Обыкновенные дифференциальные уравнения.
Том 2.

От препода: Когда разбираете теоритический материал нужно сначала выписывать обьект исследования, а потом сам вопрос.

1 Теория устойчивости

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1\left(x, y_1, \dots, y_n\right) \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n\left(x, y_1, \dots, y_n\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1\left(x_0\right) = y^{(0)} \\ \vdots \\ y_n\left(x_0\right) = y^{(n)} \end{cases}$$

$$y\left(x\right) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

$$f\left(x, y\right) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

$$y^{(0)} = \begin{pmatrix} y_1^{(0)} \\ \vdots \\ y_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f\left(x, y\right) \\ y\left(x_0\right) = y^{(0)} \end{cases} \tag{1.1}$$

Решение задачи (1.1) будем обозначать через $y\left(x, y^{(0)}\right)$.

Рассмотрим $\dfrac{dy}{dx} = ay - 1,\ a = const$ и начальные условия: $y\left(0\right) = \dfrac{1}{a}$.

Решение: $d\left(x\right) = \dfrac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad y\left(x, y^{(0)}\right) = \dfrac{1}{a}$

Сделаем возмущение начального условия: $y\left(0\right) = \dfrac{1}{a} + \Delta y^{(0)}$

Решение возмущенной задачи:

$$y\left(x, y^{(0)}+\Delta y^{(0)}\right)=\Delta y^{(0)} e^{a x}+\frac{1}{a}$$
$$y(x)=c e^{a x}+\frac{1}{a}$$

Рассмотри разность решений по модулю:

$$\left|y\left(x, y^{(0)}+\Delta y^{(0)}\right)-y\left(x, y^{(0)}\right)\right|=\left|\Delta y^{(0)}\right| \cdot e^{a x}$$

Рассмотрим два случая:

1. $a<0$
   $\left|\Delta y^{(0)}\right| e^{a x} \leq\left|\Delta y^{(0)}\right|<\varepsilon \quad \forall x \geq 0$
   При $x \longrightarrow+\infty:\left|\Delta y^{(0)}\right| e^{a x} \longrightarrow 0$
   Говорят что решение $\frac{1}{a}$ устойчиво.
2. $a>0$
   $\left|\Delta y^{(0)}\right| e^{a x} \stackrel{x \longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \infty$
   Получается что решения разойдутся...
   Говорят, что решение $\frac{1}{a}$ неустойчиво.

Понятие устойчивости ввел российский математик Ляпунов. Он же заложил основные методы исследования решений задач на устойчивость.

В качестве нормы вектора $y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ будем рассматривать $||y||=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2}$.

Будем рассматривать устойчивость по начальным условиям.

Определение. Решения задачи (1.1) : $y=y\left(x, y^{(0)}\right)$ называется устойчивым по Ляпунову, если:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta=\delta(\varepsilon) \quad \forall\left|\left|\Delta y^{(0)}\right|\right|<\delta \quad \forall x>x_0 \quad\left|y\left(x, y^{(0)}+\Delta y^{(0)}\right)-y\left(x, y^{(0)}\right)\right|<\varepsilon$$

Определение. Решение $y\left(x, y^{(0)}\right)$ задачи (1.1) называется асимптотически устойчивым если:

1. Оно устойчиво по Ляпунову.
2. $\exists \delta_0: \ \forall\left|\left|\Delta y^{(0)}\right|\right|<\delta_0 \quad \lim\limits_{x \longrightarrow+\infty}\left|\left|y\left(x, y^{(0)}+\Delta y^{(0)}\right)-y\left(x, y^{(0)}\right)\right|\right|=0$

Исследование на устойчивость ненулевого решения можно свести исследованию на устойчивость нулевого решение некоторой вспомогательной задачи.
$U=y\left(x, y^{(0)}+\Delta y^{(0)}\right)-y\left(x, y^{(0)}\right)$
$y\left(x, y^{(0)}+\Delta y^{(0)}\right)=y\left(x, y^{(0)}\right)+U$
$\frac{d y\left(x, y^{(0)}+\Delta y^{(0)}\right)}{d x}=\frac{d y\left(x, y^{(0)}\right)}{d x}+\frac{d U}{d x}$

$$\frac{dU}{dx} = f\left(x, y\left(x, y^{(0)}\right) + U\right) - \frac{dy\left(x, y^{(0)}\right)}{dx}$$
$$F\left(x, y\right) = f\left(x, y\left(x, y^{(0)}\right) + U\right) - \frac{dy\left(x, y^{(0)}\right)}{dx}$$
$$U\left(x_0\right) = y\left(x_0, y^{(0)} + \Delta y^{(0)}\right) - y\left(x_0, y^{(0)}\right) = y^{(0)} + \Delta y^{(0)} - y^{(0)} = \Delta y^{(0)} = U_0$$

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dx} = F\left(x, U\right) \\ U\left(x\right) = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Задачи (1.1) будет соответствовать задача (хз), при начальном условии хз а задачи (3,4) будет соответствовать задача 4,5 при $u\left(0\right) = \Delta y^{(0)}$.

Тогда если нулевое решение уравнение (4) будет устойчиво, то и решение $y\left(x, y^{(0)}\right)$ будет устойчивым решением уравнения (1.1).

Нулевое решение устойчиво, если для всякой ε окрестности в начале координат, существует δ окрестность, то если решение начинается в δ окрестности, то оно не покидает ε окрестности. Решение асимптотически устойчиво, если оно не только не покидает окрестности, но и стремится к нулю. Но когда мы говорим об асимптотическом устойчивости стремление решение к нулю недостаточно, то есть первый пункт нужный.

1.1 Устойчивость нулевого решения линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{1,1}y_1 + \ldots + a_{1,n}y_n \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n,1}y_1 + \ldots + a_{n,n}y_n \end{cases} \qquad a_{i,j} = const$$

$$y\left(x\right) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \ldots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
$$\frac{dy}{dx} = Ay \tag{1.3}$$

Заметим что $y\left(x\right) = 0$ будет решением этого системы.

$\lambda_k = \mu_k + i \cdot \nu_k,\ k \leq m \leq n,\ k = \overline{1, m}$

Лемма (1)**.** *Если все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части, то $\forall$ решения $y = \varphi\left(x\right)$ системы (1.3) существуют положительные постоянные $R, \alpha > 0$ что для всех $x > 0$ будет справедливо вод это неравенство: $||\varphi\left(x\right)|| \leq Re^{-\alpha x}$.*

Доказательство. Тогда любое решение системы (1.3) можно записать как:

$$\varphi\left(x\right) = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k\left(x\right) e^{\lambda_k x} \tag{1.4}$$

Где $\varphi_k(x)$ — это вектор функции, компонентами которых являются некоторые многочлены. По условию леммы, $Re\ \lambda_k < 0$ (То есть $\mu_k < 0$).

Следовательно: $\exists\alpha > 0\ \mu_k + \alpha < 0\ \forall k$.

Тогда из (1.4) мы получаем, что

$$||\varphi(x)|| \leq \sum_{k=1}^{m} ||\varphi_k(x)|| \cdot \left|e^{x(\mu_k + i\cdot\nu_k)}\right| \quad = \quad \sum_{k=1}^{m} ||\varphi_k(x)|| \cdot e^{x\mu_k} \tag{1.5}$$

так как $\left|e^{\lambda_k x}\right| = \left|e^{x\mu_k}\right| \cdot \left|e^{i\cdot\nu_k x}\right| = e^{x\mu k}$

Умножим (1.5) на $e^{\lambda x}$.

$$||\varphi_k(x)||\, e^{\alpha x} \leq \sum_{k=1}^{m} ||\varphi_k(x)||\, e^{x(\mu_k + \alpha)} \tag{1.6}$$

Так как $\mu_k < 0$ для всех k следовательно каждая компонента ветор функции $\varphi_k(x)$ является многочленом некоторой степени.

Следовательно правая часть неравенства (1.6) стремится к 0 при $x \longrightarrow +\infty$. Следовательно правая часть неравенства (1.6) ограничена.

$\sum\limits_{k=1}^{m} ||\varphi_k(x)||\, e^{x(\mu_k+\alpha)} \leq R$

А тогда: $||\varphi_k||\, e^{\alpha x} \leq R\ \forall x \geq 0$

$||\varphi(x)|| \leq Re^{-\alpha x}$ $\square$

Будем обозначать через $y = \varphi\left(x, y^{(0)}\right)$ решение системы (1.3), которое в нуле принимает значение $y^{(0)}$.

Лемма (2)**.** *Если все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещенсивенные части, то* $\forall$ *решения системы (1.3)* $\varphi\left(x, y^{(0)}\right)$ $\exists r, \alpha > 0$ *(они константы), что* $\forall x \geq 0$ *справедлива оценка:* $\left|\left|\varphi\left(x, y^{(0)}\right)\right|\right| \leq r \left|\left|y^{(0)}\right|\right| e^{-\alpha x}$

Доказательство. Обозначим как $\varphi^{(j)}(x)$ решение системы (1.3), удовлетворяющее вод такому начальному условию: $\varphi^{(j)}(0) = e^{(j)}$.

$e^{(j)} = (0 \ldots 0\ 1\ 0 \ldots 0)^T$— стоит на j-ом месте.

$y^{(0)} = \begin{pmatrix} y_1^{(0)} \\ \vdots \\ y_n^{(0)} \end{pmatrix}$

Тогда в силу теоремы существования и единственности решение можно представить в виде:

$$\varphi\left(x, y^{(0)}\right) = \sum_{j=1}^{n} y_j^{(0)} \varphi^{(j)}(x) \tag{1.7}$$

В силу *Леммы 1* $\exists R_j\ \left|\left|\varphi^{(j)}(x)\right|\right| \leq R_j e^{-\alpha x}$.

Обозначим через $R = \max\limits_{j=\overline{1,n}} R_j$.

Тогда из $\forall j = \overline{1,n} \quad ||\varphi(x)|| \leq Re^{-\alpha x}$

В силу (1.7):

$$\left|\left|\varphi\left(x, y^{(0)}\right)\right|\right| \leq \sum_{j=1}^{n} \left|y_j^{(0)}\right| \cdot Re^{-\alpha x} \leq \left|\left|y^{(0)}\right|\right| n \cdot Re^{-\alpha x} = re^{-\alpha x} \cdot \left|\left|y^{(0)}\right|\right| \tag{1.8}$$

$r = n \cdot R$ $\square$

Теорема (1). *Если все собствнные значения матрипци A имеют отрицательные вещественные части, то положение равновесия системы (1.3) $y \equiv 0$, ассимптотически устойчиво*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\varphi\left(x, y^{(0)}\right)$ — решение и в и при $x = 0$ равняется $y^{(0)}$. И любое решение системы (1.3) удовлетворяет реравенству (1.8), в силу леммы (1.4) и в силу условий теоремы.

Тогда в качестве δ мы возьмем $\dfrac{\varepsilon}{r}$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \frac{\varepsilon}{r} \quad \left|\left|y^{(0)}\right|\right| < \delta, \quad x > x_0 \quad \left|\left|\varphi\left(x, y^{(0)}\right)\right|\right| \leq r \cdot \delta = \varepsilon$$

Мы показали что 0-ое решение системы (1.3) усточчиво по Ляпунову. Вместе с тем, так же в силу (1.8):

$$\lim_{x \to +\infty} \left|\left|\varphi\left(x, y^{(0)}\right)\right|\right| = 0$$

□

Теорема (2). *Если хотябы одно собственное значения матрици A имеет положительную вещественную часть или все собственные значения матрици A* ***имеют вещественные части неположительные*** *и хотя бы для одного собственного значения λ у которого вещественная часть равна нулю, число линейно независимых собственных векторов меньше кратности этого собственного числа λ, то нулевое рещение системы (1.3) $y \equiv 0$ неустойчиво.*

Доказательство. Будем доказывать неустойчивость в 2х случаях:

1. Пусть у системы (1.3) есть собственное число, такое что рреальная часть $\lambda = \mu > 0$. Тогда этому вещественному числу соответствует некоторый вектор h.

