения $\{x_i\}$отрезка $[a,b]$

   $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$

   Интегрируема сумма для $\int\limits_b^a f(x)\,dx$

   $\sigma_a = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\triangle x_i$

   для $\int\limits_a^b f(x)\,dx$:

   .... □

3. $\int\limits_b^a dx = b - a$

   Доказательство. $f(x) \equiv 1 \Longrightarrow \forall\{x_i\}\{\xi_i\}$

   $\sigma = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\triangle x_i = \sum\limits_{i=0}^{n-1}\triangle x_i = b - a$ □

4. Если $f(x)$ интегриркема на $[a,b]$ то $\forall k \in \mathbb{R}$ функция $y = k\cdot f(x)$ - интегрируема на $[a,b]$, причем $\int\limits_b^a k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int\limits_b^a f(x)\,dx$

   Доказательство. Рассмотрим равенство:

   $\sum\limits_{i=0}^{n-1} k\cdot f(\xi_i)\triangle x_i = k\cdot\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\triangle x_i$ □

5. Если $f(x)$ и $g(x)$ - интегрируема на $[a,b]$, то $f(x) \pm g(x)$- также интегрируема на $[a,b]$, причем
$\int\limits_b^a (f(x) \pm g(x))\,dx = \int\limits_b^a f(x)\,dx \pm \int\limits_b^a g(x)\,dx$

Доказательство. $\sum\limits_{i=0}^{n-1} (f(\xi_i) \pm g(\xi_i)) \triangle x_i = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \triangle x_i \pm \sum\limits_{i=0}^{n-1} g(\xi_i) \triangle x_i$ ☐

6. Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то $\forall c \in [a,b]$ $\exists \int\limits_a^c f(x)\,dx$, $\int\limits_c^b f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$

Доказательство. Пусть $f(x)$ имеет на $[a,b]$ $c \in [a,b]$ - произвольная точка.

Будем рассматривать такие разбиения $\{x_i\}$, котоорые включают точку с.

Тогда часть $\{x_i'\}$ и другая часть $\{x_i''\}$ такие что $\{x_i'\} \cup \{x_i''\} = \{x_i\}$, причем $\sum\limits_i \omega_i \triangle x_i = \Sigma' \omega_i \triangle x_i + \Sigma'' \omega_i \triangle x_i$

Так как $\begin{array}{c} 0 \le \Sigma'' \omega_i \triangle x_i \le \sum\limits_i \omega_i \triangle x_i \\ 0 \le \Sigma' \omega_i \triangle x_i \le \sum\limits_i \omega_i \triangle x_i \end{array} \Longrightarrow \exists \int\limits_a^c f(x)\,dx$

Равенство получается предельнывм переходом при $\lambda \longrightarrow 0$ в следующем равенстве.

$\sum\limits_i f(\xi_i) \triangle x_i = \Sigma' f(\xi_i) \triangle x_i + \Sigma'' f(\xi_i) \triangle x_i \Longrightarrow \int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$ ☐

7. Пусть $f(x) \ge 0$ на $[a,b]$ и $f(x)$ - интегрииируема на $[a,b]$, тогда $\int\limits_a^b f(x)\,dx \ge 0$

Доказательство. Рассмотрим интегральную сумму.

$\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \triangle x_i \ge 0 \; \forall \{x_i\} \forall \{\xi_i\} \Longrightarrow \int\limits_a^b f(x)\,dx \ge 0$ ☐

- Следствие

  Если $f(x) \le 0$ на $[a,b]$ и $f(x)$ - интегрируема на $[a,b]$ то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \le 0$

  Доказательство. $g(x) = -f(x) \ge 0 \Longrightarrow \int\limits_a^b g(x)\,dx \ge 0$ ☐

8. Если $f(x)$ и $g(x)$ - интегрируемы на $[a,b]$ и $f(x) \ge g(x)$ на $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \ge \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Доказательство. $h(x) = f(x) - g(x) \ge 0$

$\int\limits_a^b h(x)\,dx \ge 0 \Longrightarrow \int\limits_a^b (f(x) - g(x))\,dx \ge 0$ ☐

9. Если $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$, $f(x)$ - интегрируема на $[a,b]$ и $f(x) \neq 0$ то $\exists c > 0$ $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq c$

   Доказательство. Пусть $f(x) \neq 0$ на $[a,b]$ тогда $\exists x_0$ $f(x_0) = k > \frac{k}{2} > 0 \implies$ по теореме о сохранении знака $\implies \exists U_\varepsilon(x_0)$ что непрерывная функция $y = f(x) - \frac{k}{2}$ будет положительна в этой окрестногсти $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \implies$

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b f(x)\,dx &= \{6^o\} = \int\limits_a^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{x_0+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \geq \\ &\geq \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\,dx \geq \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \frac{k}{2}dx = \frac{k}{2}\cdot 2\varepsilon = k\varepsilon = c\end{aligned}$$

   □

   - Следствие

     Если $f(x) \geq 0$ и непрерывна на $[a,b]$ и $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$ то $f(x) \equiv 0$.

10. Если $f(x)$ - интегрируема на $[a,b]$ то $y = |f(x)|$ - так же интегрируема на $[a,b]$, причем $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$

    Доказательство. Рассмотрим функции $y = f(x)$ и $y^* = |f(x)|$.

    Так как $\forall x', x''$ $||f(x')| - |f(x'')|| \leq |f(x') - f(x'')|$ $\{||a| - |b|| \leq |a-b|\} \implies$

    Обозначим ω_i - колебания функции $y = f(x)$ на $[x_i, x_{i+1}]$

    Обозначим ω_i^* - колебания функции $y^* = |f(x)|$ на $[x_i, x_{i+1}]$

    $\omega_i^* \leq \omega_i \implies 0 \leq \sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i^*\triangle x_i \leq \sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i\triangle x_i \implies \exists\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ - Это мы доказалди существание.

    Так как $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ то $-\int\limits_a^b |f(x)|\,dx \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq \int\limits_a^b |f(x)|\,dx \implies$ $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ □

11. Если $f(x)$ - интегрируема на $[a,b]$ и $m \leq f(x) \leq M$ $\forall x \in [a,b]$ то $m\cdot(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq M\cdot(b-a)$

    Доказательство. $\int\limits_a^b m dx \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq \int\limits_a^b M dx$ □

12. Теорема о средрем.

Теорема. *Если* $f(x)$*- интегрируема на* $[a,b]$ *и* $m \le f(x) \le M$ $\forall x \in [a,b]$ *то* $\exists \mu \in [m,M]$ $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \mu \cdot (b-a)$

Доказательство. $11^o : m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$

$$m \le \frac{\int\limits_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le M$$

Обозначим $\mu = \dfrac{\int\limits_a^b f(x)\,dx}{b-a} \in [m,M]$ ☐

Замечание. Если $f(x)$ - нгепрерывна на $[a,b]$ то $\forall \mu \in [m,M]$ $\exists c \in [a,b]$ $f(c) = \mu \Longrightarrow$

Получим - Если $f(x)$ - непрерывна на $[a,b]$ то $\exists c \in [a,b]$ $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b-a)$

13. Обобщенная теорема о среднем.

Теорема. *Если* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы на* $[a,b]$, $m \le f(x) \le M$, $g(x) \ge 0$ $\forall x \in [a,b]$ *тогда* $\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu \int\limits_a^b g(x)\,dx$*(***) где* $\mu \in [m,M]$.

Доказательство. Рассмотрим 2 случая:

- $\int\limits_a^b g(x)\,dx = 0 \implies g(x) \equiv 0 \implies$ равенство (***) будет иметь вид $0 = 0$.
- $\int\limits_a^b g(x)\,dx > 0 \implies m \cdot g(x) \le f(x)\,g(x) \le M \cdot g(x)$

  Проинтегрируем и получится $m\int\limits_a^b g(x)\,dx \le \int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx \le M\int\limits_a^b g(x)\,dx$

  $$m \le \mu = \frac{\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int\limits_a^b g(x)\,dx} \le M$$

☐

2.8.6 Интеграл с переменным верхним пределом. Понятия, свойтсва.

Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$

Определение. Тогда по свойству 6^o $\forall x \in [a,b]$ $\exists \int\limits_a^x f(t)\,dt$, его называпют интегралом с переменным верхним пределом.

Обозначим $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt = \int\limits_a^x f(x)\,dx$ $x \in [a,b]$.

Теорема. (1) *Если $f(x)$ - интегрируема на $[a,b]$, то функция $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ - непрерывна на $[a,b]$.*

Доказательство. Тога соответствующее приращение функции $F(x)$ равно

$$\begin{aligned}\triangle F(x) &= F(x+\triangle x)-F(x)=\int\limits_a^{x+\triangle x} f(t)\,dt-\int\limits_a^{x} f(t)\,dt=\\ &= \int\limits_a^{x} f(t)\,dt+\int\limits_x^{x+\triangle x} f(t)\,dt-\int\limits_a^{x} f(t)\,dt=\\ &= \int\limits_a^{x} f(t)\,dt=\left\{\begin{array}{c} f(t)-\text{интегрируема}\Longrightarrow\\ \text{она ограничена } m\le f(t)\le M\\ \text{теорема о среднем } \exists\mu\in[m,M]\end{array}\right\}=\\ &= \mu\cdot\int\limits_x^{x+\triangle x} dx=\mu\cdot\triangle x\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \lim\limits_{\triangle x\longrightarrow 0}\triangle F(x)=0 \Longrightarrow F(x)$ - имнтегрируема. $\square$

Теорема. (2) *Если $f(x)$ - непрерывна на $[a,b]$, то $F(x)$ дифференцируема на $[a,b]$. Причем $F\prime(x)=f(x)\ \forall x\in(a,b)$.*

Доказательство. Рассмотрим $\triangle F(x)$:

$$\begin{aligned}\triangle F(x) &= F(x+\triangle x)-F(x)=\\ &= \int\limits_x^{x+\triangle x} f(t)\,dt=\left\{\begin{array}{c}\text{По теореме о среднем}\\ \exists c\in(x;x+\triangle x)\end{array}\right\}=\\ &= f(c)(x+\triangle x-x)\end{aligned}$$

Рахделим на $\triangle x$: $\dfrac{\triangle F(x)}{\triangle x}=\dfrac{f(c)\triangle x}{\triangle x}=f(c)$

При $\triangle x\longrightarrow 0,\ c\longrightarrow 0\ \Longrightarrow \exists\lim\limits_{\triangle x\longrightarrow 0}\dfrac{\triangle F(x)}{\triangle x}=\lim\limits_{c\longrightarrow x}\dfrac{f(c)\triangle x}{\triangle x}=f(x)$, используя непрерывность $y=f(x)$ на $[a,b]$ и предельным переходом $\Longrightarrow\ f(x)=F'(x)$. $\square$

Замечание. Из теоремы следует, что $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ - одна из первообразных функции $f(x)$ на $[a,b]$.

2.8.7 Основная формула интегрального вычисления.

Любая первообразная $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Тогда $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt+c$, причем $\begin{array}{l}F(b)=\int\limits_a^b f(t)\,dt+c\\ F(a)=\int\limits_a^a f(t)\,dt+c\end{array}$

$$\int\limits_a^b f\left(t\right)dt = F\left(b\right) - F\left(a\right) = F\left(x\right)|_a^b \tag{10}$$

(10) - Формула Ньютона-Лейбница.