   $h \cdot e^{\lambda x}$ — решение системы (1.3).

   Оно может быть комплексно значным.

   $y = Re\, h \cdot e^{\lambda x}$ — тоже будет решением системы (1.3).

   Пусть $h = h^{(1)} + i \cdot h^{(2)}$, тогда

   $$y = Re\, h^{\lambda x} = Re\, \left(\left(h^{(1)} + ih^{(2)}\right) e^{\mu x} \left(\cos \nu x + i \sin \nu x\right)\right) = \\ = e^{\mu x} \left(h^{(1)} \cos \nu x - h^{(2)} \sin \nu x\right)$$

   Нетрудно видель, что норма этого решение $\overset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

   $\varphi\left(x\right) = c \cdot y$ — тоже решенние системы (1.3). ($c = const$)

   $\varphi\left(0\right) = c \cdot h^{(1)}$

   Поэтому выберая c достаточно малы, мы можем сделать $||\varphi\left(0\right)|| < \delta$.

   Но $\varphi\left(x\right)$ по норме будет стремиться к плюс бесконечности, при $x \longrightarrow +\infty$. Отсюдо следует, что нулевое решение не устойчиво.

2. Пусть у матрици A системы (1.3) есть собственное число λ, у которого вещественная часть равна нулю и кратность этого числа λ больше чем число линеейно независимых собственных векторов, соответствующих λ.

   Тогда очевидно этому собственному значению будет соответствовать хотябы одна Жорданова цепочка — $h^{(1)}, \ldots, h^{(p)}$, $p \geq 2$, где $h^{(1)}$ — собственный вектор, а остальные присоедененные. И у системы (1.3) будет решение:

$$\varphi\left(x, y^{(0)}\right) = e^{\lambda x}\left(h^{(1)} + xh^{(2)} + \ldots + \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}h^{(p)}\right)$$

   Нетрудно видеть, что: $\varphi\left(0, y^{(0)}\right) = y^{(0)} = h^{(1)}$. Тогда норма $\left|\left|\varphi\left(x, y^{(0)}\right)\right|\right| \overset{x\to+\infty}{\to} +\infty$, хотя при $x = 0$, $y^{(0)} = h^{(1)}$ по норме может быть взято вколь угодно малым.

□

Теорема (3). *Если все собственные значения матрицы A имеют неположительные вещественные части и для каждого собственного значения с вещественной частью равной нулю число линейно независимых собственных векторов равно кратности собственного значения, то нулевое решение системы (1) устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. В этом случае любое решение системы (1.3) можно представить в виде $y(x) = \sum\limits_{Re\,\lambda<0} g_k(x)\, e^{\lambda x} + \sum\limits_{Re\,\lambda=0} c_k h^{(k)} e^{\lambda x}$.

g_k — функции, компонентами которых являются многочлены.

c_k — постоянные

Нетрудно видеть, что $||y(x)|| \leq M$, где M — положительная постоянная. Все решения ограничены.

Как и при доказательстве Леммы 2 обозначим через $\varphi^{(j)}(x)$, $j = \overline{1, n}$ решение системы 1, удовлетворяющее начальнгом уусловию, $\varphi^{(j)}(0) = e^{(j)} = (0 \ldots 1 \ldots 0)^T$.

Каждое из этих решений по норме будет меньше или равно некоторого M_j. $\left(\left|\left|\varphi^{(j)}(x)\right|\right| \leq M_j\right)$ Обозначим через $M = \max\limits_{M_j} M$. Тогда все эти решения по норме меньше или равны M. $\left(\left|\left|\varphi^{(j)}(x)\right|\right| \leq M\right)$

$\varphi\left(x, y^{(0)}\right)$ — решение системы (1), которое $\varphi\left(0, y^{(0)}\right) = y^{(0)}$.

$$y^{(0)} = \begin{pmatrix} y_1^{(0)} \\ \vdots \\ y_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

$$\varphi\left(x, y^{(0)}\right) = \sum_{j=1}^{n} y_j^{(0)} \cdot \varphi^{(j)}(x)$$

В точке 0, левые и правые части совпадают. Следовательно они совпадают всегда. Поэтомутрешение можно предствить в таком виде. Тогда:

$$\left|\left|\varphi\left(x, y^{(0)}\right)\right|\right| \leq \sum_{j=1}^{n} \left|y_j^{(0)}\right| \cdot \left|\left|\varphi^{(j)}(x)\right|\right| \leq$$

А модуль компоненты вектора меньше либо равен норме вектора.

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \left|\left|y^{(0)}\right|\right| \cdot M = n \cdot M \cdot \left|\left|y^{(0)}\right|\right| = \overline{M} \cdot \left|\left|y^{(0)}\right|\right|$$

$$\overline{M} = n \cdot M$$

Мы показали, что если $\varphi\left(x, y^{(0)}\right)$, решение системы (1), которое в нуле принимает значение $y^{(0)}$, тогда для этого решения справедлива вышеупомянутая оценка. Откуда и вытекает устойчивость нулевого решенгия.

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists\delta = \delta\frac{\varepsilon}{M} \quad \left|\left|y^0\right|\right| < \delta \quad \Longrightarrow \quad ||\varphi|| < \varepsilon$$

$\square$

Утверждение. Устойчивость или неустойчивость любого решения лдинейной неоднородной системы эквивалентно устойчивости или неустойчивости нулевого решения однородной системы.

1.2 Случай произвольной системы

Будем рассматривать систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1\left(x, y_1 \dots y_n\right) \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n\left(x, y_1 \dots y_n\right) \end{cases}$$

$$y\left(x\right) = \begin{pmatrix} y_1\left(x\right) \\ \vdots \\ y_n\left(x\right) \end{pmatrix}$$

$$f\left(x, y\right) = \begin{pmatrix} f_1\left(x, y_1 \dots y_n\right) \\ \vdots \\ f_n\left(x, y_1 \dots y_n\right) \end{pmatrix}$$

$$\frac{dy}{dx} = f\left(x, y\right) \tag{1.9}$$

Будем предпологать что $y \equiv 0$ — решение системы (1.9).

Тоесть $f\left(x, 0\right) \equiv 0$.

Лемма (Ляпунова)**.** *Пусть для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ правая часть системы (1.9) определена и непрерывна для $x_0 \leq x$ $||y|| < \varepsilon_0$, $f\left(x, 0\right) \equiv 0$ и пусть при $||y|| \leq \varepsilon_0$ существуют непрерывно-дифференцируемая функция Ляпунова $V\left(y\right) \geq 0$, причем равная нулю только в нуле, и такая, что*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial y_j} f_j \leq 0 \tag{1.10}$$

Тогда нулевое решение системы (1.9) устойчиво. Если выполнено более сильное условие, тоесть при $||y|| \leq \varepsilon_0$:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial y_j} f_j \leq -W\left(y\right) \tag{1.11}$$

Где $W\left(y\right)$ — некоторая неотрицательная непрерывная функция, равная нулю только в начале координат, то нулевое решение системы (1.9) ассимптотически устойчиво.

Доказательство. Возьмем некоторое $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$. И будем обозначать через $K_\varepsilon = \{y : ||y|| = \varepsilon\}$. И обозначим через $V_\varepsilon = \min\limits_{y \in K_\varepsilon} V(y)$. Очевидно, что $V_\varepsilon > 0$. Потому что по условию леммы $V \ge 0$. Выберем теперь $\delta < \varepsilon$ настолько малым, чтобы на K_δ и всюду внутри $K_\delta : V < V_\varepsilon$. Так как V — непрерывная функция, и в нуле она равна в нулю. Покаже, что все интегральные решения системы (1.9), начинающиеся в сфере K_δ никогда при увеличении x не могут достигнуть сферы K_ε. Действительно, заметим, что вдоль каждого решения системы (1.9) функция $V(y(x))$ является сложной фунцкией и

$$\frac{dV}{dx} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_j} \frac{dy_j}{dx} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_j} f_j \le 0$$

В силу (1.10) это ≤ 0. $V(y(x))$ — невозрастающая.

Предположим что какое то решение, начинающаяся при $x = x_0$, и при некотором $x = x_1$ это решение прервыедостигает сферы K_ε. Тогда $V(y(x_0)) < V_\varepsilon$, а $V(y, x_1) \ge V_\varepsilon$.

$$\boxed{\mathrm{V}(y(0)) < V_\varepsilon \le \mathrm{V}(y(x_1))}$$

Получается что функция будет возростать. Следовательно это противоречие! Это и означает, что нулевое решение системы устойчиво.

Докажем ассимптотическую устойчивость.

Докажем для (1.11): $\exists \delta : \quad K_\delta \ V < V_\epsilon$. Мы должны показать, что $\|y(x)\| \to 0$ Для этого покажем, что функция $V(y(x)) \to 0$ на любом решении .

Предположим противное: это значит, что существует интегральная кривая l, начинающаяся в сфере K_δ, что функция $V(y(x)) \underset{x \to +\infty}{! \to} 0$ Отсюда следует (как было показано ранее), что V не возрастает на любом решении: $V(y(x))|_l \ge \eta > 0$, а это значит, что кривая l расположена вне сферы K_α.

$$\left.\frac{dV}{dx}\right|_l = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_j} \left.\frac{dy_j}{dx}\right|_l = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y} \left. f_j \right|_l \le -W(y)|_l$$

$$W(y)|_l \ge \beta > 0 \implies -W(y)|_l \le -\beta$$

Проигтегрируем это нерпвенство от x_0 до x.

$$(V(x) - V(x_0))|_l \le -\beta(x - x_0)$$

$$V(x)|_l \le V(x_0)|_l - \beta(x - x_0)$$

и $V(x) \longrightarrow -\infty$ при $x \longrightarrow +\infty$. А это противоречит условию, что $V \ge 0$ всюду, значит предположение не верно, следовательно $V(y(x)) \to 0$ для любого решения.

Покажем, что отсюда следует, что $\|y(x)\| \to 0, \ x \to +\infty$. От противного: $\|y(x)\|! \to 0, \ x \to +\infty$ Это означает, что

$$\exists x_i, \quad x_i \to +\infty \quad \|y(x_i)\| > \delta_0 \quad V(y(x_i)) \ge \delta_1$$

т.е. $V(y_i)! \to 0$ при $x_i \to +\infty$— противоречие. □

Теорема (Читаева (о неустойчивости))**.** *Рассмотрим систему (1.9). Пусть в некоторой окрестности U начала координат, существвует непрерывно дифференцируемая функция $V(y)$, такая что:*

1. *Для любой U_δ, $\exists\alpha > 0$ и некоторая подобласть ω_δ^+, в которй выполняется $V(y) \geq \alpha$*

2. $\forall\alpha > 0,\ \exists\beta > 0, \quad V(y) \geq \alpha$ *то* $W(y, x) \equiv \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial y_j} f_j(x, y) \geq \beta \quad x \geq x_0$

Тогда нулевое решение системы (1.9) неустойчиво.

Доказательство. Предположим противное: 0-е решение устойчиво. Тогда

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta(\epsilon): \quad \|y(x_0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \forall x \geq x_0 \quad \|y(x)\| < \epsilon$$

тогда по условиям теоремы для этого δ, $\exists\alpha > 0$, $\exists\omega_\delta^+ \ V(y) \geq \alpha$ Возьмем такое решение системы (1), которое при $x = x_0$ начинается в области ω_δ^+ и $V(y(x_0)) = \alpha$. Для $x > x_0$, но достаточно близких к x_0и рассмотрим разность $V(y(x)) - V(y(x_0))$ знак этой разности будет определяться знаком производной $V(y)$ при $x = x_0$.

$$\frac{dV}{dx} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_j} \frac{dy_j}{dx} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_j} f_j = W(y(x_0), x_0) \geq \beta > 0$$

То есть мы показали, что при $x > x_0 \quad V(y(x)) - V(y(x_0)) > 0$.

Покажем теперь, что $V(y(x)) > \alpha \quad \forall x > x_0$: предположим противное. То есть что $\exists x_1$ ближайший к x_0 в котором $V(y(x_1)) = \alpha$ тогда

$$0 = V(y(x_1)) - V(y(x_0)) = \frac{dV(\bar{x})}{dx}(x_1 - x_0) = W(y(\bar{x}), \bar{x})(x - x_0), \quad \forall x \in [x_0, x_1]$$

То в силу второго пункта $W(y(\overline{x}), \overline{x})(x_1 - x_0) \geq \beta(x_1 - x_0)$. Тоесть мы показали что $V(y(x)) \geq \alpha$, $\forall x > x_0$. Тогда рассмотрим разность $V(y(x)) - V(y(x_0))$ по теореме о среднем это равно:

$$\frac{dv}{dx}(\bar{\bar{x}})(x - x_0) = W(y(\bar{\bar{x}}), \bar{\bar{x}})(x - x_0) \geq \beta(x - x_0)$$

Мы показали, что $V \to +\infty$ при $x \longrightarrow +\infty$. А это противоречит условию 1, рну а тоогда $y(x) \equiv 0$ является устойчивым решением системы (1.9). $\square$

1.3 Приобразовангие линейной сиситемы к каноническому виду

Мы покажем что произвольную линейную неоднородную сисетмы можно привести к некоторому специальному каноническому виду.

Будем рассматриват линейную систему:

$$\frac{dy}{dx} = Ay + f(x) \tag{1.12}$$

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_2(x) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}, a_{i,j} = const$$

Сделаем замену переменной: $\widetilde{z}(x) = Ky,\ K = \begin{pmatrix} k_{1,1} & \dots & k_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n,1} & \dots & k_{n,n} \end{pmatrix},\ K$ — невырожденная.

$y = K^{-1}\widetilde{z}(x)$

$K^{-1}\dfrac{d\widetilde{z}}{dx} = Ak^{-1}\widetilde{z} + f(x)$

$\dfrac{d\widetilde{z}}{dx} = KAK^{-1}\widetilde{z} + Kf(x)$

Обозначим через $B = KAK^{-1}$, а через $\widetilde{g}(x) = Kf(x)$, тогда мы получим:

$$\frac{d\widetilde{z}}{dx} = B\widetilde{z} + \widetilde{g}(x) \tag{1.13}$$

Мы можем сделать так, что: $B = \begin{pmatrix} \Pi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \Pi_k \end{pmatrix}$, где $\Pi_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_j & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_j \end{pmatrix}$, где λ_j — собственные значения матрицы A.

Сделаем в системе (1.12) замену: $\widetilde{z} = \widetilde{K}y$, где $\widetilde{K}$ такова, что $\widetilde{B} = \widetilde{K}A\widetilde{K}^{-1}$ имеет нормальную Жорданову форму.

$$\frac{d\widetilde{z}}{dx} = \widetilde{B}\widetilde{z} + \widetilde{g}(x) \tag{1.14}$$

Система (1.14) распадается на k групп дифференциальных уравнений, где k — количество Жордановых блоков в матрице $\widetilde{B}$. Рассмотрим первуюгруппу в системе (1.14), соответствующему первому Жордановому блоку матрицы $\widetilde{B}$. Эта группа уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\widetilde{z_1}}{dx} = \lambda_1\widetilde{z_1} + \widetilde{g_1}(x) \\ \dfrac{d\widetilde{z_2}}{dx} = \widetilde{z_1} + \lambda_1\widetilde{z_2} + \widetilde{g_2}(x) \\ \dots \\ \dfrac{d\widetilde{z_{n_1}}}{dx} = \widetilde{z_{n_1-1}} + \lambda_1\widetilde{z_{n_1}} + \widetilde{g_{n_1}}(x) \end{cases} \tag{1.15}$$

Сделаем замену переменных:

$$z_1 = a_1\widetilde{z_1},\ z = a_2\widetilde{z_2}, \dots, z_{n_1} = a_{n_1}\widetilde{z_{n_1}} \tag{1.16}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = \lambda_1 z_1 + g_1(x) \\ \dfrac{dz_2}{dx} = \dfrac{a_2}{a_1} z_1 + \lambda_1 z_2 + g_2(x) \\ \dots \\ \dfrac{dz_{n_1}}{dx} = \dfrac{a_{n_1}}{a_{n_1-1}} z_{n_1-1} + \lambda_1 z_{n_1} + g_{n_1}(x) \end{cases}, \text{ где } g_1(x) = a_1 \widetilde{g_1}(x), \dots, g_{n_1}(x) = a_{n_1} \widetilde{g_{n_1}}(x)$$

Обозначим через $\alpha_1 - \dfrac{a_2}{a_1},\ \alpha_2 = \dfrac{a_3}{a_2},\ \dots,\ \alpha_{n_1-1} = \dfrac{a_{n_1}}{a_{n_1-1}}$.

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = \lambda_1 z_1 + g_1(x) \\ \dfrac{dz_2}{dx} = \alpha_1 z_1 + \lambda_1 z_2 + g_2(x) \\ \vdots \\ \dfrac{dz_{n_1}}{dx} = \alpha_{n_1-1} z_{n_1-1} + \lambda_1 z_{n_1} + g_{n_1}(x) \end{cases} \tag{1.17}$$

В (1.17) $\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1-1}$ можно сделать любыми напередзаданными, в часности сколь-угодно малыми по модулю, отличными от нуля. Для этого в замене (1.16) сделаем:

$$a_1 = 1,\ a_2 = \alpha_1,\ a_3 = \alpha_2 \cdot a_2,\ \dots, a_{n_1} = \alpha_{n_1-1} a_{n_1-1}$$

Мы придем к сисиме (1.17) диагональныеэлементы будут любыми, которые мы захотим заранее. Аналогично преобразованиям (1.16) сделаем замену в остальных группах уравнений, соответствующих остальным Жордановым блокам. Тогда эту замену можно записать: $Z = l\widetilde{z}$, где

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{n_1} \end{pmatrix}$$

Тогда $z = L\widetilde{K}y = \left\{ K = L\widetilde{K} \right\} = Ky$.

Тогда вод аткая замена систему (1.12) приводит в виду:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dz_1}{dx} = \lambda_1 z_1 + g_1(x) \\
\dfrac{dz_2}{dx} = \alpha_1 z_1 + \lambda_1 z_2 + g_2(x) \\
\dots \\
\dfrac{dz_{n_1}}{dx} = \alpha_{n_1-1} z_{n_1-1} + \lambda_1 z_{n_1} + g_{n_1}(x) \\
\dots \\
\dfrac{dz_{n-n_k+1}}{dx} = \lambda_k z_{n-n_k+1} + g_{n-n_k+1}(x) \\
\dfrac{dz_{n-n_k+2}}{dx} = \omega_1 z_{n-n_k+1} + \lambda_k z_{n-n_k+2} + g_{n-n_k+2}(x) \\
\dots \\
\dfrac{dz_n}{dx} = \omega_{n_k-1} z_{n-1} + \lambda_k z_n + g_n(x)
\end{cases}
\tag{1.18}
$$

В системе (1.18) $\alpha_i, \dots, \omega_i$ могут быть любыми напередзаданными, отличными от нуля. Систему линейных дифференциальных уравнений (1.18) называаот канонической системой.

Теорема (Ляпунова(Об устойчивости по первому приближению))**.** Будем рассматривать систему диференциальных уравнений

$$
\frac{dy}{dx} = f(x,y), \ y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \ f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix} \tag{1.19}
$$

Будем предполагать что $y(x) \equiv 0$ является решенияем (1.19), тогда $f(x,0) \equiv 0$ (Если это не так надобудет к нему привести)

Решения $y(x) \equiv 0$ системы (1.19) будет ассимптотически устойчивым если правую часть системы (1.19) можно придставить в виде

$$
f(x,y) = Ay + F(x,y) \tag{1.20}
$$

где A — постоянная матрица, у которой все собственные значения λ_i имеют отрицательные вещественные части, а $F(x,y) = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ \vdots \\ F_n(x,y) \end{pmatrix}$, $F_i(x,y)\,,\ i = \overline{1,n}$ непрерывно дифференцируемы, и при $x \geq x_0$ и y достаточно малых по норме, удовлетворяет неравенству

$$
||F(x,y)|| \leq M\,||y||^{1+\alpha} \tag{1.21}
$$

где $M, \alpha > 0$ — некоторые положительные постоянные.

Замечание. В частности правую часть системы (1.19) можно представить в виде (1.20), если $f(x,y)$ в (1.19) не зависит от x, и в окресности начала координат дважды непрерывно-дифференцируема по y_j.

$$f(x,y)=\begin{pmatrix} f_1(y)\\ \vdots \\ f_n(y)\end{pmatrix},\ f(x,0)\equiv 0$$

Можно применить формулу Тейлора:

$$\begin{cases} f_1(y)=0+\dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}(0)\,y_1+\ldots+\dfrac{\partial f_1}{\partial y_n}(0)\,y_n+O\left(||y||^2\right)\\ \vdots\\ f_n(y)=0+\dfrac{\partial f_n}{\partial y_1}(0)\,y_1+\ldots+\dfrac{\partial f_n}{\partial y_n}(0)\,y_n+O\left(||y||^2\right)\end{cases}$$

Тогда матрица A имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}(0) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_n}(0)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial f_n}{\partial y_1}(0) & \ldots & \dfrac{\partial f_n}{\partial y_n}(0)\end{pmatrix}$$

Для устойчивости нужно: $Re\,A_i<0$.

Доказательство. Если b — верещственное, то $b\le|b|$. В качестве нормы будем рассматоривать $||z||=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Если z — комплексное, то $|z_i|=\overline{|z_i|}$. Так же $-|z_i|\le||z||$.

В системе (1.19) сделаем замену

$$z=Ky \tag{1.22}$$

где K — невырожденная матрица, приводящая матрицу A к каноническому виду, причем все поддиагональные элементы $(\alpha_i,\ldots,\omega_i\le\dfrac{a}{4},\ a=-\max\limits_i Re\,\lambda_i)$. Но в обратном преобраховании $y=K^{-1}z$ будем рассматривать y вещественные.