2.8.8 Метод замены переменной в интеграле.

Теорема. *Пусть* $f\left(x\right)$ *- неепрерывна на* $[a, b]$, $x = \varphi\left(x\right)$, *причем:*

1. $\varphi\left(t\right)$ *- непрерывна на* $[\alpha, \beta]$, $E\left(\varphi\right) = [a, b]$
2. $\varphi\left(\alpha\right) = a,\ f\left(\beta\right) = b$
3. $\varphi'\left(t\right)$ *- непрерывна на* $[\alpha, \beta]$, *тогда* $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx = \int\limits_a^b f\left(\varphi\left(t\right)\right)dt$

Доказательство. Пусть $F\left(x\right)$ - одна из первообразных $f\left(x\right),\ x \in [a, b]\,$, то $F\left(\varphi\left(x\right)\right)$ - первообразная $f\left(\varphi\left(t\right)\right)\varphi'\left(t\right) \Longrightarrow \int\limits_a^b f\left(x\right)dx = F\left(x\right)|_a^b = F\left(b\right) - F\left(a\right)$.

$\int\limits_\alpha^\beta f\left(\varphi\left(t\right)\right)\varphi'\left(t\right)dt = F\left(\varphi\left(t\right)\right)|_\alpha^\beta = F\left(\varphi\left(\beta\right)\right) - F\left(\varphi\left(\alpha\right)\right) = F\left(a\right) - F\left(b\right)$ □

2.8.9 Метод интегрирования по частям.

Теорема. *Пусть* $u\left(x\right)$ *и* $v\left(x\right)$, *на* $[a, b]$ *имеют непрерывняе производные, тогда* $\int\limits_a^b u\left(x\right)v'\left(x\right)dx = u\left(x\right)v\left(x\right)|_a^b - \int\limits_a^b u'\left(x\right)v\left(x\right)dx \Longrightarrow$

$$\int\limits_a^b udv = uv|_a^b - \int\limits_a^b vdu \tag{11}$$

Доказательство. Так как $u\left(x\right)v\left(x\right)$ - первообразная для $u'\left(x\right)v\left(x\right) + u\left(x\right)v'\left(x\right)$, то по основной формуле $\int\limits_a^b \left(u'\left(x\right)v\left(x\right) + v'\left(x\right)u\left(x\right)\right)dx = u\left(x\right)v\left(x\right)|_a^b$ следует и (11). □

2.9 Параграф №9. Приложение определенного интеграла.

2.9.1 Понятие площади. Квадрируемые области и их свойства.

Определение. Многоугольной облостью на плоскости называют многоугольниклибо конечное обьеденение многоугольников не имеющих общих точек.

Рассмотрим произвольную фигуру (P) с границей (K) - контуром фигуры (P). Если $(K) \subset (P)$, то фигура (P) называется замкнутой. (P) содержит все свои граничные точки.

Будем рассматривать все возможные прямоугольники (A) - покрываемые областью (P), тоесть $(A) \subseteq (P)$ и многоугольник (B), содержащий в себе фигуру (P). $(P) \subseteq (B)$

Так как $\forall\,(A)$и(B) $(A) \subseteq (B)$, то для их площадей $S_{(A)} = A,\ S_{(B)} = B \implies A < B \implies$

$$\left.\begin{array}{l}\exists \sup A = P_* \\ \exists \inf B = P^*\end{array}\right]$$

Числа P_* и P^* - это внутренная и внешная площадь фигуры (P), причем $P_* \leq P^*$

Определение. Если $P_* = P^*$, то говорят, что (P) - квадрируема(имеет площадь), и её площадь равна $P^* = P_* = S$.

Лемма. (1) *Фигура* (P) *- квадрируема* $\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists\,(A)\,,(B)\ \ B - A < \varepsilon$

Доказательство. " $\implies$ " Пусть (P) - квадрируема $\implies P_*\,\{= \sup A\} = P^*\,\{= \inf B\} = P \implies$ по основному свойству точных граней

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\,(A)\ \ P_* - \frac{\varepsilon}{2} \leq A \leq P_*$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\,(B)\ \ P^* \leq B \leq P^* + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\implies P_* - \frac{\varepsilon}{2} \leq A \leq P_* = P^* \leq B \leq P^* + \frac{\varepsilon}{2} \implies B - A < P^* + \frac{\varepsilon}{2} - P_* + \frac{\varepsilon}{2} \implies B - A < \varepsilon$$

" $\impliedby$ " Так как $\forall \varepsilon > 0\ \exists\,(A)\,,(B)\ :\ \ B - A < \varepsilon$ и при этом $A \leq P_* \leq P^* \leq B \implies P^* - P_* \leq B - A \leq \varepsilon \implies P^* - P_* < \varepsilon \implies P^* = P_* = P$ ☐

Определение. Квивая (K) имеет нуливую площадь, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists\,(C)$ - многоугольник, покрывающий (K) площади $C < \varepsilon$.

Лемма. (2) *Фтигура (P) квадрируема тогда и только тогда когда контур (K) фигуры (P) имеют нуливую площадь.*

Доказательство. Необходимость. Пусть фигура (P) квадрируема $\implies$ по Лемме (1) $\implies \forall \varepsilon > 0\ \exists\,(A)\,,(B)\ :\ (B) - (A)$ - многоугольние, покрывающий (K) площадь $C = B - A < \varepsilon$

Достаточность. Пусть (K) - нулевой площади $\implies \forall \varepsilon > 0\ \exists$ многоугольник (C) покрывающий (K) ,$C < \varepsilon$. ☐

Замечание. Внутри многоугольника (C) находится многоугольник (A), причем $(B) = (A) \cup (C)$. $(A) \cap (C) = \emptyset \implies \ldots$

Пример. Контур (K) $=\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f\,(x)\,,\ f\,(x)\ -$ непрерывна на $[a, b]\,,\ x \in [a, b]\}$

Докажем что K=0.

Разобьем отрезок $[a, b]$ точками $\{x_i\}\ :\ a < x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$

$$m_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f\,(x) = \min_{[x_i, x_{i+1}]} f\,(x)\,;\ M_i = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f\,(x) = \max_{[x_i, x_{i+1}]} f\,(x)$$

Рассмотрим суммы $s = \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i \triangle x_i;\ S = \sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i \triangle x_i;\ \triangle x_i = x_{i+1} - x_i\ ,\ i = \overline{0, n-1}\ ;\ \lambda = \max\limits_{i=\overline{0,n-1}} \triangle x_i$

Контур (K) покрывает многоугольную область (C), состоящую из прямоугольников суммарной площадью $C = S - s = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \triangle x_i$

Так как $f\,(x)$ - непрерывна на $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на этом же отрезке.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta\,(\varepsilon)\ \forall x', x'' \in [a, b]\ \ |x' - x''| < \delta \implies |f\,(x') - f\,(x'')| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

При $\lambda \longrightarrow 0$ можно добиться $\lambda < \delta \implies \omega_i = M_i - m_i = f\,(x_i^*) - f\,(x_{i*})$

$$\omega_i < \frac{\varepsilon}{b - a}\ \forall i = \overline{0, n-1} \implies$$

$$C < \frac{\varepsilon}{b - a} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \triangle x_i = \varepsilon \implies C < \varepsilon$$

Лемма. *(3) Если фигура (P) ограничена контуром* $(K) = (K_1) \cup (K_2) \cup \ldots \cup (K_n)$ *, где* (K_i) *- непрерывная кривая, то (P) - квадрируема.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ - произвольное. Так как (K_i) - непрерывна, то по рассмотренному примеру $K_i < \frac{\varepsilon}{n}\ \forall i = \overline{0, n}$. Так как площадь контура $K = K_1 + K_2 + \ldots + K_n < n \cdot \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon \implies$ по Лемме (2) (P) - квадрируема. ☐

Из Леммы (1) следуют утверждения:

Лемма. *(4) Фигура (P) квадрируема тогда и только тгда когда существует последовательность покрывающих многоугольников и последорвательность покрывающих многоугольников* $(\exists \{(A_n)\}\ \exists \{(B_n)\})$ *так же что* $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} A_n = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} B_n = P$

Лемма. *(5) Фигура (P) - квадрируема* $\iff \exists \{(Q_n)\}$ *- покрываемых (P) и* $\{(R_n)\}$ *покрывающая (P) квадрируемых фигур таких что* $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} Q_n = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} R_n = P$

2.9.2 Выражение пложади интеграла.

Пусть $y = f(x) > 0\ x \in [a, b],\ f(x)$ - непрерывная функция. Решим задачу нахождения площади криволинейной трапеции $ABCD$, ограниченой линиями:

$x = a,\ x = b,\ y = 0,\ y = f(x)$

$(K_1) \cup (K_2) \cup (K_3) \cup (K_4) = (K)$ - контур нулевой площади $\Longrightarrow$ {Лемма (3)} $\Longrightarrow (ABCD)$-квадрируема.

Составим сумму Дарбу $s = \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i \triangle x_i$; $S = \sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i \triangle x_i$, $\{x_i\}$ - разбиение $\triangle x_i = x_{i+1} - x_i$; $\lambda = \max\limits_i \triangle x_i$

s - площадь покрывающего многоугольника

S- площадь покрываемого многоугольника

При $\lambda \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow \infty$ в слу интгрируемости функции $f(x)$ на $[a, b]$ (так как $f(x)$-непрерывна)

$\exists \lim\limits_{n \longrightarrow \infty\ (\lambda \longrightarrow 0)} = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty\ (\lambda \longrightarrow 0)} S = \{\text{МыопераемсянаЛемму}(4)\} = S_{ABCD}$

С другой стороны их общий предел равен $\int\limits_a^b f(x)\,dx\ \ S_{ABCD} = \int\limits_a^b f(x)\,dx$

Полученную формулу можно применять для нахождения фугуры ограниченых линиями $x = a,\ x = b,\ y = f_1(x),\ y = f_2(x),\ f_2(x) > f_1(x)$

$S_{KBCL} = S_{ABCD} - S_{AKLD} = \int\limits_a^b f_2(x)\,dx - \int\limits_a^b f_1(x)\,dx = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx$

2.9.3 Вычисение площадей криволинейных секторов.

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$r = r(\varphi)$

Рассмотрим криволинейный сектор, ограниченный линиями:

$\varphi = \alpha,\ \varphi = \beta,\ (\alpha < \beta)$

$r = r(\varphi),\ \varphi \in [\alpha, \beta]$

Разобьем отрезок $[\alpha, \beta]$ точками $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_i < \ldots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta$.