Для доказательства будем пользоваться леммmой Ляпунова. В качестве функции Ляпунова возьмем

$$V(y)=||z||^2=||Ky||^2=\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2=\sum_{i=1}^{n}z_i\overline{z_i}$$

После преобразования (1.22) система (1.19) примет вид:

$$\frac{dz}{dx}=Bz+F^*(x,z)$$

где матрица B имеет вид: $B=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\\ \beta_1 & \lambda_1 & \ldots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_k & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ldots & \beta_{n-n_k+1} & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \beta_n & \lambda_k\end{pmatrix}$; $F^*=KF$; $F^*(x,z)=\begin{pmatrix} F_1^*(x,z)\\ \vdots\\ F_n^*(x,z)\end{pmatrix}$; $F_j^*(x,z)=\sum\limits_{l=1}^{n}K_{i,l}F_l$; $|\beta_i|\le\dfrac{a}{4},\ a=-\max\limits_i Re\,\lambda$

Докажем что:

$$\left|F_j^*(x,z)\right| \leq M^* \left|\left|z\right|\right|^{1+\alpha} \tag{1.23}$$

Действительно модем записать:

$$\left|F_j^*(x,z)\right| = \left|\sum_{l=1}^{n} K_{j,l}F_l\right| \leq M_1 \sum_{l=1}^{n} |F_l| \leq M_1 \cdot n \cdot ||F|| \leq \{1.21\} \leq M_2 \left|\left|y\right|\right|^{1+\alpha}$$

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} t_{1,1} & \dots & t_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n,1} & \dots & t_{n,n} \end{pmatrix}$$

Так как $y = K^{-1}z$, то $|y_j|^{1+\alpha} = \left|\sum\limits_{l=1}^{n} t_{j,l}z_l\right| \leq M_3 \cdot n \cdot \left|\left|z\right|\right|^{1+\alpha} \leq M_4 \left|\left|z\right|\right|^{1+\alpha}$. Ну а тогда очевидно, что справедлива оценка что

$$\left|F_j^*(x,z)\right| \leq M^* \left|\left|z\right|\right|^{1+\alpha} \ (1.23)$$

$$\frac{dz}{dx} = Bz + F^*(x,z) \tag{1.24}$$

$$\frac{dV}{dx} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d|z_i|^2}{dx} = \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{z_i}\frac{dz_i}{dx} + z_i\frac{d|z_i|}{dx}\right)$$

Выпишим группу уравнений системы (1.24), соответствующей Жордановому блоку матрици P.

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = \lambda_1 z_1 + F_1^* \\ \dfrac{dz_2}{dx} = \beta_1 z_1 + \lambda_1 z_2 + F_2^* \\ \vdots \\ \dfrac{dz_{n_1}}{dx} = \beta_1 z_{n_1-1} + \lambda_1 z_{n_1} + F_{n_1}^* \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{d|z_1|^2}{dx} &= \overline{z_1}\left(\lambda_1 z_1 + F_1^*\right) + z_1\left(\overline{\lambda_1}\overline{z_1} + \overline{F_1^*}\right) = \\ &= |z_1|^2 \cdot 2 \cdot \overline{Re\,\lambda_1} + \overline{z_1}F_1^* + z_1\overline{F_1^*} \end{aligned}$$

Так как $\overline{z_1}F_1^* + z_1\overline{F_1^*}$ — вещественное, то $\overline{z_1}F_1^* + z_1\overline{F_1^*} \leq \left|\overline{z_1}F_1^* + z_1\overline{F_1^*}\right|$

$$\begin{aligned} & |z_1|^2 \cdot 2 \cdot \overline{Re\,\lambda_1} + \overline{z_1}F_1^* + z_1\overline{F_1^*} \leq \\ \leq\ & |z_1|^2 \cdot 2 \cdot \overline{Re\,\lambda_1} + \left|\overline{z_1}F_1^* + z_1\overline{F_1^*}\right| \leq \\ \leq\ & |z_1|^2\, 2Re\,\lambda_1 + 2\,|z_1|\,|F_1^*| \leq \\ \leq\ & \left\{ |z_j| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{b} z_i^2} = |z| \right\} \leq \\ \leq\ & |z_1|^2\, 2Re\,\lambda_1 + 2\,||z|| \cdot M^* \left|\left|z\right|\right|^{1+\alpha} \end{aligned}$$

$$\frac{d|z_1|^2}{dx} \leq |z_1|^2 \cdot 2 \cdot Re\,\lambda_1 + 2 \cdot M^* \cdot \left|\left|z\right|\right|^{2+\alpha} \tag{1.25}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\left|z_i\right|^2}{dx} &= \overline{z_i}\frac{dz_i}{dx} + z_i\frac{d\overline{z_i}}{dx} = \\
&= \overline{z_i}\left(\beta z_{i-1} + \lambda_1 z_i + F_i^*\right) + z_i\left(\beta_1\overline{z_{i-1}} + \overline{\lambda_1}\overline{z_i} + \overline{F_i^*}\right) = \\
&= \left|z_i\right|^2 2Re\,\lambda_1 + \overline{z_i}\beta_1 z_{i-1} + z_i\beta_1\overline{z_{i-1}} + \overline{z_i}F_i^* + z_i\overline{F_i^*}
\end{aligned}$$

$\overline{z_i}\beta_1 z_{i-1} + z_i\beta_1\overline{z_{i-1}}$ — сумма комплексно-сопряженных — вещественное число, так же как и $\overline{z_i}F_i^* + z_i\overline{F_i^*}$.

$$\begin{aligned}
& \left|z_i\right|^2 2Re\,\lambda_1 + \overline{z_i}\beta_1 z_{i-1} + z_i\beta_1\overline{z_{i-1}} + \overline{z_i}F_i^* + z_i\overline{F_i^*} = \\
= \ & \left|z_i\right|^2 2Re\,\lambda_1 + 2\beta_1\left|z_i\right|\left|z_{i-1}\right| + 2\left|z_i\right|\left|F_i^*\right| \le \\
\le \ & \left\{2ab \le a^2 + b^2\right\} \le \\
\le \ & \left|z_i\right|^2 2Re\,\lambda_1 + \beta_1\left(\left|z_i\right|^2 + \left|z_{i-1}\right|^2\right) + 2\left|\left|z\right|\right| \cdot M^* \cdot \left|\left|z\right|\right|^{1+\alpha}
\end{aligned}$$

$$\frac{d\left|z_i\right|^2}{dx} \le \left|z_i\right|^2 2Re\,\lambda_1 + \beta_1\left|z_i\right|^2 + \beta_1\left|z_{i-1}\right|^2 + 2 \cdot M^* \cdot \left|\left|z\right|\right|^{2+\alpha} \qquad (1.26)$$

Аналогичные неравенства можно получить и для остальных z_i, используя остальные группы уравнений системы (1.24).

$Re\,\lambda_i \le -a$

Сцуммируя неравенства (1.25) и (1.26) по всем i от 1 до n, и учитывая неравенство выше, получим:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d\left|z_i\right|^2}{dx} = -2a\sum_{i=1}^{n}\left|z_i\right|^2 + \beta_1\sum_{i=2}^{n}\left|z_i\right|^2 + \beta_1\sum_{i=2}^{n}\left|z_{i-1}\right|^2 + 2M^*\left|\left|z\right|\right|^{2+\alpha}\sum_{i=1}^{n}1$$

так как $\left|\left|z\right|\right|^{2+\alpha} = \left(\left|\left|z\right|\right|^2\right)^{1+\frac{\alpha}{2}}$, то

$$\frac{dV}{dx} \le -2aV + 2\beta_1 V + 2M^* n V^{1+\frac{\alpha}{2}}$$

Поскольку в Лемме Ляпонова неравенство $\frac{dV}{dx} \le -W$ должно выполняться при достаточно малых y ($\left|\left|y\right|\right| < \varepsilon_0$) то выберем y по норме настолько малым, чтобы $2M^* n V^{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{a}{2}$, тоесть $V^{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{a}{4M^*4}$.

$$\frac{dV}{dx} \le -2aV + \frac{a}{2}V + \frac{a}{2}V = -aV$$

Полагая $w = aV$ видим, что условия леммы Ляпунова выполнены. □

Замечание. Если у матрици A будет хоть одно значение с положительной вещественной частью или же они будут равны нулю, то решение системы будет неустойчиво.

1.4 Критерий Рауса-Гурвица

Пусть у нас есть A — вещественная матрица, тогда $det\,(A - \lambda E) = 0$ — многочлен n-ной степени вида

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n + 0 \qquad (1.27)$$

И тогда не решая уравнение (1.27) можно определить, лежат ли корни в левой полуплоскости или нет.

Пусть все коэфициенты уравнения (1.27) вещественные и $a_0 > 0$. Для того, чтобы все корни уравнения (1.27) имели отрицательные вещественные части необходимо и достаточно чтобы все главные диагональные миноры матрици:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = a_1 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0,\ \dots$$

Заметим, что из Критерия Раусса-Гурвица следует, что необходимым, но не достаточным условием, чтобы все корди уравнения (1.27) имели отрицательные вещественные части, является, чтобы все коэффициенты уравнения (1.27) были положительными.

2 Поведение траекторий линейной однородной системы дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

Будем рассматривать систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{1,1}x_1 = a_{1,2}x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 \end{cases} \tag{2.1}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{dx}{dy} = Ax$$

$a_{i,j} = const,\ i, j = 1, 2$
Наша задача показать как ведут себя траэктории системы (2.1).
Рассмотрим все возможные случаи.

1. Пусть все собственные значения матрици A вещественные, различные и отличные от нуля ($\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0$).

Тогда λ_1 будет соответствовать собственный вектор $h^{(1)}$, а λ_2 — $h^{(2)}$. тогда общее решение будет иметь вид: $x\left(t\right) = c_1 e^{\lambda_1 t} h^{(1)} = c_2 e^{\lambda_2 t} h^{(2)}$. Собственные вектора, соответствующие разным собственным значениям линейно не зависимы, и образхуют базис на плоскости x_1, x_2. Обозначим через $y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}$, через $y_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}$ — координаты вектора x в базисе $h^{(1)}, h^{(2)}$. Если $c_1 = 0$ и $c_2 = 0$, то мы получаенм решение — начало координат, если $c_1 = 0$, а $c_2 > 0$, то решение будет прямая, направленная вдоль оси y_2.

(a) Рассмотрим случай, что $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0$.

Получается что ...

...

Будем предпологать, что $|\lambda_1| < |\lambda_2|$.

$\dfrac{dy_2}{dy_1} = \dfrac{c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t}} = \dfrac{c_2 \lambda_2}{c_1 \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$ А так как $(\lambda_2 - \lambda_1) < 0$, то это все $\longrightarrow 0$ при $t \longrightarrow +\infty$.

Стрелки указывают направление движение по траэктории при возрастании t.

Такое расположение траэкторий называется устойчивым узлом.

(b) $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ |\lambda_1| < |\lambda_2|$

Тогда у нас получится, что:

$y_1, y_2 \longrightarrow +\infty$ при $t \longrightarrow +\infty$

$y_1, y_2 \longrightarrow +0$ при $t \longrightarrow -\infty$

$\dfrac{dy_2}{dy_1} \longrightarrow 0$ при $t \longrightarrow -\infty$

Полуячим такоеже расположение траэкторий, только двигаться по ним будем в противоположном направлении.

Такое положение траэктории называется неустойчивым узлом.

(c) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ Собственные значения матрици A различных знаков.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1\left(x_1, x_2\right) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2\left(x_1, x_2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1\left(x_1, x_2\right) = 0 \\ f_2\left(x_1, x_2\right) = 0 \end{cases}$$

$\lambda_1 \Longrightarrow h^{(1)},\ \lambda_2 \Longrightarrow h^{(2)}$

$x\left(t\right) = c_1 e^{\lambda_1 t} h^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 t} h^{(2)}$

$y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t},\ y_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}$

Пусть $c_1 > 0,\ c_2 > 0$.

$t \longrightarrow +\infty$: $y_1 \longrightarrow 0$, $y_2 \longrightarrow +\infty$.

$t \longrightarrow +\infty : y_1 \longrightarrow +\infty$, $y_2 \longrightarrow 0$

Ткаое поведение траэкторрии называется сидлом.

(d) Собственные значения матрици A комплексно-сопряженные.

$\lambda = \mu + i\nu$, $\overline{\lambda} = \mu - i\nu$, $\nu \neq 0$

$h = \frac{1}{2}\left(h^{(1)} - ih^{(2)}\right)$, $\overline{h} = \frac{1}{2} = \left(h^{(1)} + ih^{(2)}\right)$

$h^{(1)}$ и $h^{(2)}$ вещественные вектора, причем они линейно независимы.

Тогда общее решение системы (1) имеет вид: $x(t) = c_1 e^{\lambda t} h + c_2 e^{\overline{\lambda} t} \overline{h}$. Причем оно будет комплекснозначным.

В силу утверждения о вещественности решения с комплексными собственными значениями решение (2) будет вещественным тогда и тольткот тогда, когда c_1 и c_2 комплексносопряженне. ($c_1 = \overline{c_2}$). Тогда общее вещественное решение системы (1) в рассматрирваемом слечае будет иметь вид:

$$x(t) = c e^{\lambda t} h + \overline{c} e^{\overline{\lambda} t} \overline{h}$$

$c = R e^{i\alpha}$

$$\begin{aligned} x(t) &= R e^{i\alpha} e^{(\mu + i\nu)t} \frac{1}{2}\left(h^{(1)} - i h^{(2)}\right) + R e^{-i\alpha} e^{(\mu - i\nu)} \frac{1}{2}\left(h^{(1)} + i h^{(2)}\right) = \\ &= R e^{\mu t} \frac{e^{i(\alpha + \nu t)} + e^{-i(\alpha + \nu t)}}{2} h^{(1)} - i R e^{\mu t} \frac{e^{i(\alpha + \nu t)} - e^{-i(\alpha + \mu t)}}{2} h^{(2)} = \\ &= R e^{\mu t} \cos(\alpha + \nu t) h^{(1)} + R e^{\mu t} \sin(\alpha + \nu t) h^{(2)} \end{aligned}$$

$y_1 = R e^{\mu t} \cos(\alpha + \nu t)$, $y_2 = R e^{\mu t} \sin(\alpha + \nu t)$

$R = 0$ — мы получаем особую точку — начало координат.

Пусть в начале $\mu < 0$, тогда мы получим что и y_1 и y_2 будут стремиться к нулю при $t \longrightarrow +\infty$.

Если $t \longrightarrow -\infty$, то $y_1 \longrightarrow +\infty$, $y_2 \longrightarrow +\infty$.

$\nu > 0$ — Траэктории закручиваются против часовой стрелке.

$\nu < 0$ — Траэктории закручиваются по часовой стрелке

Такое поведение траэкторииин называется уистойчивым фокусом.

$\mu > 0$

$y_1^2 + y_2^2 \longrightarrow +\infty$ при $t \longrightarrow +\infty$

y_1, $y_2 \longrightarrow 0$ при $t \longrightarrow -\infty$

$\nu > 0$ — Траэктории будут раскручиваться против часовой стрелки.

$\nu < 0$ — Траэктории будут раскручиваться по часовой стрелке

Такое поведение траэкторий называется неусточчивым фокусом.

$\mu = 0$

$y_1 = R\cos(\alpha + \nu t)\,,\ y_2 = R\sin(\alpha + \nu t)$

Траэкториями в этом случае будут замкнутыми кривыми — эллипсами.

$\nu > 0$ — движение против часовой стрелке. $\nu < 0$ — по часовой стрелке.

Направление закручиности определяем по вектору скорости.

Такое поведение траэкторий назывпется центром. Центр будет устойчивым положением равновесия, но не ассимптотически устойчивым.

(e) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$

Общее решение системы (1) — $x(t) = c_1 h^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 t} h^{(2)}$.

$$\begin{cases} y_1 = c_1 \\ y_2 = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

Если $c_2 = 0$ тогда любая точка, которая расположена на оси y_1 будет решением системы (1).

Если $c_2 \neq 0$, то c_1 мы зафтиксированли, а y_2будет стремиться либо к 0, либо к ∞.

$\lambda_2 < 0$

$y_2 \longrightarrow 0$ при $t \longrightarrow +\infty$. Этио будут лучи, параленльные оси y_2 и направленные к оси y_2.

$\lambda_2 > 0$

$y_2 \longrightarrow +\infty$ при $t \longrightarrow +\infty$. Это будут лучи паралельные y_2 с направлением движение от оси y_2

В этом случае бусконечно много положений равновесия.

(f) Собственные значения кратные. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

Сдесь возможны 2 случчая, когда этому собсивенныому соответствует либо один либо 2 собственных вектора.

i. Кратному значению соответствуюет 2 собственных вектора
$Ah^{(1)} = \lambda h^{(2)},\ Ah^{(2)} = \lambda h^{(2)}$
$x(t) = c_1 e^{\lambda t} h^{(1)} + c_2 e^{\lambda t} h^{(2)}$
$y_1 = c_1 e^{\lambda t},\ y_2 = c_2 e^{\lambda t}$
Заметим что $\dfrac{y_2}{y_1} = \dfrac{c_2}{c_1}$. — Отношение координат постоянное.
Это лучи, которые если $\lambda < 0$ направлены к начала координат, а есть $\lambda > 0$ то лучи направлены от начала координат.
Такое положение равновесия — устойчивый дикретический узел. А второе — неустойчивый дикретический узел.

ii. Кратному собственному згначению соответствует 1 собственный вектор
Тогда у нас будет еще присоедененный вектор.
$Ah^{(1)} = \lambda h^{(2)},\ Ah^{(2)} = \lambda h^{(2)} + h^{(1)}$
$x(t) = c_1 e^{\lambda t} h^{(1)} + c_2 e^{\lambda t} \left(h^{(1)} t + h^{(2)}\right) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t} h^{(1)} + c_2 e^{\lambda t} h^{(2)}$
Пусть $\lambda < 0$, $c_2 = 0$
...
Это устойчивый вырожденный узел.
Пусть $\lambda > 0$
.....
Неустойчивый вырожденный узел.

Нелинейные системы

2.1 Положения равновесия автономной системы второго порядка

Рассмотрим нормальную автономную систему второго порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \dfrac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases} \tag{2.2}$$

Положения равновесия:

$$\begin{cases} f\left(x,y\right)=0 \\ g\left(x,y\right)=0 \end{cases}$$

Будем полагать что точка $(0,0)$ является положением равновесия. Будем предполагать что функции f и g достаточно гладкие, тогда проведем линеаризацию системы (2.2) в окрестности начала координат. Для этого функции f и g разложим в ряд Тейлора по x и y и оставим только линейные слагаемые.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial f\left(0,0\right)}{\partial x}x + \frac{\partial f\left(0,0\right)}{\partial y}y \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial g\left(0,0\right)}{\partial x}x + \frac{\partial g\left(0,0\right)}{\partial y}y \end{aligned} \tag{2.3}$$

Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f\left(0,0\right)}{\partial x} & \dfrac{\partial f\left(0,0\right)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g\left(0,0\right)}{\partial x} & \dfrac{\partial g\left(0,0\right)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Определение. Положение равновесия $(0,0)$ системы (2.2) называется невырожденным если собственные значения матрицы A различные и вещественные части их отличны от нуля.

Определение. Если λ и μ вещественные и различные отрицательные, то положение равновесия $(0,0)$ системы 1 является устойчивым узлом, иначе неустойчивым узлом.

Определение. Если λ и μ комплексно сопряженные и их вещественная часть отрицательная, то положение равновесия называется устойчивым фокусом.

Определение. Если λ и μ комплексно сопряженные и их вещественная часть положительная, то положение равновесия называется неустойчивым фокусом.

Определение. Если λ и μ вещественные разных знаков, то положение равновесия называется седлом.

Для невырожденого положения равновесия поведения траекторий вблизи $(0,0)$ системы (2.2) в существенном совпадает с поведением траекторий вблизи положения равновесия $(0,0)$ системы (2.3).

Теорема (1)**.** *Пусть положение равновесия $(0,0)$ системы (2.2) является седлом. Пусть P — прямая, проходящая через начало координат вдлоль собственного вектора матрицы A соответствующего отрицательному собственному значению, а Q — прямая, проходящая через начало координат вдоль собственного вектора, соответствующего положительному собственному значению матрицы A. Тогда фазовая картина вблизи положения равновесия $(0,0)$ имеет вид (Рисунок). Тоесть существуют ровно две траектории u_1 и u_2 системы (2.2) которые при $t \to +\infty$ ассимптотически приближаются. Эти траектории вместе с точкой O образуют непрерывно дифференцируемую кривую вместе с этой точкой, касающуюся прямой P в точке O. Точно так же существуют ровно две траектории v_1, v_2, которые при $t \to -\infty$ ассимптотически приближаются к точке O. Эти траектории вместе с точкой O образуют непрерывно* *дифференцируемую кривую, касающуюся прямой Q в точке O. Остальные траектории проходящие вблизи точки O ведут себя в общем так же, как в случае линейной системы.*

Теорема (2)**.** *Пусть точка $O\left(0,0\right)$ является фокусом системы (2.2), тоесть матрица A линеаризованной системы имеет собственные значения $\lambda = \mu + i\nu$, $\overline{\lambda} = \mu - i\nu \quad \mu,\nu \neq 0$. Если $\mu < 0$ то при $t \to +\infty$ все траектории проходящие вблизи точки O наматываются на начало координат как спирали. Если $\mu > 0$ то при $t \to -\infty$ все траектории, проходящие вблизи точки O наматываются на начало координат как спирали.*

Доказательство. Разложим правые части системы 1 в ряд Тейлора:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + r\left(x,y\right) \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + s\left(x,y\right) \end{cases} \tag{2.4}$$

Где r, s — функции, которые можно записать так:

$$\begin{aligned} r\left(x,y\right) &= r_{11}\left(x,y\right)x^2 + r_{12}\left(x,y\right)xy + r_{22}\left(x,y\right)y^2 \\ s\left(x,y\right) &= s_{11}\left(x,y\right)x^2 + s_{12}\left(x,y\right)xy + s_{22}\left(x,y\right)y^2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

r_{ij}, s_{ij} — функции, ограниченные вблизи начала координат.

Известно, что существует невырожденная вещественная матрица K, такая что

$$KAK^{-1} = \begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}$$

Сделаем замену переменных в системе 3:

$$\xi = k_{11}x + k_{12}y \qquad\qquad \eta = k_{21}x + k_{22}y$$

Тогда система 3 преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \mu\xi - \nu\eta + r_1\left(\xi,\eta\right) \\ \frac{d\eta}{dt} &= \nu\xi + \mu\eta + s_1\left(\xi,\eta\right) \end{aligned} \tag{2.6}$$

r_1, s_1имеют вид аналогичный 4.

В системе 5 перейдем к полярным координатам:

$$\xi = \rho\cos\varphi \qquad\qquad \eta = \rho\sin\varphi \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt}\cos\varphi - \rho\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} &= \mu\rho\cos\varphi - \nu\rho\sin\varphi + r_1\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right) \\ \frac{d\rho}{dt}\sin\varphi + \rho\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} &= \nu\rho\cos\varphi + \mu\rho\sin\varphi + s_1\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right) \end{aligned}$$

Разрешим эту систему относительно $\frac{d\rho}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}$:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \mu\rho + \rho^2 \cdot p\left(\rho,\varphi\right) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \nu + \rho \cdot q\left(\rho,\varphi\right) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Где $p(\rho,\varphi)$ и $q(\rho,\varphi)$ — ограниченные при малых ρ и преиодические по φ с периодом 2π.

Пусть для определенности $\mu < 0$ рассмотрим траектории системы 7 начинающиеся в точке (ρ_0, φ_0) $0 < \rho_0 < \varepsilon$ где $\varepsilon \to 0$.

Поскольку $\mu < 0$, это по теореме Ляпунова, стсемы (1) при $t \to +\infty$ будут стремиться к точке $(0;0)$. $\rho_0(\mu + \rho_0 \cdot p(\rho_0, \varphi_0)) \implies \left.\frac{dp}{dt}\right|_{(\rho_0;\varphi_0)} < 0 \implies \rho_0 \longrightarrow 0 \,\&\, t \longrightarrow +\infty$.