Обозначим

$m_i = \min\limits_{[x_i, x_{i+1}]} r(\varphi)$

$M_i = \max\limits_{[x_i, x_{i+1}]} r(\varphi)$

Площадь сектора $S_\psi \frac{1}{2} r^2 \psi$

Площадь обращованной покрываемой фигуры - это объеденение секторов раиуса m_i, раствора $\triangle\varphi_i \cdot \varphi_{i+1} - \varphi_i \implies \frac{1}{2}\sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i^2 \triangle\varphi_i$ - max сума Дарбу S_n для функции $\frac{1}{2} r^2(\varphi)$

Площадь образованных покрывающих фигуры ..... $\frac{1}{2}\sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i^2 \triangle\varphi_i = S_n$

Так как $r(\varphi)$ - непрерывна, то $r^2(\varphi)$ - непрерывна. $\implies$ интегрируема на $[\alpha, \beta]$

$\lim\limits_{\lambda \longrightarrow 0} s_n = \lim\limits_{\lambda \longrightarrow 0} S_n = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)\, d\varphi$

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)\, d\varphi$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченой кардиоидой.

Уравнение кардиоиды: $r = a(1 + \cos\varphi)$

$S = 2 \cdot \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi (a(1 + \cos\varphi))\, d\varphi = \int\limits_0^\pi \left(1 + 2\cos\varphi + \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi = a^2 \left(\varphi + 2\sin\varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)|_0^\pi = \frac{3\pi}{2} a^2$

2.9.4 Вычисление обьемов.

Рассмотрим в 3хмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ тело (V), ограниченое поверхностью (S) - граница тела (V). Рассмотрим всевозможные многогранники (X), обьема X, содержащиеся в теле (V), и многогранники (Y) обьема Y, содержащие (V) внутри себя.

Если существуют и равны величины

$V_* = \sup(X)$

$V^* = \inf(X)$, то значение $V = V^* = V_*$ зазывается обьемом (V), а тела (V) - кубируемым.

Самостоятельно сформулировать и доказать свойства кубируемых тел, аналогичные свойствам квардируемых фигур.

Рассмотрим 3 разных случая, связанных с нахождением обьема куриураемых фигур.

2.9.4.1 Вычисление обьема цмлиндрических тел. Рассмотри тело (V) цилиндрической формы. В основании которой квадрируемая фигура (P) площади P, образущая(высотой) h.Так как P квадрируема то существует последовательность $\{(A_n)\}$ а также существует поверхность покрывающих многоугольников $\{(B_n)\}$ таких что $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} A_n = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} B_n = P$ (Лемма 4), поэтому рассматривая призмы с основании (A_n) и (B_n) высоты h - это многогранники, содержащиеся в (V) и содержащие (V) соотвесттвенно получим: $\exists \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} X_n = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} A_n \cdot H = PH$ и $\exists \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} Y_n = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} B_n \cdot H = PH \implies$ {По аналогичной лемме 4, которую надо было даказать} $\implies V = P \cdot H$.

2.9.4.2 Вычисление обьемов тел через поперечное сечение. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ тело (V), заключенное между плоскостями $x = a,\ x = b$.

Замечание. Картинка тут должна быть.

Будем считать, что сечение $(S\left(x'\right))$ - квадрируемая фигура площади $S\left(x'\right)$, получаемая в пересечении нашего тела (V) и плоскости $x = x',\ x' \in [a,b]$. ПАредположим в дальнейшем что площадь $S\left(x\right)$ - непрерывная функция на окрезке $[a,b]$, и $\forall x', x'' \in [a,b]$ проэкции $(S_p\left(x'\right))$ и $(S_p\left(x''\right))$ соответствующих сечений на координатную плоскость связаны одним из соотношений: либо $(S_p\left(x'\right)) \subseteq (S_p\left(x''\right))$, либо $(S_p\left(x''\right)) \subseteq (S_p\left(x'\right))$.

Замечание. Комментарий автора: Это впринципе неправильно по моему мнению, но тут главное чтобы вы поняли суть.

Разобьем $[a,b]$:
$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$
Разобьем значения $S\left(x_i\right)$
$m_i = \inf\limits_{[x_i;x_{i+1}]} S\left(x\right) = \min\limits_{[x_i;x_{i+1}]} S\left(x\right)$
$M_i = \sup\limits_{[x_i;x_{i+1}]} S\left(x\right) = \max\limits_{[x_i;x_{i+1}]} S\left(x\right)$
Это все по теореме Вейштрассе.
Обозначим $\lambda = \max\limits_{i=\overline{0,n-1}} \triangle x_i$; $\triangle x_i = x_{i+1} - x_i$

Тогда s=$\sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i \triangle x_i,\ S = \sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i \triangle x_i$ - нижняя и верхняя суммы Дарбу для интеграла $I = \int\limits_a^b S\left(x\right)dx$, к которому они сходятся при $\lambda \longrightarrow \infty$.

Заметич что $m_i \triangle x_i$ - обьем цилиндра заключенного между плоскостями $x = x_i$и $x = x_{i+1}$, находящегося внутри $(V) \implies S$ - обьем кубированного тела внутри (x_n) внутри V. S - обьем кубтрованного ткла содержащегося внутри тела (V).

Так как при этом $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} X_n = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} Y_n$, то по Лемме 5 (которую надо было даказать) $V = \int\limits_a^b S\left(x\right)dx$.

Пример. Вычислить обьем тела, ограниченные поверхностями: $x^2 + y^2 = R^2$ и $z^2 + x^2 = R^2$.
Изобразим часть тела в первом октантеь$(x, y, z \geq 0)$.

Замечание. Ну когда нить (может быть и никогда) должен быть рисунок.

Изменяем x в пределах от 0 до R, получим: $(S\left(x\right)) = ABCD\left\{\text{это квадрат}\right\},\ AB = AD = \sqrt{R^2 - x^2}$

Его площадь $S\left(x\right) = R^2 - x^2 \implies V = \int\limits_0^R S\left(x\right)dx = \int\limits_0^R \left(R^2 - x^2\right)dx = \left(R^2 \cdot x - \dfrac{x^3}{3}\right)|_0^R = R^3 - \dfrac{R^3}{3} = \dfrac{2R^3}{3}$

2.9.4.3 Вычисление обьемов фигур вращения. Пусть $y = f\left(x\right) > 0\ \forall x \in [a,b]$, кроме того $f\left(x\right)$ -непрерывна на $[a,b]$.

Рассмотрим тело (V), ограниченное поверхностью, получаемой вращением графика $y = f\left(x\right)$, относительно оси Ox и плоскостями $x = a$ и $x = b$. Так как в сечении тела (V) плоскостью $x = x'$ является круг радиуса $f\left(x'\right)$, то $S\left(x'\right) = \pi \cdot f\left(x'\right)$ и $V = \pi\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$.

Пример. Вычислить обьем шара радиуса R

Поверхность шара - поверхность вращения графика функции $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [-R, R] \Longrightarrow$
$V = \pi \int\limits_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\, dx = \pi \cdot \left(R^2 \cdot x - \dfrac{x^3}{3} \right) |_{-R}^{R} = \pi \left(\left(R^3 - \dfrac{R^3}{3} \right) - \left(-R^3 + \dfrac{R^3}{3} \right) \right) = \dfrac{4}{3} \pi R^3.$

2.9.5 Понятие длинны дуги.

Рассмотрим на плоскости кривую AB, заданную параметрически:

$$\begin{cases} x = \varphi\,(t) \\ y = \psi\,(t) \end{cases}, \ t \in [t_0; \tau] \tag{12}$$

В (12) $\varphi\,(t)$ и $\psi\,(t)$ непрерывны на $[t_0; \tau]$. дуга $\overset{\smile}{AB}$ не имеет точек пересечений.

Разобьем отрезок $[t_0; \tau]$ точками $t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \tau$.

Получим точки $M_i\,(\varphi\,(t_i)\,, \psi\,(t_i))$.

Ломаная $AM_1M_2 \ldots M_i \ldots M_{n-1}M_nB$ называемой ломаной, вписанной в дугу $\overset{\smile}{AB}$.

Определение. Если $\exists \lim\limits_{n \longrightarrow \infty,\ \lambda = \max\limits_{i} |M_iM_{i+1}|} P_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} |M_iM_{i+1}|$ не азвисящих от способа разбиения $\{t_i\}$, то его называют длинной дуги $\overset{\smile}{AB}$, а дуга $\overset{\smile}{AB}$ называется спрямляемой.

2.9.6 Выражение длинны дуги определенным интегралом.

Теорема. *Если функции $\varphi\,(t)$ и $\psi\,(t)$ непрерывны на $[a, b]$ вместе со своими производными, то кривая (AB), определяемая соотнощением спрямляемая и ее длинна вычисляется по формуле*

$$l = \int\limits_{t_0}^{\tau} \sqrt{\varphi'^2\,(t) + \psi'^2\,(t)} dt \tag{13}$$

Доказательство. $t_0 < t_1 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n = \tau$

$A = M_0 \ldots M_n = B$

$\varphi\,(t_i) = x_i,\ \psi\,(t_i) = y_i,\ i = \overline{0, n}$

$\triangle x_i = x_{i+1} - x_i,\ \triangle y_i = y_{i+1} - y_i,\ i = \overline{0, n}$

$$\begin{aligned}
|M_iM_{i+1}| &= \sqrt{(\triangle x_i)^2 + (\triangle y_i)^2} = \sqrt{\left(\varphi\,(t_{i+1}) - \varphi\,(t_i)^2 + (\psi\,(t_{i+1}) - \psi\,(t_i))^2\right)} = \\
&= \left\{ \begin{matrix} \text{Теорема Логранджа} \\ \exists \tau_i \in (t_i, t_{i+1}) \\ \exists \tau_i^* \in (t_i, t_{i+1}) \end{matrix} \right\} = \\
&= \sqrt{(\varphi\prime\,(\tau_i) \cdot \triangle t_i)^2 + (\psi\prime\,(\tau_i^*) \cdot \triangle t_i)^2} = \\
&= \sqrt{\varphi^2\prime\,(\tau_i) + \psi^2\prime\,(\tau_i^*)} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow\ p_n = \sum_{i=0}^{n-1} M_iM_{i+1} = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\varphi^2\prime\,(\tau_i) + \psi^2\prime\,(\tau_i^*)} \triangle t_i
\end{aligned}$$

Рассмотрим интегральную сумму $\sigma_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \sqrt{\varphi^2\prime\,(\tau_i) + \psi^2\prime\,(\tau_i^*)} \triangle t_i$ для этого интеграла.

Докажем что $\lim\limits_{\lambda\longrightarrow 0}|p_n-\sigma_n|=0$

$$\begin{aligned}
|p_n-\sigma_n|\leq ||\Sigma|\leq\Sigma\,|\cdot|| &\leq \sum_{i=0}^{n-1}\left|\sqrt{\varphi^{2}\prime(\tau_i)+\psi^{2}\prime(\tau_i^*)}-\sqrt{\varphi^{2}\prime(\tau_i)+\psi^{2}\prime(\tau_i)}\right|\triangle t_i=\leq\\
&\leq \left\{\sqrt{a^2+b_1^2}-\sqrt{a^2-b^2}=\frac{b_1-b}{\sqrt{a^2+b_1^2}+\sqrt{a^2+b^2}}\left(b_1-b\right)\right\}\leq\\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1}\left|\psi\prime(\tau_i)-\psi\prime(t_i^*)\right|\triangle t_i
\end{aligned}$$

Так как функция $\psi\prime(t)$ - непрерывная на $[a,b]$, то по теореме Кантора, она равномерно непрерывна

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)\ \forall t',t''\in[t_0,\tau]\ \ |t'-t''|<\delta\implies|\psi\prime(t')-\varphi\prime(t')|<\dfrac{\varepsilon}{\tau-t_0}$

Так как $\lambda\longrightarrow 0$ то выбираем $\lambda<\delta\implies$

$|p_n-\sigma_n|\leq\sum\limits_{i=0}^{n-1}\dfrac{\varepsilon}{\tau-t_0}\triangle t_i=\dfrac{\varepsilon}{\tau-t_0}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\triangle t_i=\tau-t_0=\varepsilon$

То тогда $\lim\limits_{\lambda\longrightarrow 0}\sigma_n=l$,то $\lim\limits_{\lambda\longrightarrow 0}p_n=\lim\limits_{\lambda\longrightarrow 0}\sigma_n=l$ □

Пример. Вычислить длинну циклоиды

$\begin{cases}x=a\left(t-\sin t\right)\\ y=a\left(1-\cos t\right)\end{cases};\ t\in[0;2\pi]$

$t=0\implies M_0\left(0;0\right)=A$

$t=2\pi\implies B\left(2\pi a;0\right)$

$t\in[0,\pi]$

$x\prime=a\left(1-\cos t\right)\geq 0\ x\left(t\right)\nearrow$

$y\prime=a\cdot\sin t\geq 0\ y\left(t\right)\nearrow$

$t\in[\pi;2\pi]$

$x\prime\geq 0\ x\left(t\right)\nearrow$

$y\prime\leq 0\ y\left(t\right)\swarrow$

$$\begin{aligned}
l &= \int\limits_0^{2\pi}\sqrt{a^2-2\cos t+\cos^2 t+a^2\cdot\sin^2 t}dt=a\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2\left(1-\cos t\right)}dt=2a\int\limits_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=4a\int\limits_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}dt\\
&= 4a\left(-2\cos\frac{t}{2}\right)|_0^{\pi}=\\
&= -8a\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)=8a
\end{aligned}$$

Замечание. В случае когда кривая AB задана явно $y=f\left(x\right),\ x\in[a,b]$, где $f\prime(x)$ - непрерывна, то $\begin{cases}x=x\\ y=f\left(x\right)\end{cases};\ x\in[a,b]\implies$

$$\implies\begin{array}{c}\varphi\prime(t)=\varphi\prime(x)=x\prime=1\\ \psi\prime(t)=f\prime(x)\end{array}\implies$$

$$l=\int\limits_a^b\sqrt{1+f^{2}\prime(x)}dx\tag{14}$$

Замечание. Формула (13) обобщается и на случай прастранственной кривой, заданной параметрически в части в $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \qquad ;\ t \in [t_0; \tau] \\ z = n(t) \end{cases}$$

$$l = \int\limits_{t_0}^{\tau} \sqrt{\varphi\prime^2(t) + \psi\prime^2(t) + n\prime^2(t)} dt$$

2.9.7 Дифференцирование дуги

Пусть дуга AB задана уравнением $y = f(x),\ x \in [a, b].\ f\prime(x)$ - непрерывна на $[a, b]$

Если $c(x, f(x))$ - произвольная точка на кривой $[a, b]$, то длинна дуги равна (по формуле 14) $AC = \int\limits_{a}^{x} \sqrt{1 + f\prime^2(t)} dt$ (Интеграл с переменным верхним пределом.) То по Теореме о дифференцировании интеррала с переменным верхним пределом $l\prime(x) = \sqrt{1 + f\prime^2(t)} = \sqrt{1 + f\prime^2(x)} \implies$

Дифференцирование диги(Длинны дуги) равна $dl = l\prime(x)\, dx = \sqrt{1 + f\prime^2(x)} dx$

И поэтому можно написать $l = \int\limits_{a}^{b} dl$

Замечание. Заметим что если $y = f(x)$, то $f\prime(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = y\prime \implies dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \implies dl^2 = dx^2 + dy^2$

2.9.8 Вычисление площадей поверхностей фигур вращения.

Пусть$y = f(x)$ - функция, $x \in [a, b],\ f\prime(x)$ - непрерывна, $f(x) > 0$.

Разобьем $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$

Обозначим $y_i = f(x_i)$

Пусть граыике $y = f(x)$ вращается вокруг Ox. Решим задачу нахождения площади боковой поверхности получившейся фигуры вращения.

Теорема. *Если $f\prime(x)$ - непрерывна на $[a, b]$ вместе со своей производной, то площадь поверхности фигуры вращения относительно оси Ox равна*

$$s = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f\prime^2(x)} dx \tag{15}$$

Доказательство. Пусть $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$

$L_i(x_i; f(x_i)),\ i = \overline{0, n}$

При вращении ломаной $L_0 L_1 \ldots L_n$ вокруг оси Ox получается фигура вращения (P_n) с площадью равной

$$\begin{aligned} P_n &= \sum_{i=0}^{n-1} \triangle P_i = \left\{ \begin{array}{c} \triangle P_i - \text{площадь боковой поверхности} \\ \text{усеченного конуса с образующей} \\ \triangle l_i = \sqrt{\triangle y_i^2 + \triangle x_i^2} \\ \text{Периметр основание это длинна окружности} \\ 2\pi \cdot f(x_i) \ ; \ 2\pi \cdot f(x_i + 1) \end{array} \right\} = \\ &= 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot \sqrt{\triangle y_i^2 + \triangle x_i^2} = \\ &= 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x) + f(x_{i+1})\right) \sqrt{\left(f(x_{i+1}) - f(x_i)\right)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2} = \\ &= \pi \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x) + f(x_{i+1})\right) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \cdot \triangle x_i = \\ &= \left\{ \begin{array}{c} 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \sqrt{1 + f'(\xi_i)} \triangle x_i \\ \downarrow \\ 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \end{array} \right\} = \\ &= 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \sqrt{1 + f'(\xi_i)} \triangle x_i + \pi \sum_{i=0}^{n-1} \left(\left(f(x_i) - f(\xi_i)\right) + \left(f(x_{i+1}) - f(\xi_i)\right)\right) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \triangle x_i \end{aligned}$$

Покажем что в последнее слогаемое стремится к нулю, при эн стремящемся к бесконечности. Действительно, так как $f(x)$ - непрерывна на $[a,b]$ вместе со своей производной, то по 1й теореме $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ - непрерывна $\Longrightarrow$ Она ограничена $\Longrightarrow \exists M > 0 \ \sqrt{1 + f'^2(x)} \leq M$ То по теореме Кантора, $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a,b] \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x', x'' \in [a,b] \ |x' - x''| < \delta \Longrightarrow |f(x') - f(x'')| < \dfrac{\varepsilon}{2M(b-a)\pi}$. $\Longrightarrow$ Модуль 2го слогаемого

$$\begin{aligned} |2| \leq \pi \sum_{i=0}^{n-1} \left(|f(x_i) - f(\xi_i)| + |f(x_{i+1}) - f(\xi_i)|\right) M \triangle x_i &< \left\{ \begin{array}{c} |f(x_i) - f(\xi_i)| < \dfrac{\varepsilon}{M(b-a)\pi} \\ |f(x_{i+1}) - f(\xi_i)| < \dfrac{\varepsilon}{M(b-a)\pi} \end{array} \right\} < \\ &< \pi \cdot \frac{\varepsilon}{M(b-a)\pi} \cdot M \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \triangle x_i = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Замечание. Если кривая $[a,b]$ задана параметрически $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha, \beta]$, $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ - непрерывны вместе со своими производными то $f(x) \leftrightarrow \psi(t)$ и $dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)\,dt$

$$f'(x) = y_x' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t) \sqrt{1 + \frac{\psi'^2(t)}{\varphi'^2(t)}} \varphi'(t)\,dt = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

Пример. $y = x^3, \ x \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$ - Вокруг Ox

$$S=2\pi\int\limits_0^{\frac{1}{2}}x^3\sqrt{1+9x^4}dx=2\pi\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+9x^4}\frac{dx^4}{4}=\frac{2\pi}{4\cdot 9}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+9x^4}d\left(9x^4+1\right)=\frac{\pi}{18}\cdot\frac{2\left(1+9x^4\right)^{\frac{3}{2}}}{3}|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{61\pi}{1728}$$

2.9.9 Механические приложения определенного интеграла.

2.9.9.1 Вычисление массы статических моментов, моментов инерции, координат центров масс.

2.9.9.1.1 Общие сведения.

Определение. Статическим моментом материальной точки $M\left(x,y\right)$ массой m относительно оси Ox(Oy) называется величина $M_x=m\cdot y;\ M_y=m\cdot x$

Определение. (2) Моментом инерции материаллььногй точки $M\left(x,y\right)$ с массой m относительно оси $Ox\left(Oy\right)$ называется величина $I_x=m\cdot y^2;\ I_y=m\cdot x^2$Центральный мамонт инерции $I_0=I_x+I_y=m\left(x^2+y^2\right)$

Определение. (3) Центром масс системы материальных точек $M_k\left(x_k;y_k\right),\ k=\overline{1,n}$ массами m_k называется точка $C\left(x_c,y_c\right)$, такая что если в ней сосредоточить всю массу системы $M=\sum\limits_{k=1}^{n}m_k$, то ее статические мооменты относительно координатныхъ осей Ox и Oy не изменятся. $M_x=\sum\limits_{k=1}^{n}m_ky_k=M\cdot y_c;\ M_y=\sum\limits_{k=1}^{n}m_kx_k=M\cdot x_c$. Координаты центра масс считаются $x_c=\frac{M_y}{M};\ y_c=\frac{M_x}{M}$

Замечание. В общем случае если требуется найти механические характеристики например, материальной кривой $l=AB$, в плоскости или плоскорй кривой фигуры (P) в проскости с распределенной на ней плотностью ρ, то ети фигуры разбивают на элементарные части $M\approx\sum\limits_{i=0}^{n-1}\rho\left(\xi_i\right)\triangle l_i\overset{\lambda\longrightarrow 0}{\longrightarrow}M$.

Пусть $l=AB$ - дуга в плоскости, определяемая $y=f\left(x\right),\ x\in\left[a,b\right]$, над l распределена следующая плотность масс $\rho\left(x\right)$.