Знак прапвой части второго уравнения будет совподать со знаком ν, поэтому $\varphi \longrightarrow +\infty$ при $\nu > 0$ и $\varphi \longrightarrow -\infty$ при $\nu < 0$. Следовательно, рассматриваемая траэктория на плоскости (x,y) наматывается как спираль на $(0;0)$. $\square$

Теорема (3)**.** *Пусть точка $O(0,0)$ — устойчивый узел системы (2.2) и для собственных значений справедливо неравенство: $\mu < \lambda < 0$ в направлении собственного вектора соответствующего собственному значению λ через точку O проведем прямую P, а в направлении собственного вектора соответствующего собственному значению μ проведем прямую Q. Тогда каждая траектория, начинающаяся достаточно близко к точке O ассимптотически приближается к точке O и имеет в точке O касательную. При этом только две траектории касаются прямой Q, подходя к точке O с противоположных сторон, остальные траектории касаются прямой P. В случае неустойчивого узла, поведение траекторий при $t \to -\infty$ аналогично.*

2.2 Предельные циклы

Будем рассматривать автономную систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \tag{2.9}$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \ \ (2.9)$$

Определение. Предельным циклом системы (2.9) называется изолированое переодическое решение этой системы.

Пусть $x = \varphi(t)$ переождическое решение системы (2.9), а k — замкнутая траэктория, которую описывает вод это переодическое решение. Тогда $\varphi(t)$ — предельный цикл (или k), если существует некоторое δ, что любая траэктория системы (2.9), проходящая на расстоянии меньше δ от траэктории k, не является переодическим решением. Поскольку траэктории системы (2.9) не могут пересекаться в силу теоремы единственности, то замкнутая траэктория k разбивает фазовую плоскость (x_1, x_2) на две области (внутреннюю и внешнюю по отношению к k), также разбивает траэктории на две группы (находящейся во внешней или во внутренней области по отношению к k).

Теорема. *Пусть $\varphi(t)$ — предельный цикл системы (2.9) и k — замкнутая траектория, описываемая этим решением на фазовой плоскости (x_1, x_2). Тогда как для внешних так и для внутренних траекторий имеются две взаимно исключающие друг друга возможности поведения вблизи k. А именно: все внутренние траектории начинающиеся вблизи k наматываются на k как спирали, либо при $t \longrightarrow +\infty$ либо при $t \longrightarrow -\infty$. Тоже самое справедливо и для внешних траекторий. Если все траектории как внешние так и внутренние, начинающиеся вблизи k наматываются на k при $t \longrightarrow +\infty$ то предельный цикл называется устойчивым или аттрактором. Если все траектории, начинающиеся вблизи k, наматываются на k при $t \longrightarrow -\infty$ то предельный цикл называется вполне неустойчивым или репеллером. В дух других случаях предельный цикл называется полустойчивым (если внутренние наматываются а внешние разматываются, или наоборот).*

2.3 Устойчивость переодических решений

Рассмотрим систему линейных дифференцальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{1,1}(t)\,x_1 + \ldots + a_{1,n}(t)\,x_n \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n,1}(t)\,x_1 + \ldots + a_{n,n}(t)\,x_n \end{cases} \tag{2.10}$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & \ldots & a_{1,n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}(t) & \ldots & a_{n,n}(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x \ (2.10)$$

Если Φ_1 и Φ_2 — две фундаментальные матрици системы (2.10) , то найдется невырожденная постоянная матрица Φ, такая что:

$$\Phi_2(t) = \Phi_1(t) \cdot P \tag{2.11}$$

Предположим что коэфициенты системы (2.10) являются переодическими функциями с периодом τ. $a_{i,j}(t+\tau) = a_{i,j}(t)\,,\ i,j = \overline{1,n}$ или $A(t+\tau) = A(t)$.

Пусть $\varphi(t)$ — фундаментальная матрица системы (2.10), тогда найдется постоянноая невырожденная матрица C что выполнится равенство:

$$\Phi(t+\tau) = \Phi(t) \cdot C \tag{2.12}$$

Матрица C называется основной для фундаментальной матрици Φ.

Так как $\Phi(t)$ — фундаменталдьная матрица системы (2.10), то:

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = A(t)\,\Phi(t)$$

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = A(t+\tau)\,\Phi(t+\tau)$$
$$\frac{d\Phi(t+\tau)}{dt} = A(t)\,\Phi(t+\tau)$$

Тоесть $\Phi(t+\tau)$ также является фундаментальной матрицей системы (2.10). А тогда в силу (2.11) найдется постоянная невырожденная матрица C, что будет справедлива (2.12).

Пусть Φ_1 и Φ_2 — две фундаментальные матрци системы (2.10), а соответственно C_1 и C_2 их основные матрции, тоесть $\Phi_1(t+\tau) = \Phi_1(t)\,C_1$ и $\Phi_2(t+\tau) = \Phi_2(t)\,C_2$ тогда эти матрци будут связаны соотношением: $C_2 = P^{-1}C_1P$, где P — некоторая невырожденная постоянная матрциа.

Доказательство. Так как Φ_1 и Φ_2 фундаментальные матрици, то существет невырожденная матрици P, что справедливо равенство (2.11).

$$\Phi_1(t) = \Phi_2(t)\,P^{-1}$$

$$\begin{aligned}\Phi_2(t+\tau) &= \Phi_1(t+\tau)\,P = \\ &= \Phi_1(t)\,C_1P = \\ &= \Phi_2(t)\,P^{-1}C_1P\end{aligned}$$

С одной стороны: $\Phi_2(t+\tau) = \Phi_2(t)\,P^{-1}C_1P$, а с другой стороны: $\Phi_2(t+\tau) = \Phi_2(t)\,C_2$. А тогда в силу того что левые части равны, то равны и правые части, а тогда получим:

$$\Phi_2(t)\,P^{-1}C_1P = \Phi_2(t)\,C_2$$
$$\Phi_2(t)\left(P^{-1}C_1P - C_2\right) = 0$$

В силу того что $\Phi_2(t)$ — фундаментальная матрица, то следует что: $C_2 = P^{-1}C_1P$. □

Собственные значения для остоыных матрици сисстемы (2.10) являются инвариантными.

Определение. Собственные матрици C называются характеристическими числами системы (2.10).

Будем рассматривать систему уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = f(f,x) \tag{2.13}$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$f(t,x) = \begin{pmatrix} f_1(t,x) \\ \vdots \\ f_n(t,x) \end{pmatrix}$$

Будем рассматривать сисатемы (2.13) с переодическими правыми частями, тоесть $f(t+\tau, x) = f(t, x)$, илиже автономные системы: $f(t, x) = f(x)$.

И будем исследовать вопрос устойчивости переодических решений $\varphi(t)$ с периодом τ.

$$\varphi(t+\tau) = \varphi(t)$$

Проведем линеоризацию сиатемы (2.13) на переодическом решении $\varphi(t)$. Для этогот в системе (2.13) сделаем замену:

$$x(t) = \varphi(t) + y(t)$$

Где $x(t)$ — это новыя неизвесная вектор-функция. Подставим и получим:

$$\frac{d\varphi}{dt} + \frac{dy}{dt} = f(t, \varphi(t) + y(t)) \tag{2.14}$$

Разложим правые части в ряд Тейлора по y в окресности $\varphi(t)$.

$$\begin{gathered}
f_1(t, \varphi(t) + y(t)) = f_1(t, \varphi(t)) + \frac{\partial f_1(t, \varphi(t))}{\partial x_1} y_1 + \ldots + \frac{\partial f_1(t, y(t))}{\partial x_n} y_n + r_1(t, y) \\
\vdots \\
f_n(t, \varphi(t) + y(t)) = f_n(t, \varphi(t)) + \frac{\partial f_n(t, \varphi(t))}{\partial x_1} y_1 + \ldots + \frac{\partial f_n(t, y(t))}{\partial x_n} y_n + r_n(t, y)
\end{gathered}$$

Тогда (2.14) принимает вид:

$$\frac{d\varphi}{dt} + \frac{dy}{dt} = f(t, \varphi(t)) + A(t) y + r(t, y) \tag{2.15}$$

Где $A(t)$ — матрица $A(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(t, \varphi(t))}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(t, \varphi(t))}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(t, \varphi(t))}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(t, \varphi(t))}{\partial x_n} \end{pmatrix}$. $a_{i,j}(t) = \frac{\partial f_i(t, x(t))}{\partial x_j}$

$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$. $r(t, y) = \begin{pmatrix} r_1(t, y) \\ \vdots \\ r_n(t, x) \end{pmatrix}$.

Так как $\varphi(t)$ является решением системы (2.13), то отбрасывая слогаемые вторго порядка малости по y — r, получим линеоризованную систему.

$$\frac{dy}{dt} = A(t) y \tag{2.16}$$

Если правые части системы (2.13) переодичны с периодом τ $(f(t+\tau, x) = f(t, x))$, и решение тоже переодическое с решением τ $(\varphi(t+\tau) = \varphi(t))$, то линеоризованная система (2.16) такаже являестя переодической с переиодом τ $(a_{i,j}(t+\tau) = a_{i,j}(t),\ i, j = \overline{1, n})$. Поэтому можно говорить о характеристических числах системы (2.16).

Покажем, что если система (2.13) является автономной, а ее переодическое решение $\varphi(t+\tau) = \varphi(t)$ отлично от положения равновесия $(\varphi(t) \neq C)$, то линейная система (2.16) обязательно имеет характеристическое число, равное еденице.

Пусть $\Phi(t)$ — фундаментальная матримца системы (2.16) и в некоторой точке t_0 это есть фундаментальная матрица, а C — ее основная матрица.

$$\begin{gathered}\frac{d\Phi}{dt} = A(t)\,\Phi \\ \Phi(t_0) = E\end{gathered} \tag{2.17}$$

$$\Phi(t+\tau) = \Phi(t)\,C \tag{2.18}$$

$\psi(t)$ — некоторое решение сисетмы (2.16)

$$\psi(t) = \Phi(t)\,\psi(t_0)$$

$$\Phi(t_0)\,\psi(t_0) = \psi(y_0)$$

$$\psi(t_0+\tau) = \Phi(t_0+\tau)\,\psi(t_0) = \Phi(t_0)\,C\psi(t_0)$$

$$\psi(t_0+\tau) = C\psi(t_0) \tag{2.19}$$

Для оюбого регения системы (2.16) будет справедливо равенство (2.19).

Пусть $\varphi(t)$ — переодическое решение системы.

$$\frac{d\varphi}{dt} = f(\varphi(t))$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = A(t)\,\frac{d\varphi}{dt}$$

$\dfrac{d\varphi}{dt}$ — является решением системы (2.16).

$$\frac{d\varphi(t+\tau)}{dt} = \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

В силу переодичности решения:

$$\frac{d\varphi(t_0)}{dt} = \frac{d\varphi(t_0+\tau)}{dt}$$

В силу (2.19) получим:

$$\frac{d\varphi(t_0+\tau)}{dt} = C\frac{d\varphi(t_0)}{dt}$$

В итоге:

$$C\frac{d\varphi(t_0)}{dt} = \frac{d\varphi(t_0)}{dt}$$

Тоесть еденица является характеристическим число системы (2.16).