Рассмотрим $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$

На каждом $\left[x_i,x_{i+1}\right]$ выберем $\xi_i\in\left[x_i,x_{i+1}\right]$

Будем считать $\rho\left(x\right)\equiv\rho\left(\xi_i\right)\ \forall x\in\left[x_i,x_{i+1}\right]\ \forall i=\overline{0,n-1}$ Пусть ρl_i - длинна дуги M_iM_{i+1}, тогда получим приближеннрое равенство $M\approx\sum\limits_{i=0}^{n-1}\rho\left(\xi_i\right)\triangle l_i$

Замечание. Заметим что длинна дуги $\triangle l_i\approx\sqrt{\triangle x_i^2+\triangle y_i^2}=\sqrt{\triangle x_i^2+f'^2\left(\xi_i\right)\triangle x_i^2}=\sqrt{1+f'^2\left(\xi_i\right)}\triangle x_i$

$$\Longrightarrow M\approx\sum\limits_{i=0}^{n-1}\rho\left(\xi_i\right)\cdot\sqrt{1+f'^2\left(\xi_i\right)}\triangle x_i\overset{\substack{n\longrightarrow\infty\\ \lambda\longrightarrow 0}}{\longrightarrow}\int\limits_a^b\rho\left(x\right)\sqrt{1+f'^2\left(x\right)}dx=M$$

Аналогично для статических моментов $M_x\approx\sum\limits_{i=0}^{n-1}f\left(\xi_i\right)\rho\left(\xi_i\right)\triangle l_i=\sum\limits_{i=0}^{n-1}f\left(\xi_i\right)\rho\left(\xi_i\right)\sqrt{1+f'^2\left(\xi_i\right)}\triangle x_i\overset{\lambda\longrightarrow 0}{\longrightarrow}\int\limits_{a\{=M_x\}}^{b}f\left(x\right)\rho\left(x\right)\sqrt{1+f'^2\left(x\right)}dx$

$M_y \approx \sum\limits_{i=0}^{n-1} \xi_i \rho\left(\xi_i\right) \sqrt{1+f'^2\left(\xi_i\right)} \triangle x_i \longrightarrow \int\limits_a^b x\rho\left(x\right)\sqrt{1+f'^2 x}dx$

Можно найти центр масс $\begin{array}{l} x_c = \dfrac{M_y}{M} \\ y_c = \dfrac{M_x}{M} \end{array}$.

2.9.10 Случай плоской фигуры.

Криволинейная трапеция $ABCD$ на ней распледеленыа плотность масс по закону: $\rho = \rho\left(x\right)$

$\forall M\left(x, y\right),\ x \in \left[a, b\right],\ 0 \le y \le f\left(x\right)$

Разобьем $\left[a, b\right]$ $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n$

$\xi_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2} \Longrightarrow \triangle S_i \approx f\left(\xi_i\right)\triangle x_i$; $m = \triangle S_i \cdot \rho\left(\xi_i\right)$

Пусть масса $\left(\triangle S_i\right)$ сосредоточим в точке $P_i\left(\xi_i, \dfrac{1}{2} f\left(\xi_i\right)\right)$, тогда

$$M \approx \sum\limits_{i=0}^{n-1} \rho\left(\xi_i\right) \cdot f\left(\xi_i\right) \cdot \triangle x_i \overset{\substack{\lambda \longrightarrow 0 \\ n \longrightarrow \infty}}{\longrightarrow} \int\limits_a^b \rho\left(x\right) f\left(x\right) dx = M$$

Статические моменты:

$M_x \approx \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=0}^{n-1} f\left(\xi_i\right) \cdot \rho\left(\xi_i\right) \cdot \triangle S_i \approx \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=0}^{n-1} f\left(\xi_i\right) \cdot \rho\left(\xi_i\right) \cdot f\left(\xi_i\right) \triangle x_i \xrightarrow{\lambda \longrightarrow 0} \dfrac{1}{2}\int\limits_a^b \rho\left(x\right) f^2\left(x\right) dx = M_x$

$M_y \approx \sum\limits_{i=0}^{n-1} \xi_i \cdot \rho\left(\xi_i\right) \cdot \triangle S_i \approx \sum\limits_{i=0}^{n-1} \xi_i \rho\left(\xi_i\right) f\left(\xi_i\right) \triangle x_i \xrightarrow{\lambda \longrightarrow 0} \int\limits_a^b x\rho\left(x\right) f\left(x\right) dx = M_y$

2.10 Параграф №10. Приближенные вычисления определенных интегралов.

Пусть $y = f\left(x\right)$ определена и интегригруема на отрезке $\left[a, b\right]$. Рассмотрим разбиение $\left\{x_i\right\}$: $a = x_0 < x_i < \ldots < x_n = b$. Выберем $\xi_i \in \left[x_i, x_{i+1}\right]$ $i = \overline{0, n-1}$. Тогда приближенная формула вида

$$\int\limits_a^b f\left(x\right) dx \approx \sum\limits_{i=0}^{n-1} p_i f\left(\xi_i\right) \tag{16}$$

(16) - Квадратурная формула для вычисления определенного интеграла. $\left\{\xi_i\right\}$ $i = \overline{0, n-1}$ - узлы квадратурной формулы. p_i - весовые коофиценты.

Рассмотри некоторые приближенные методы:

2.10.1 Метод прямоугольников.

Рассмотрим равномерное разбиение $\left\{x_i\right\}$ $i = \overline{0, n}$, $\triangle x_i = x_{i+1} - x_i = \dfrac{b-a}{n}$.

На каждом отрезке $\left[x_i, x_{i+1}\right]$ $i = \overline{0, n-1}$ выберем точку $\xi_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$- средняя точка. Получим метод средних прямоугольников.

Замечание. Если $\xi_i = x_i$ - медод левых прямоугольников. Если $\xi_i = x_{i+1}$ - медод правых прямоугольников.

Обозначим $y_i = f(\xi_i)$

$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\triangle x_i = \sum\limits_{i=0}^{n-1} y_i \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} y_i$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} y_i \tag{17}$$

Вес каждого числа одинаков.

Обозначим $\triangle_n = \int\limits_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} y_i$.

Теорема. *Если 2я произвозная функции $f(x)$ - непрерывна на $[a, b]$, то*

$|\triangle_n| \leq \max\limits_{[a,b]} |f''(x)| \frac{(b-a)^3}{24n^2}$

Доказательство. Его не будет - Малыхин. ☐

Пример. Вычислить $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

$f(x) = \frac{1}{1+x}$

$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \leq 2 = \max\limits_{[0,1]} |f''(x)|$

$\Longrightarrow |\triangle_n| \leq 1\frac{1^3}{1 \cdot n^2} < 0,01$

$n^2 > \frac{100}{12} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3} \Longrightarrow n = 3$ - удовлетворяет оценки

$\Longrightarrow \triangle x_i = \frac{1}{3}$

$\xi_0 = \frac{1}{6};\ \xi_1 = \frac{1}{2};\ \xi_2 = \frac{5}{6}$ - узлы нашей квадратурной формулы.

$I = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{6}} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} + \frac{1}{1+\frac{5}{6}}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{6}{7} + \frac{2}{3} + \frac{6}{11}\right) == \frac{1}{3} \cdot \frac{198+154+126}{231} = \frac{478}{693}$

2.10.2 Метод трапеций.

Рассмотри равномерное разбиение $\{x_i\}$ $i = \overline{0, n}$ отрезка $[a, b]$, $\triangle x_i = \frac{b-a}{n}$. Обозкачим $A_i(x_i, f(x_i))$, радача находдения площади криволинейной трапеции ABCD заменим задачей нахождения площади многоугольной области, ограниченой линиями $y = 0$; $x = a$; $x = b$; и ломаной $A_0A_1 \ldots A_n$.

Обознаяим $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n-1} \Longrightarrow$ часть указанной многоугольной области, зпключенная в полосе $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ - трапеция площади

$$\begin{aligned} \triangle S_i &= \frac{y_i + y_{i+1}}{2}\triangle x_i = \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot \frac{b-a}{n} \Longrightarrow \int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}(y_i + y_{i+1}) = \\ &= \frac{b-a}{2n}\left((y_0 + y_n) + 2\sum\limits_{i=1}^{n-1} y_i\right) \end{aligned}$$

Теорема. *Если* $f''(x)$ *ограничена на* $[a,b]$ *то*

$$|\triangle_n| \leq \sup_{[a,b]} |f''(x)| \frac{(b-a)^2}{12n^2}$$

Доказательство. Его не будет - Малыхин. □

2.10.3 Метод парабл. (Метод Симсона).

Рассмотрим разбиение $\{x_i\}$ $i = \overline{0, 2n}$ отрезка $[a,b]$, $\triangle x_i = x_{i+1} - x_i = \dfrac{b-a}{2n}$

На каждом из промежутков $[x_0, x_2], [x_2, x_4] \ldots [x_{2k}, x_{2k+2}] \ldots [x_{2n-1}, x_{2n}]$ помстроим параболу вида $y = a_k x^2 + b_k y + c_k$, проходящую через точки $(x_{2k}, y_{2k}), (x_{2k+1}, y_{2k+1}), (x_{2k+2}, y_{2k+2})$ коофиценты параболы, а значит и сама парабола находятся однозначно.

В этом случае получим приближенное равенство

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &\approx \int_{x_0}^{x_2} \left(a_0x^2 + b_0x + c_0\right) dx + \int_{x_2}^{x_4} \left(a_1x^2 + b_1x + c_1\right) dx + \ldots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} \left(a_{n-1}x^2 + b_{n-1}x + c_{n-1}\right) dx = \\
&= \left\{ \begin{array}{c}
\int_{x_0}^{x_2} (a_0x^2 + b_0x + c_0)\,dx = \frac{a_0}{3}(x_2^3 - x_0^2) + \frac{b}{2}(x_2^2 - x_0^2) + c_0(x_2 - x_0) = \\
= \frac{x_2 - x_0}{6}(2a_0(x_2^2 + x_2x_0 + x_0^2) + 3b_0(x_2 + x_0) + 6c_0) = \\
= \frac{b-a}{6n}\left(a_0x_0^2 + b_0x_0 + c_0 + 4\left(a_0\left(\frac{x_0+x_2}{2}\right)^2 + b_0\left(\frac{x_2+x_0}{2}\right) + c_0\right) + a_0x_2^2 + b_0x_2 + c_0\right) \\
= \left\{\frac{x_0 + x_2}{2} = x_1\right\} = \\
= \frac{b-a}{6n}(y_0 + 4y_1 + y_2)
\end{array} \right. \\
&= \frac{b-a}{6n}\left((y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots + (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})\right) = \\
&= \frac{b-a}{6n}\left(y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1})\right)
\end{aligned}$$

Получим расчетную формулу Симпсона

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\left(y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1})\right)$$

Теорема. *Если* $f^{(4)}(x)$ *- ограничена на*$[a,b]$ *то*

$$|\triangle_n| \leq \sup_{[a,b]} f^{(4)}(x) \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4}$$

Доказательство. Его не будет - сказал Малыхин. □

2.11 Параграф №11. Несобственные интегралы. (Обобщение интеграла Римана.)

Для интегрируемости функции $f(x)$ на промежутке $[a,b]$ по Риману должны выполлняться условия:

1. Промежуток $[a,b]$ - ограничен.
2. Ограниченность $f(x)$ на $[a,b]$.

При нарушении 1го из условий интегрируемость функции $f(x)$ на $[a,b]$ в несобственном виде.

2.11.1 Несобственные интегралы 1го рода.

Пусть $y = f(x)$ определена на $[a,+\infty]$ и интегрририуема по Риману на $[a,A]$ $\forall A > a$.

Тогда, если существует конечный предел $\lim\limits_{A\longrightarrow\infty}\int\limits_a^A f(x)\,dx = I$, то его значение - несобственный интеграл от $f(x)$ по бесконечному промежутку $[a,+\infty]$ и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{A\longrightarrow\infty}\int\limits_a^A f(x)\,dx$.

Для $f(x) > 0$ на $[a,+\infty)$, геометрически Н.И. 1го рода выражает площадь любойнеограниченной фигуры, заключеннной между линиями: $x = a,\ y = 0,\ y = f(x)$.