Теорема (Ляпунова)**.** *Система (2.13) переодична по τ с периудом τ, и $\varphi(t)$ — переодическое решение системы (2.13) с периудом τ. Если все характеристические числа системы (2.16) по модулю меньше еденицы, то переодическое решение $\varphi(t)$ — ассимптотически устойчиво, причем любое решение, начинающиеся вблизи $\varphi(t)$, будет стремиться к $\varphi(t)$ эксподенциальным образом.*

Доказательство. Без доказательства. □

Теорема (Андронного-Витте)**.** *Пусть система (2.13) автономна, и $\varphi(t)$ — ее переодическое решение с периодом τ, отличное от положения равновесия. Если характеристическое число системы (2.16) равное еденице имеет кратность 1, а все остальные характеристические числа системы (2.16) по модулю меньше еденицы, то $\varphi(t)$ — устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. Без доказательства. □

2.4 Краевые задачи

Для выделение единственного решения дифференциального уравненпия нужно задавать дополнительные условия. Если дополнительные условия задаются в одной точке то они называются условиями Коши, а дифференциальное уравнение и эти условия называются задачей Коши. Если дополнительные условия задаются более чем в одной точке, то они называаются краевыми или граничными, ну а дифференциальное уравнение и дополнительные условия называются краевой задачей.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b(t)\frac{dx}{dt} + a(t)x = f(t), \ t \in [t_1, t_2]$$
$$\alpha_1 x(t_1) + \beta_1 x\prime(t_1) = \gamma_1$$
$$\alpha_1 x(t_1) + \beta_2 x\prime(t_2) = \gamma_2$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ — заданные постоянные, причем предпологается, что α_i и β_i одновременно в нуль не обращаются.Тоесть $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0, \ i = \overline{1,2}$. Если γ_1 и γ_2 равны нулю, то краевые условия называются однородными. Если и уравнение однородное, то тогда краевая задача называется однородной. Если $\beta_1 = \beta_2 = 0$ то граничные услогвия называются условиями первого рода. Если $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, то тогда граничные условия называются условиями второго рода. Если α_i и β_i одновременно не равны нулю, то в этом случае граничные условия называются условиями третьего рода.

Сделаем парочку упрощений:

1. Уберем первую производную.

   МОжно сделать замену, с помощью которой можно избавится от первой производной.

$$x(t) = y(t) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t} b(\xi)\,d\xi\right)$$

2. Будем считать, что $t \in [0; 1]$

$$\tau = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}$$

Без ограничения общности неоднородное дифференциальное уравнения можно рассматривать с однородными граничными условиями.

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0$$

Если это не так, то можно селать замену:

$$x(t) = y(t) + z(t)$$

где $x(t)$ — любая функция, удовлетворяющая граничным условиям. Например если задано граниченое условия первого рода $x(t_1) = \gamma_1$, $x(t_2) = \gamma_2$, то в качестве $y(t)$ можно взять линейную функцию: $y(t) = \gamma_1(1-t) + \gamma_2 \cdot t$.

Для простоты будем предпологать что $\beta_1 = \beta_2 = 0$.

В дальнейшем будем рассматривать вод такую задачу:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a(t)x = f(t), \ t \in [0;1] \tag{2.20}$$

$$x(0) = x(1) = 0 \tag{2.21}$$

Всюду в дальнейшем будем предпологать, что функции $a(t)$ и $f(t)$ заданы и непрерывны на отрезке $[0;1]$.

Пример. $\begin{cases} x'' + b^2x = f(t) \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases} \qquad \lambda^2 + b^2 = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm bi$

$x(t) = c_1 \cos bt + c_2 \sin bt$

$\begin{cases} c_1'(t)\cos bt + c_2'(t)\sin bt = 0 \\ -c_1'(t)\, b\sin bt + c_2'(t)\, b\cos bt = f(t) \end{cases}$

$\begin{cases} c_2'(t) = \dfrac{1}{b}\cos bt \cdot f(t) \\ c_1'(t) = -\dfrac{1}{b}\sin bt \cdot f(t) \end{cases}$

Проинтегрировав, погсставив и немного упростив, мы получим, что общее решение этой задачи будет иметь вид:

$x(t) = c_1 \cos bt + c_2 \sin bt + \dfrac{1}{b}\int\limits_0^t \sin(t-s)\, f(s)\, ds$

Должно выполняться: $c_1 + c_2 \cdot 0 = 0$

$c_1 \cos b + c_2 \sin b + \dfrac{1}{b}\int\limits_0^1 \sin b(1-s)\, f(s)\, ds = 0$

$c_1 = 0$

Если $\sin b \neq 0$, то алгебраическая система разрешима, причем единственно, ну а следовательно и рассматриваемая краевая задача емеет единственное решение.

Если же $\sin b = 0$, то в этом слкучае система разрешима не при любой функции $f(t)$, ну а следовательно и краевая задача разрешима не при любой $f(t)$, так как если $\sin b = 0$, то должно выполняться: $\int\limits_0^1 \sin b(1-s)\, f(s)\, ds = 0$.

Если же интеграл равен нулю, то краевая задача имеет бесконечно много решений, а если необращается в ноль, то не тимеет их совсем. Заметим, что если $\sin b = 0$, то сооотответствующая однородная краевая задача:

$$\begin{cases} x'' + b^2x = 0 \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}$$

имеет ненулевое решение, а имнно $x = \sin bt$, а если $\sin b \neq 0$, то эта задача имеет толькот нулевое решение.

2.5 Альтернатива Фредгольма

Утверждение. Либа краевая задача (2.20,2.21) при любой правой части $f(t)$ имеет решения, либо соответствующая однородная задача имеет ненулевое решение.

Иначе говоря, чтобы задача (2.20,2.21) была разрешима при любой $f(t)$, неоюходимо и доастаточно чтобы соответствующая однородная краевая задачаимела только нулевое решение.

Доказательство. Пусть однородная краевая задача имеет решения отличное от тождественного нуля. Пусть $x(t) \neq 0$, удовлетворяет такой краевой задачи:

$$\begin{cases} x_1{''}(t) + a(t)\,x_1(t) = 0 \\ x_1(0) = x_2(1) = 0 \end{cases}$$

Покажем что в этом случае задача (2.20,2.21) разрешима не при любой $f(t)$. Обозначим через $x_2(t)$ какое нибудь решения однордного дифференциального уравнения $x_2{''}(t) + a(t)\,x_2(t) = 0$, линейно независимое с $x_1(t)$.

Тогда определитель Вронсткого $W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1{'}(t) & x_2{'}(t) \end{vmatrix} \neq 0$, построенный по этим функциям, никогда не обращается в ноль (поскольку они линейно не зависимы). Более того, в силу теоремы Лиуввилля $W(t) = const$.

$W(0) = \begin{vmatrix} 0 & x_2(0) \\ x_1{'}(0) & x_2{'}(0) \end{vmatrix} = -x_1{'}(0)\,x_2(0) \neq 0$

Аналогимчно показываем, что $x_2(1) \neq 0$.

Тоесть x_1 и x_2 образуют функциональную систему соответствуемого линейного однородного дифференциального уравнения.

Тогда общее решение уравнения (2.20) имеет вид:

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \int\limits_0^t \frac{x_2(t)\,x_1(s) - x_2(s)\,x_1(t)}{W(s)} f(s)\,ds \tag{2.22}$$

Это следуем из:

$$\begin{cases} c_1{'}(t)\,x_1(t) + c_2{'}(t)\,x_2(t) = 0 \\ c_1{'}(t)\,x_1{'}(t) + c_2{'}(t)\,x_2{'}(t) = f(t) \end{cases}$$

Чтобы $x(t)$ вида (2.22) удовлетворяла граничным условиям (2.21) постоянные c_1 и c_2 должны удовлетворять слудующей алгебраической системе:

$$\begin{gathered} c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot x_2(0) = 0 \\ c_1 x_1(1) + c_2 x_1(1) + \int\limits_0^1 \frac{x_2(1)\,x_1(s)}{W(s)} f(s)\,ds = 0 \end{gathered}$$

Так как $x_2(0) \neq 0$, то из первого уравнения получаем, что $c_2 = 0$. И тогда система будет совместной, если:

$$\int\limits_0^1 x_1(s)\,f(s)\,ds = 0 \tag{2.23}$$

Причем если условие ортогональности (2.23) выполнено, то c_1 может быть любым, итогда задача (2.20,2.21) имеет бесконечно много решений. Если же

$$\int_0^1 x_1(s)\, f(s)\, ds \neq 0$$

то алгебраическая система несовместна, а следовательно краевая задача (2.20,2.21) не имеет решений.

Пусть однородная краевая задача имеет только нулевое решение. Покажем, что в этом случае задача (2.20,2.21) разрешима при любой $f(t)$. Построим два решения линейного однородного дифференциальногог уравнения:

$$x_1(t): \begin{cases} x_1''(t) + a(t)\, x_1(t) = 0 \\ x_1(0) = 0 \\ x_1'(0) = 1 \end{cases}$$

$$x_2(t): \begin{cases} x_2''(t) + a(t)\, x_2(t) = 0 \\ x_2(1) = 0 \\ x_2'(1) = 1 \end{cases}$$

Эти решения линейно независимы. Доказывается от противного, тогда $x_1(t) = cx_2(t)$. И мы получили бы $x_1(0) = 0 \Longrightarrow x_2(0) = 0$. Но тогда как обьяснить $x_2'(1) = 1$. Пародокс. Следовательно все таки они линейно незиавсимимы.

Ну а тогда они обзазуют фндументалдьную систему решений однородной задачи, и общее решение неоднородного уравнения (2.20) будет иметь вид:

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \int_0^t \frac{x_2(t)\, x_1(s) - x_2(s)\, x_1(t)}{W(s)} f(s)\, ds \tag{2.24}$$

$$W(s) = \begin{vmatrix} x_1(s) & x_2(s) \\ x_1'(s) & x_2'(s) \end{vmatrix} = const$$

Выберем x_1 и x_2 чтобы $x(t)$ вида (2.24) удовлетворяла граничным условиям (2.21).

$c_1 x_1(0) + c_2 x_2(0) = 0$

$c_1 x_1(1) + c_2 x_2(1) + \int\limits_0^1 \dfrac{x_2(1)\, x_1(s) - x_2(s)\, x_1(1)}{W(s)} f(s)\, ds = 0$

Заметим что : $x_2(0) \neq 0$ и $x_1(1) \neq 0$.

Ну а тогда мы поллучим, что $c_2 = 0$, $x_2(1) = 0$, и поллучим:

$$c_1 = \int_0^1 \frac{x_2(s)\, f(s)}{W(s)} ds$$

Подставим найденые c_1 и c_2, получим:

$$x(t) = \int_0^1 \frac{x_1(t)\, x_2(s)}{W(s)} f(s)\, ds + \int_0^t \frac{x_2(t)\, x_1(s) - x_2(s)\, x_1(t)}{W(t)} f(s)\, ds \tag{2.25}$$

Это и есть решение при любой $f(s)$. □

Следствие. Если краевая задача (2.20,2.21) разрешима при лобюбой правой части $f(t)$, то это решение единственнное.

Доказательство. Предположим противное, что задача (2.20,2.21) ......

$x_1'' + a(t) x_1(t) = f(t)$

$x_2'' + a(t) x_2(t) = f(t)$

$x(t) = x_1(t) - x_2(t)$

$x''(t) + a(t) x(t) = 0$

$x(t) \neq 0$

А это противоречие. □

В процессе доказательства альте Если однородная задача (2.20,2.21) имеет ненулевое решение $\widetilde{x}(t) \neq 0$, то задача (2.20,2.21) имеет решение тогда и толко тогда когда интеграл $\int\limits_0^1 \widetilde{x}(s) f(s)\, ds = 0$. Причем если это условие выполнено, то существует бесконечное множество решений задачи (2.20,2.21).