Если $\lim\limits_{A\longrightarrow+\infty}$ не существует или бесконечен, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ - разывают расходящимся, в противном сходящимся к своему значению, а $f(x)$ - интегрируема на $[a,+\infty]$ в несобственом смысле. Аналогично определяется $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim\limits_{A\longrightarrow+\infty}\int\limits_{-A}^{a} f(x)\,dx = \lim\limits_{A\longrightarrow-\infty}\int\limits_{-A}^{a} f(x)\,dx$, что $f(x)$ - интегрируема на $[A,a]$ $\forall A < a$ и определена на $(-\infty,a]$.

Определение. Н.И. от $f(x)$ по промежутку $(-\infty,+\infty)$ называется выражения вида: $]\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{A\longrightarrow-\infty}\int\limits_{A}^{a} f(x)\,dx + \lim\limits_{A\longrightarrow+\infty}\int\limits_{A}^{a} f(x)\,dx$.

Если оба предела существуют и конечны, то интеграл $(-\infty,+\infty)$ сходится к их сумме, а в противном расходится.

Пример. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha},\ \alpha\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{A\longrightarrow+\infty}\int\limits_1^A x^{-\alpha}dx = \{\alpha\neq 1\} = \lim_{A\longrightarrow+\infty}\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}|_1^A = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{A\longrightarrow+\infty}\left(A^{1-\alpha}-1\right) = \\ &= \left\{\begin{array}{c} +\infty\ \alpha<1\ -\ \text{расходится} \\ \dfrac{1}{\alpha-1}\ \alpha>1\ -\ \text{сходится}\end{array}\right\}\end{aligned}$$

$\alpha = 1 \implies \int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{A\longrightarrow+\infty}\ln x|_1^A = \lim\limits_{A\longrightarrow+\infty}(\ln A - \ln 1) = +\infty$

Интеграл сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \leq 1$.

Пример. Вычислить интеграл $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{1+x^2}$.

$$\begin{aligned} I &= \lim_{A\longrightarrow+\infty} \int\limits_{-A}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{B\longrightarrow+\infty} \int\limits_{0}^{B} \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= \lim_{A\longrightarrow+\infty} \left(\mathrm{arctg} 0 - \mathrm{arctg}\left(-A\right)\right) + \lim_{B\longrightarrow+\infty} \left(\mathrm{arctg} B - \mathrm{arctg} 0\right) = \\ &= \pi \end{aligned}$$

2.11.2 Свойства несобственного интеграла.

1. Несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} f\left(x\right) dx$ - сходится $\Longleftrightarrow$ $\int\limits_{A}^{\infty} f\left(x\right) dx$ сходится $\forall A > a$, при условии что $f\left(x\right)$ интегрируема по Риману на $[a, A]$.

   Доказательство. Рассмотрим следующий случай $a < A < B$, тогда

   $$\int\limits_{a}^{B} f\left(x\right) dx = \{\text{Свойство интеграла Римана}\} = \int\limits_{a}^{A} f\left(x\right) dx + \int\limits_{A}^{B} f\left(x\right) dx \qquad (18)$$

   Придельным переходом при $B \longrightarrow +\infty$. $\Longrightarrow$ Существование предела в правой части $\Longrightarrow$ $\exists \int\limits_{A}^{\infty} f\left(x\right) dx$

   Аналогично изсуществования конечного предела в правой части следует существование такого же предела в левой части.

   $$\int\limits_{a}^{\infty} f\left(x\right) dx = \int\limits_{a}^{A} f\left(x\right) dx + \int\limits_{A}^{\infty} f\left(x\right) dx \qquad (19)$$

   ☐

2. Если $\int\limits_{a}^{\infty} f\left(x\right) dx$ сходится то $\lim\limits_{A\longrightarrow+\infty} \int\limits_{A}^{\infty} f\left(x\right) dx = 0$

   Доказательство. Из (19):

   $$\begin{aligned} \int\limits_{A}^{\infty} f\left(x\right) dx &= \int\limits_{a}^{\infty} f\left(x\right) dx - \int\limits_{a}^{A} f\left(x\right) dx = \\ &= \left\{ \int\limits_{a}^{A} f\left(x\right) dx \longrightarrow \int\limits_{a}^{\infty} f\left(x\right) dx \right\} = 0 \end{aligned}$$

   ☐

3. Если $\int\limits_{a}^{\infty} f\left(x\right) dx$ сходится то $\forall c$ сходится интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} c \cdot f\left(x\right) dx = c \cdot \int\limits_{a}^{\infty} f\left(x\right) dx$.

Доказательство. Сами(Предельным переходом). ☐

4. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,+\infty]$ в несобственном смысле, то $f(x)\pm g(x)$ - также на $[a,+\infty]$, причем: $\int\limits_a^\infty (f(x)\pm g(x))\,dx = \int\limits_a^\infty f(x)\,dx \pm \int\limits_a^\infty f(x)\,dx$

   Доказательство. Сами(Предельным переходом). ☐

5. Если $f(x)$ интегрируема на $[a,+\infty]$ и $\forall x\in[a,+\infty]$ $F(x)$ - первообразная для $f(x)$, то $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = F|_a^\infty = F(+\infty)-F(a)$, где $F(+\infty)=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} F(x)$.

   Доказательство. Очевидно(Предельным переходом). ☐

   Пример. $\int\limits_0^\infty x - e^{-x^2}dx = -\frac{e^{-x^2}}{2}|_0^\infty = \frac{1}{2}$

6. Формула интегрирования по частям. $\int\limits_a^\infty u(x)\,v\prime(x)\,dx = u(x)\,v(x)\,|_a^\infty - \int\limits_a^\infty v(x)\,u\prime(x)\,dx$ при условие что 2 выражения из 3х существуют и конечны.

   Доказательство. Сами(Тоже предельным переходом). ☐

2.11.3 Сходимость несобственных интегралов 1го рада для случая неотрицательных функций.

Заметим, что если $f(x)\geq 0$ на $[a,+\infty]$, то функция $F(A)=\int\limits_a^A f(x)\,dx$ - интеграл с переменным верхним предело. $A_1<A_2 \implies F(A_1)\leq F(A_2) \implies$ функция $F(A)$ - монотонна неубывает. Для такой функции необходимым и достаточным условием существования конечного предела при $A\longrightarrow+\infty$ является ограниченость сверху. таким образом получим следующий критерий сходимости несобственного интеграла 1го рода.

Теорема. (1) $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится для функции $f(x)\geq 0$ на $[a,+\infty]$ $\iff$ $\exists L>0\ \forall A\geq 0\ \int\limits_a^A f(x)\,dx\leq L$

Теорема. (2) *Признак славнения. Если на луче* $[a,+\infty]$ *определены неотрицательные функции* $f(x)$ *и* $g(x)$, *интегрируемы на любом отрезке* $[a,b]$, $b>a$. $0\leq f(x)\leq g(x)\ \ \forall x\geq a$

1. *Из сходимости интеграла* $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ *следует сходимость* $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$

2. *Из расходимости* $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ *следует расходимость* $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$

Доказательство.

1. Пусть сходится интеграл $\int\limits_a^\infty g\left(x\right)dx \implies \{$по теореме №1$\} \implies \exists L > 0\,\forall A \geq a \int\limits_a^A f\left(x\right)dx \leq \int\limits_a^A g\left(x\right) \leq L$ по теореме 1 для $\int\limits_a^A f\left(x\right)dx \implies \int\limits_a^\infty f\left(x\right)dx$ - сходится.

2. Пусть $\int\limits_a^\infty f\left(x\right)dx$ - расодится

   Предположим противное $\int\limits_a^\infty g\left(x\right)dx$ - сходится $\implies$ смотри пункт 1$\implies$ противоречие.

☐

Пример. Исследовать на сходимость $I = \int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$

$f\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = g\left(x\right)$

Так как $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ - сходится($\alpha = \frac{3}{2} > 1$) то и I тоже сходится.

Пример. $f\left(x\right) = \frac{1}{\ln x} > \left\{x > \ln x > 0 \implies \frac{1}{x} < \frac{1}{\ln x}\right\} > \frac{1}{x} = g\left(x\right)$

Так как $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x} = \infty(\alpha = 1)$ то он расходится.

Теорема. (3) Предельный признак сравнения.

Если функции $f\left(x\right)$ и $g\left(x\right)$ определены, положительны при $x \geq a$, интегрируемы на любом отрезке $\left[a, b\right]$, $b > a$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)} = L > 0$, то интегралы $\int\limits_a^\infty f\left(x\right)dx$ и $\int\limits_a^\infty g\left(x\right)dx$ сходятся и расходятся одновременно.

Доказательство. По определению предела функции на бесконечности при $x \longrightarrow +\infty$.

$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)} = L \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists\Delta = \Delta\left(\varepsilon\right) > 0\ \forall x \in D\left(f\right)\ \ x > \Delta \implies \left|\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)} - L\right| < \varepsilon$

$-\varepsilon < \frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)} - L < \varepsilon$

$$\left(L - \varepsilon\right) \cdot g\left(x\right) < f\left(x\right) < \left(\varepsilon + L\right) \cdot g\left(x\right) \tag{20}$$

Если сходятся интеграл $\int\limits_a^\infty f\left(x\right)dx$, то учитывая левую часть неравенства (20) получаем что $g\left(x\right) < \frac{f\left(x\right)}{L-\varepsilon}$, где $\int\limits_a^\infty \frac{f\left(x\right)}{L-\varepsilon}dx$ - сходится $\implies \int\limits_\Delta^\infty \frac{f\left(x\right)}{L-\varepsilon}dx$ - также сходится (по лемме, толи 1ой толи 2й или хз какой в общем пфф) $\implies$ так как $\forall x > \Delta\ g\left(x\right) < \frac{f\left(x\right)}{L-\varepsilon}$ по теореме 2 сходится и $\int\limits_\Delta^\infty g\left(x\right)dx \implies$ по той-же хз какой лемме $\implies$ сходится $\int\limits_a^\infty g\left(x\right)dx$.

В обратную сторону: Если $\int\limits_a^\infty g\left(x\right)dx$, то учитывая правую чать неравенства (20), аналогично преведущему случаю мы получим $\int\limits_a^{+\infty}\left(L+\varepsilon\right)g\left(x\right)dx$ сходится $\Longrightarrow$ сходится $\int\limits_a^\infty f\left(x\right)dx$.

Расходимость доказывается от противного. ☐

Пример. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$

$f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\sim\frac{1}{\sqrt{x^3}}=g\left(x\right)$ при $x\longrightarrow+\infty$

Действительно $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\ldots=1$

Интеграл $\int\limits_1^\infty g\left(x\right)dx=\int\limits_1^\infty\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ - сходится потому что $\alpha=\frac{3}{2}>1$

Замечание. Требования что $L\neq0$ существенно.

Пример. $f\left(x\right)=\frac{1}{x^2},\ g\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=0$

$\int\limits_1^\infty f\left(x\right)dx$ - сходится потому что $\alpha=2>1$

$\int\limits_1^\infty g\left(x\right)dx$ - не сходится потому что $\alpha=\frac{1}{2}<1$

2.11.4 Сходимость несобственных интегралов в общем случае.

Пусть функция $f\left(x\right)$ определена на промежутке $\left[a,+\infty\right]$ и в общем случае знакомеременна.

Теорема. (1) *Пусть функция $f\left(x\right)$ определена и непрерывна на $\left[a,+\infty\right]$ интеграл $\int\limits_a^\infty f\left(x\right)dx$ - сходится* $\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists\Delta>0\ \forall x',x'',x'>\Delta,x''>\Delta\ \left|\int\limits_{x'}^{x''}f\left(x\right)dx\right|<\varepsilon$

Доказательство. Следует из критерия Коши сходимости функций при $x\longrightarrow\infty$.

Пусть $\Phi\left(A\right)=\int\limits_a^A f\left(x\right)dx$

$\exists\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\Phi\left(x\right)\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists\Delta>a,>0\ \forall x',x''\ x',x''>0\implies\left|\Phi\left(x''\right)-\Phi\left(x'\right)\right|<\varepsilon$

$\left|\Phi\left(x''\right)-\Phi\left(x'\right)\right|=\left|\int\limits_a^{x'}f\left(x\right)dx-\int\limits_{x'}^{x''}f\left(x\right)dx\right|=\left|\int\limits_{x'}^{x''}f\left(x\right)dx\right|<\varepsilon$ ☐

Определение. Несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f\left(x\right)dx$ называется абсолюьно сходящимся если сходится интеграл $\int\limits_a^\infty\left|f\left(x\right)\right|dx$.

Теорема. (2) *Из абсолютной сходимости интеграла* $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ *следует его сходимость.*

Доказательство. Пусть интеграл $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$ - сходится $\Longrightarrow$ Используя теорему 1 $\Longrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\Delta=\Delta(\varepsilon)>0\ \forall x', x'', x'>\Delta, x''>\Delta\ \int\limits_{x'}^{x''}|f(x)|\,dx<\varepsilon$

Так как $\left|\int\limits_{x'}^{x''} f(x)\,dx\right| \le \int\limits_{x'}^{x''}|f(x)|\,dx<\varepsilon \Longrightarrow$ По теореме 1 $\Longrightarrow$ сходится $\int\limits_{x'}^{x''} f(x)\,dx$. □

Определение. Если интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ - сходится, но не сходится интеграл $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$, то говорят что функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a,+\infty]$ неабсолютна или интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ - сходится неабсолютно(условно).

Теорема. (3) *Пусть функция* $\Phi(A)=\int\limits_a^A f(x)\,dx$ *- ограничена* : $\exists K>0\ \left|\int\limits_a^A f(x)\,dx\right|\le k\ \forall A>a$, *а функция* $g(x)$ *- положительна, неубываетт при* $x\ge a$ *и* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} g(x)=0$, *тогда* $\int\limits_a^\infty f(x)\,g(x)\,dx$ *- сходится.*

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\forall A, A', a \quad < \quad A < A' :\ I = \int_A^{A'} f(x)\,g(x)\,dx &= \left\{\begin{array}{c}\text{Интегрирование по частям}\\ u=g(x)\,;\ dv=f(x)\,dx\\ du=g'(x)\,dx,\ v=\int\limits_a^x f(x)\,dx=\Phi(x)\end{array}\right\} =\\
&= g(x)\cdot\Phi(x)\,|_A^{A'} - \int_A^{A'}\Phi(x)\,g'(x)\,dx = \left\{\begin{array}{c}\text{Теорема о среднем(обобщенная)}\\ \exists\xi\in[A,A']\end{array}\right\} =\\
&= g(A')\cdot\Phi(A')-g(A)\cdot\Phi(A)-\Phi(\xi)\cdot\int_A^{A'} g'(x)\,dx = \left\{\int_A^{A'} g'(x)\,dx g(A')-g(A)\right\} =\\
&= g(A')\,(\Phi(A')-\Phi(\xi))+g(A)\,(\Phi(\xi)-\Phi(A)) < \left\{\begin{array}{c}|\Phi(A')|\le k,\ |\Phi(\xi)|\le k\\ |\Phi(A')-\Phi(\xi)|\le 2k\end{array}\right\} < \varepsilon
\end{aligned}$$

Так как $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} g(x)=0$, то $\forall\varepsilon>0\ \exists A_0\ \forall A, A'>A_0\ :\ |g(A)|<\dfrac{\varepsilon}{4k},\ |g(A')|<\dfrac{\varepsilon}{4k}$

$\Longrightarrow |I| = \left|\int\limits_A^{A'} f(x)\,g(x)\,dx\right| < \varepsilon \Longrightarrow$ интеграл сходится. □

Пример. Исследовать на сходимость $\int\limits_1^\infty \dfrac{\cos x}{x^\alpha}dx,\ \int\limits_1^\infty \dfrac{\sin x}{x^\alpha}dx$

1. $\alpha>1$ - интегралы сходятся абсолютно по признаку сравнений: $\int\limits_1^\infty \dfrac{|\cos x|}{x^\alpha}dx,\ \int\limits_1^\infty \dfrac{|\sin x|}{x^\alpha}$

   $f(x)=\dfrac{|\cos x|}{x^\alpha}\le\dfrac{1}{x^\alpha}=\dfrac{x^\alpha}{g(x)},\ \int\limits_1^\infty g(x)\,dx$ - сходится.

2. Если $0 < \alpha < 1$

Рассмотрим $\int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha} dx,\ f(x) = \cos x,\ g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$

Заметим что $|\Phi(A)| = \left|\int\limits_1^A \cos x dx\right| = \left|\sin x|_1^A\right| = |\sin A - \sin 1| \leq 2 \implies$ по Тереме 3 $\implies$интеграл сходится.

Доказательство. Докажем при $\alpha = 1$. От противного.

$\int\limits_1^\infty \frac{|\cos x|}{x} dx$ и $\int\limits_1^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$ - сходятся

Так как $|\sin x| \geq \sin^2 x$, то из сходимотсти $\int\limits_1^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx \implies \int\limits_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^\infty \frac{1 - \cos 2x}{x} dx = \frac{1}{2}\left(\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x} - \int\limits_1^\infty \frac{\cos 2x}{x}\right) \implies$

$\frac{1}{2}\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x} = \int\limits_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x} dx + \frac{1}{2}\int\limits_1^\infty \frac{\cos 2x}{x} dx \implies \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x}$ - сходится - невозможно это $\implies$ противоречие. ☐

2.11.5 Несобственные интегралы 2-го рода.

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена на полуинтегвале $[a, b)$ и $\lim\limits_{x \longrightarrow b-0} f(x) = \infty$. Если $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a, c],\ a < c < b$ в собственном смысле, то величина $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow +0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ нахывается несобственным интегралом 2го рода функции $f(x)$ по промежутку $[a, b)$.

$$\int\limits_a^b f(x) dx \overset{def}{\iff} \lim_{\varepsilon \longrightarrow +0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

Замечание. Аналогично, если $f(x)$ определена на $(a, b]$ и $\lim\limits_{x \longrightarrow a+0} f(x) = \infty$, то $\int\limits_a^b f(x) dx = \lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0+0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$.

Пример. Исследовать на сходимость $I = \int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$.

$f(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha},\ f(b-1) = \frac{1}{1^\alpha} = 1$

$\alpha = 0 \implies f(x) = 1$ - интегрируема даже в собственном смысле.

$\alpha < 0 \implies f(x) = (b-x)^{-\alpha}$

Замечание. В случае если $f(x)$ имеет особенность во внутренней точке отрезка $[a, b]$, тоесть $\lim\limits_{x \longrightarrow c} f(x) = \infty,\ c \in (a, b),\ f(x)$ определена на $[a, c) \cup (c, b]$, то $\int\limits_a^b f(x) dx = \lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0+0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0+0} \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \longrightarrow$сходятся.

Замечание. Возможны случаи, когда при интегрировании приходится вычислять интегралы 1го и 2го рода одновременно.

Пример. $\int\limits_0^\infty \frac{e^\infty}{x} dx$

2.11.6 Признаки сходимости несобственных интегралов 2го рода.

Теорема. *(1) Если $f(x)$ и $g(x)$ определена на $[,a,b)$ и $0 \le f(x) \le g(x)$ на $[a,c]$ $\forall c \in (a,b)$, то*

1. *из сходимости $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сдедует схлдимость $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.*
2. *из расходимости $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сделудует расходимость $\int\limits_a^b g(x)\,dx$.*

Доказательство. Дома. ☐

Теорема. *(2) Если $f(x)$ и $g(x)$ опрпеделены на $[a,b)$ и $\lim\limits_{x\longrightarrow b-0} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow b-0} g(x) = +\infty$ и $\exists \lim\limits_{x\longrightarrow b+0} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0$, $f(x), g(x) \ge 0$ на $[a,b]$, то интегралы $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ - сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Дома. ☐

Тут еще должно ыть 3 примера... Ну впринципе они не нужны и так все понятно.

3 Глава 3. Числовые ряды.

3.1 Параграф №1. Понятие числового ряда. Сходимость числового ряда.

Определение. Рассмотрим числовую последовательность $\{a_n\}$ и образуют выражение вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{21}$$

. Выражение (21) называется числовым рядом, а числа $a_1, a_2 \ldots a_n \ldots$ - членами ряда (21).

Определение. Конечная сумма $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ называется n-ной частичной суммой ряда (21).

Определение. Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} S_n = S$, то его называют суммой ряда (21), а ряд (21) называется сходящимся к сумме S. Если предел бесконечен или не существует,то ряд (21) называется расходящимся.

Замечание. Так как $S_1 = a_1$, $S_2 = S_1 + a_2 \implies a_2 = S_2 - S_1 \implies a_n = S_n - S_{n-1}$ то устанавливается однозначное соответствие $\{a_n\} \longleftrightarrow \{S_n\}$.

Пример. Исследовать на сходимость

1. $1-1+1-1+1+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ Она не сходится.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ - исследовать на сходимость

   $$S_n=a+a^2+a^3+\ldots+a^n=\left\{\begin{array}{c} b_1=a \\ q=q \end{array}\right\}=\frac{b_1\left(1-a^4\right)}{1-q}$$

Из определения суммы числового ряда вытикают свойства:

1. Если ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_n$ сходится к сумме S, то ряд $A+a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ сходится к сумме $A+S$.

   Доказательство. Рассмотрим последовательность частичных сумм нового ряда.

   $\Sigma_{n+1}=A+a_1+a_2+\ldots+a_n=\{a_1+a_2+\ldots+a_n=S_n\}=A+S_n\xrightarrow{n\longrightarrow\infty}A+S$ так как $S_n\xrightarrow{n\longrightarrow\infty}S$. ☐

2. Если ряд сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится к S, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha\cdot a_n$ - сходится к $\alpha\cdot S$, где $\alpha\in\mathbb{R}$ произвольное.

   Доказательство. $\sum\limits_{n=1}$ ☐

   Определение. Определение ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ называется суммой(разностью) рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$.

3. Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ сходятся, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ тоже схожятся, причем выполняется следующее равенство: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$.

   Доказательство. $\Sigma_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\pm b_k)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_n\pm\sum\limits_{k=1}^{n}b_n\xrightarrow{n\longrightarrow\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$. ☐

4. Отбрасывание конечного числа первых членов числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ не влияет на его сходимость.

   Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ - сходится. Отбросим k первых слогаемых ряда, получим следующий ряд: $a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_{k+n}+\ldots$. Последовательность его частичных сумм: $\Sigma_n=a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_{k+n}+\ldots=S_{k+n}-S_k\xrightarrow{n\longrightarrow\infty}S-S_k$. ☐

3.1.1 Критерий Коши сходимости числовых рядов.

Так как сходимость числорвого ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ равносильно сходимости числовых последовательстей, то применяя критерий Коши к реследоватеьности $\{S_n\}$ можно записать: $\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ \ \forall n \geq N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \ |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$.

Теорема. *(Критерий Коши) Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ *- сходится* $\iff \forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ \ \forall n \geq N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$

Доказательство. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится $\iff \{S_n\}$ - сходиться $\iff \forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ \ \forall n \geq N$ $\forall p \in \mathbb{N}\ \ |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ \ \forall n \geq N\ \ \forall p \in \mathbb{N}\ \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$ □

Пример. Исследовать на сходимость следующий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$.

Так как $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, то $S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \ldots \overset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 1$.

Пример. Гормонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$. Докажем его расходимость, тоесть выполняестя следующее условие

$$\begin{aligned} \exists\varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n \geq N\ \exists p \in \mathbb{N}\ :\ \ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k}\right| &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p} = \\ &= \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \ldots + \frac{1}{N+N} > N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3.1.2 Остаток симлового ряда. Необходиммое условие сходимости числового ряда.

Определение. Числовой ряд $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ - называется n-ным остатком числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Замечание. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S_n + r_n$.

Лемма. *(1) Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится* $\iff \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} r_n = 0$

Доказательство. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} S_n = S \iff \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} (S - S_n) = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} r_n = 0$ □

Лемма. *(2, Необходимый признак сходимости числового ряда)*

Если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то* $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = 0$.

Доказательство. Пусть S - сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, тогда $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} (S_n - S_{n-1}) \longrightarrow S - S = 0$ □

Замечание. Доказанный признак - достаточный признак расходимости: $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n \neq 0$ или не существует, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится.

Пример. Исследовать на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2n+1}$.

$\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2} \neq 0 \implies$ расходится.

Замечание. Необходимый признак не является достаточным.

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ - необходиммость выполнна, но он расходится.

3.2 Параграф №2. Сходимость знакоположительных рядов.

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - знакоположительный, если $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

3.2.1 Необходимое и достаточное условие сходимости знакоположительных рядов.

Рассматривается ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \ a_n \geq 0$. Заметим что $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \implies S_{n+1} \geq S_n \ \forall n \in \mathbb{N} \implies \{S_n\}$ неубывает. $\implies$ по теореме о сходимости монотонной последовательности получим сдледующую теорему.

Теорема. *(1) Знакоположительный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *- сходится* $\iff$ *последовательность* $\{S_n\}$ *ограниена сверху (* $\exists M > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ S_n \leq M$ *) .*

Замечание. Из теоремы следует что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \ a_n \geq 0$ - расходится $\iff$ последовательность $\{S_n\}$ неограничена сверху ($\forall M > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} \ S_n \leq M$) .

3.2.2 Признаки сравнения.

Теорема. *(2) (Признак сравнения) Пусть ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *- знакоположительны, если* $\exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ a_n \leq b_n$ *то*

1. *из сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *следует сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$
2. *из расходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *следует расходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$*.*

Доказательство. Так как отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на сходимость, в дальнейшем будем считать $a_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

1. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n_n$ - сходится $\implies \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leq \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \leq M \implies$По теореме 1 $\implies$ Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится. Так как все егоо частичные суммы огрпаничены в совокупности.
2. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится $\implies$ частичные суммы ряда его неограничены $\implies$ то и частичные суммы $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ неограничены $\implies$ По теореме 1 $\implies$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится.

$\square$

Пример. Исследовать на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5+(-1)^n\cdot 3}{2^{n+3}}$.

$0 \leq a_n = \frac{5+(-1)^n\cdot 3}{2^{n+3}} \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} 0$ - необходимость выполняется.

$\frac{5+(-1)^n\cdot 3}{2^{n+3}} \leq \frac{8}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} = b_n$

Так как b_n схидится, то и исходная сумма тоже сходится.

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2}$

Необходимое условие $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\frac{n+1}{n^2} = 0$ выполнено.

$a_n = \frac{n+1}{n^2} \geq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} = b_n$ - b_n -расходится, то и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2}$ расходится.

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ - сходится ($\frac{1}{2^n}$).

Пример. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$

$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \implies$ расходится.

Теорема. *(3) Признак сходимости.*

Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\frac{a_n}{b_n} = L > 0$ *то знакоположительные ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Из определения:

$\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\frac{a_n}{b_n} = L \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ \left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \varepsilon$

$-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - L < \varepsilon$

$-\varepsilon + L < \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon + L$

$$b_n\left(-\varepsilon + L\right) < a_n < b_n\left(\varepsilon + L\right) \tag{22}$$

Пусть сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ тогда используя левую часть неравенства (22) получаем по признаку сравнения, что сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\left(L-\varepsilon\right) = \left(L-\varepsilon\right)\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ следовательность ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ сходится.

Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\left(L-\varepsilon\right)$ то используя правую часть неравенства (22) получим по признаку сравнения, что сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. $\square$

Замечание. Требование $L > 0$ существенно.

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{1}{n}} = \frac{1}{n} \overset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$$

Неработает.

Пример. Исследовать на сходимость такой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{n+1}$

$$a_n = \frac{\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{n+1} \sim \frac{\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{n} = \frac{1}{n^{\dfrac{3}{2}}} = b_n$$

$\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ сходится к $\alpha > 0$ (Это обобщеннный гармонический ряд)

Вывод. *Forever Chernih*

Теорема. *Признак Даламбера.*

Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*(21) существует конечный предел* $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$

1. *при* $L < 1$ *ряд сходится*
2. *при* $L > 1$ *ряд сходится*
3. *при* $L = 1$ *требуется дополнительное исследование*

Доказательство.

1. $L < 1$

   $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ \forall n \geq N\ L - \varepsilon < \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon$

   $a_n (L - \varepsilon) < a_{n+1} < a_n (L + \varepsilon)\ \forall n \geq N$

   Так как $L < 1$ то существует такое $\varepsilon > 0$ такое маленькое, что $0 < L + \varepsilon = q < 1 \Longrightarrow$

   $a_{N+1} < a_N \cdot q$

   $a_{N+2} < a_{N+1} \cdot q < a_N \cdot q^2$

   $\ldots$

   $a_{N+K} < a_N \cdot q^K,\ K = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \ldots$

   Так как числовой ряд $\sum\limits_{K=1}^{\infty} a_N \cdot q^K = a_N \cdot \sum\limits_{K=1}^{\infty} q^K$ - сходящая геометрическая прогрессия($q < 1$).

   То ряд $\sum\limits_{K=1}^{\infty} a_{N+K} = \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n$ - сходится. $\Longrightarrow$ Сходится $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. $L > 1$

   $\exists\varepsilon > 0\ 1 < L - \varepsilon = q < L$

   Так как $a_n \cdot q < a_{n+1}\ \forall n \geq N$

   $a_{N+1} > q \cdot a_N > a_N$

$a_{N+2} > a_N \cdot q^2 > a_N$

$\dots$

$a_{N+k} > a_N > 0 \ \forall N \geq n$

$\Longrightarrow \lim\limits_{k \longrightarrow \infty} a_{N+k} \neq 0.$

□

Пример. (1) Исследовать на сходимость.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$

$a_n = \dfrac{n!}{n^n} \overset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Пример. (2) Исследовать на сходимость

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n^4}$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^4} \cdot \frac{n^4}{2^n} = 2 > 1$$

Теорема. *(5) Признак Коши.*

Пусть для ряда (21) существует предел $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$

1. *При* $L < 1$ *ряд сходится*
2. *При* $L > 1$ *ряд расходится*
3. *При* $L = 1$ *требуется дополнительное исследоватние*

Доказательство.

1. $L < 1$

   $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \ \forall n \geq N \ L - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} L + \varepsilon$

   $(L - \varepsilon)^n < a_n < (L + \varepsilon)^n$

   $0 < L + \varepsilon = q < 1$

   Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится то по признаку сравнения сходится и ряд (21).

2. $L > 1$

   $\exists \varepsilon > 0 \ q = L - \varepsilon > 1$

   Используя другую часть неравенства $q^n < a_n \ \forall n \geq N$ и расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n$ следует по признаку сравнения расходимость ряда (21).

□

Пример. (1) Исследовать на сходимость

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{n+1}\right)^n$

$\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n}{n+1}\right)^n} = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\frac{2n}{n+1} = 2 > 1$ Ряд расходится.

Пример. (2) Исследовать на сходимость.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n \cdot n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$

$\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\frac{2 \cdot n^n}{(n+1)^n} = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1$ - ряд сходится.

Теорема. *(6) Интегральный признак.*

Если функция $y = f(x) > 0$ непрерывна и монотонна убывает на промежитке $[1, +\infty)$ и $a_n = f(n)$ то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\int\limits_1^{\infty}f(x)\,dx$ сходятся и расходятся одновременно, причем выполняется неравенство: $\int\limits_1^{\infty}f(x)\,dx \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n \leq \int\limits_1^{\infty}f(x)\,dx + a_1$.

Доказательство. $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall x \in [k, k+1]\ \ f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$

$a_{k+1} \leq f(x) \leq a_k$

Проинтегрируем неравенство по отрезку $[k, k+1]$: $\int\limits_k^{k+1} f(k+1)\,dx \leq \int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx \leq \int\limits_k^{k+1} f(k)\,dx$

$a_{k+1} \leq \int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx \leq a_k$

$a_2 \leq \int\limits_1^{2} f(x)\,dx \leq a_1$

$a_3 \leq \int\limits_2^{3} f(x)\,dx \leq a_2$

$\dots$

$a_{n+1} \leq \int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx \leq a_n$

$\Longrightarrow$

$$s_{n+1} - a_1 \leq \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx \leq S_n \tag{23}$$

1. Пусть $\int\limits_1^{\infty}f(x)\,dx$ сходится к хначению $I \Longrightarrow \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx < \int\limits_1^{\infty}f(x)\,dx = I \ \Longrightarrow \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx < I$

   $\Longrightarrow\ S_{n+1} - a_1 < I \ \Longrightarrow\ S_{n+1} < I + a_1\ \forall n \in \mathbb{N}\ \Longrightarrow$ Все суммы $\{S_n\}$ ограничены в совокупности сверху.

   $\Longrightarrow$ По теореме 1 $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится

2. Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \implies$ все суммы $\{S_n\}$ ограничены в совокупности $\implies$

$F_n = \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$ возрастает и ограничена $\{S_n\} \implies$ сходится $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$.

□

Замечание. В случае сходимости предelльным перпеходом в неравенстве $n \longrightarrow \infty$

$S - a_1 \leq \int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx \leq S$

Пример. (1) Исследовать на сходимость следующий ряд.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

$f(x) = \frac{1}{x^p} > 0, \searrow$

$\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ - сзодится при $p > 1$, расходится при $p \leq 1$.

Обобщенный гармонический ряд.

Содержание