Рассматриваем простейшую краевую задачу:

$$x''(t) + a(t) x(t) = f(t), \ t \in [0;1] \tag{2.26}$$

$$x(0) = x(1) = 0 \tag{2.27}$$

$$x_1(t) \begin{cases} x_1'' + a(t) x_1 = 0 \\ x(0) = 0, \ x'(0) = 1 \end{cases} ; x_2 \begin{cases} x_2'' + a(t) x_2 = 0 \\ x_2(1) = 0; x_2'(1) = 1 \end{cases}$$

Такие решения всегда существуют.

$$x(t) = \int\limits_0^t \frac{x_1(t) x_2(s)}{W(s)} f(s)\, ds - \int\limits_0^t \frac{x_2(t) x_1(s) - x_1(t) x_2(s)}{W(s)} f(s)\, ds \tag{2.28}$$

$$W(s) = \begin{vmatrix} \\ x_1(s) & x_2(s) \\ x_1'(s) & x_2'(s) \end{vmatrix}$$

2.6 Функция Грина

Теорема. *Если однородная задача (2.26,2.27) имеет только нулевое решение, то существует непрерывная в квадрате* $[0;1] \times [0;1]$ *функция* $G(t,s)$, *такакя, что при любой* $f(t)$ *единственное решение задачи (2.26,2.27) представимо в виде:*

$$x(t) = \int\limits_0^1 G(t,s) f(s)\, ds \tag{2.29}$$

Определение. Если непрерывная в квадрате $[0;1] \times [0;1]$ функция $G(t,s)$ такова, что при любой $f(t)$решение задачи (2.26,2.27) представимо в виде (2.29), то $G(t,s)$ называется функцией Грина задачи (2.26,2.27).

Тогда вышесформулированную теорему можно сформулировать подругому:

Теорема. *Если соответствующая однородная задача имеет только нулевое решение, то для задачи (2.26,2.27) существует функция Грина.*

Доказательство. Пусть однгородная задача (2.26,2.27) имеет только нулевое решение.

При доказательстве альтернативы Фретгольма мы показали, что в этом случае при любой $f(t)$ решение задачи (2.26,2.27) представимо в виде (2.28). Преобразуем теперь (2.28).

$$\begin{aligned} x(t) &= \int\limits_0^1 \frac{x_1(t)\,x_2(s)}{W(s)} f(s)\,ds - \int\limits_0^t \frac{x_1(t)\,x_2(s)}{W(s)} f(s)\,ds + \int\limits_0^t \frac{x_2(t)\,x_1(s)}{W(s)} f(s)\,ds = \\ &= \int\limits_t^1 \frac{x_1(t)\,x_2(s)}{W(s)} f(s)\,ds + \int\limits_0^t \frac{x_2(t)\,x_1(s)}{W(s)} f(s)\,ds \end{aligned}$$

Введем функцию $G(t,s)$ следующим образом:

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{x_1(t)\,x_2(s)}{W(s)} & ,0 \le t \le s \le 1 \\ \dfrac{x_2(t)\,x_1(s)}{W(s)} & ,0 \le s < t \le 1 \end{cases}$$

Очевидно, что такая функция $G(t,s)$ непрерывна в квадрате $[0;1]\times[0;1]$, тогда используя построенну таким образом фунцию $G(t,s)$ можно записать, что:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int\limits_t^1 G(t,s)\,f(s)\,ds + \int\limits_0^t G(t,s)\,f(s)\,ds = \\ &= \int\limits_0^1 G(t,s)\,f(s)\,ds \end{aligned}$$

□

Установим некоторые совйства построенной функции Грина:

1. При каждом фиксированном s функция $G(t,s)$ как функция $G(t)$ на промежутках $[1,s)$ и $(s,1]$ является решением однородного дифференциального уровнения: $x\prime\prime + a(t)\,x(t) = 0$.

2. При каждом фиксированном s функция $G(t,s)$ как функция $G(t)$ удовлетворяет однородным граничным условиям (2.27).

3. $G(t,s)$ непрерывна в квадрате $[0;1]\times[0;1]$, а ее производная: $G_{t\prime}(t,t-0) - G_{t\prime}(t,t+0) = 1$.

Доказательство. Еще можно записать: $G_t\prime|_{t=s+0} - G_t\prime|_{t=s-0} = 1$

$$\begin{aligned}
G_t\prime(t,t-0) - G_t\prime(t,t+0) &= \frac{x_2\prime(t)\,x_1(s)}{W(s)}\Big|_{\substack{s<t\\ s=t-0}} - \frac{x_1\prime(t)\,x_2(s)}{W(s)}\Big|_{\substack{s>t\\ s=t+0}} = \\
&= \frac{x_2\prime(t)\,x_1(t) - x_1\prime(t)\,x_2(t)}{W(t)} = \\
&= \frac{W(t)}{W(t)} = \\
&= 1
\end{aligned}$$

□

Утверждение. Если функция $\tilde{G}(t,s)$ удовлетворяет условиям 1, 2, 3, то $\tilde{G}(t,s)$ является функцией Грина задачи (2.26,2.27). Задача (2.26,2.27) тимеет единственную функцию Грина.

Доказательство. Пусть $G(t,s)$ удовлетворяет 1,2,3. Нужно показать, что прилюбой правой части функция

$$x(t) = \int\limits_0^1 \tilde{G}(t,s)\,f(s)\,ds \tag{2.30}$$

является решением задачи (2.26,2.27). А тогда в силу определения это и бкудет означать, что это наша функция Грина. В силу пункта 2 при каждом фиксированном s $\tilde{G}(t,s)$ удовлетворяет граничным условиям (2.27). Покажем, что (2.30) удорвлетворяет уравнению (2.26).

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int\limits_0^1 \tilde{G}(t,s)\,f(s)\,ds = \\
&= \int\limits_t^1 \tilde{G}(t,s)\,f(s)\,ds + \int\limits_0^t \tilde{G}(t,s)\,f(s)\,ds
\end{aligned}$$

Смотри первый симетстр, диференцирование интегралов, зависящих от параметра.

$$x\prime(t) = \int\limits_0^1 \tilde{G}_t\prime(t,s)\,f(s)\,ds + \tilde{G}(t,t-0)\,f(t) + \int\limits_t^1 \tilde{G}_t\prime f(s)\,ds - \tilde{G}(t,t+0)\,f(t)$$

В силу непрерывности:

$$x\prime(t) = \int\limits_0^1 \tilde{G}_t\prime(t,s)\,f(s)\,ds + \int\limits_t^1 \tilde{G}_t\prime f(s)\,ds$$

$$
\begin{aligned}
x\prime\prime(t) &= \int\limits_0^t \tilde{G}_t\prime\prime(t,s)\,f(s)\,ds + \tilde{G}_t\prime\prime(t,t-0) + \int\limits_t^1 \tilde{G}_t\prime(t,s)\,f(s)\,ds - G_t\prime(t,\tilde{t}+0) = \\
&= \{\text{В силу пункта 3.}\} = \\
&= \int\limits_0^1 \tilde{G}_t\prime\prime(t,s)\,f(s)\,ds + f(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x\prime\prime(t) + a(t)\,x(t) &= \int\limits_0^1 \tilde{G}_t\prime\prime(t,s)\,f(s)\,ds + f(t) + \int\limits_0^1 a(t)\,\tilde{G}(t,s)\,f(s)\,ds = \\
&= \int\limits_0^1 \Big(\tilde{G}_t\prime\prime(t,s) + a(t)\,\tilde{G}(t,s)\Big)\,f(s)\,ds + f(t)
\end{aligned}
$$

В силу первого свойства функции $\tilde{G}(t,s)$ при каждом фиксированном s $\tilde{G}$ является решением однородного уравнения. Ну а тогда

$$
x\prime\prime(t) + a(t)\,x(t) = f(t)
$$

И $\tilde{G}(t,s)$ и есть функция Грина. Докажем единственность функции Грина.

Предположим противное. Пусть $G_1(t,s)$ и $G_2(t,s)$ — функции Грина задачи (2.26,2.27). Но так как функция Грина существует, то решение задачи (2.26,2.27) единственно, то это единственное решение $x(t)$ может быть представленно:

$$
x(t) = \int\limits_0^1 G_1(t,s)\,f(s)\,ds
$$

$$
x(t) = \int\limits_0^1 G_2(t,s)\,f(s)\,ds
$$

Обозначим через

$$
H(t,s) = G_1(t,s) - G_2(t,s)
$$

Тогда вычитаея мы получим, что при любой $f(t)$:

$$
\int\limits_0^1 H(t,s)\,f(s)\,ds \equiv 0,\ \ t \in [0;1] \tag{2.31}
$$

Так как G_1 и G_2 разные, то $H(t,s)$ отлимчно от нуля. Следовательно, нгайдется точка $H(t_0,s_0) \neq 0,\ \ t_0, s_0 \in [0;1]$. Пусть для опредлеленности $H(t_0,s_0) > 0$. Тогда в силу непрерывности $H(t,s)$ найдется интервал $s_0 \in (\alpha;\beta) \subset [0;1]$, что $H(t_0,s) > 0$, тогда когда $s \in [\alpha;\beta]$. Пусть $f(t)$ — некоторая непрерывная функция, которая больше нуля, при $t \in (\alpha;\beta)$, и $f(t) = 0$, когда $t \notin (\alpha;\beta)$.

$$
f(t) = \begin{cases} (t-\alpha)(\beta-t) & ,t \in (\alpha;\beta) \\ 0 & ,t \notin (\alpha;\beta) \end{cases}
$$

Тогда

$$\int\limits_0^1 H(t,s)\, f(s)\, ds \equiv 0$$

для любой $f(t)$ и для любой s. Но с другой стороны

$$\int\limits_0^1 H(t_0,s)\, \tilde{f}(s)\, ds = \int\limits_\alpha^\beta H(t_0,s)\, \tilde{f}(s)\, ds > 0$$

□

2.7 Собственные значения и собственные фунции

$$x'' + (a(t) + \lambda)\, x(t) \tag{2.32}$$

$$x(0) = x(1) = 0 \tag{2.33}$$

Определение. Значевние параметра λ, при котором задача (2.32,2.33) имеет ненулевое решение называется собственным знгачением задачи (2.32,2.33), а соответствующие ненулевое решение называется собственной функцией, соттветствубщей этому собственному значению.

Задачей на собственные значения называются спектральными задачами. В часности задача (2.32,2.33) называется спектрнальной задачей Штурма-Леувилля.Совокупность всех собственных значевний называется спектром задачи (2.32,2.33).

$$\begin{cases} x''(t) + \lambda x(t) = 0 \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}$$

$\mu^2 + \lambda = 0$

1)$\lambda = -b^2 < 0$

$\mu_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm e$

$x(t) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$

$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$

2)$\lambda = 0$, $x''(t) = 0$, $x(t) = c_1 + c_2 t$

$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$

3)$\lambda = b^2 > 0$, $\mu_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$

$x(t) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}t + c_2 \sin\sqrt{\lambda}$

$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 \cos\sqrt{\lambda}t + c_2 \sin\sqrt{\lambda} = 0 \end{cases}$

$\sin\sqrt{\lambda} = 0$

$\sqrt{\lambda} = \pi k$

$\lambda_k = (\pi k)^2\,,\ k = 1, 2, \ldots$

$x_k(t) = c\sin\pi kt$

При этом нетрудно видеть, что $\int\limits_0^1 x_k(t)\,x_l(t)\,ds = 0,\ k \neq l$. Тоесть собвтенные функци, сооттветствующие различным собственнеым значениям ортогональны, а собственные фунцкии соответствующие однопу собвтсенному значению пропорциональны.

2.8 Уравнение с часными производными первого порядка

Уравнения вида:

$$F\left(x_1\ldots x_n, u(x_1\ldots x_n), \frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \tag{2.34}$$

Дифференциальное уравнение с часными производными первного порядка. F — известная функция своих переменных, $x_1\ldots x_n$ — независимые переменные, $u(x_1\ldots x_n)$ — неизвесная функция, решение — функция $u(x_1\ldots x_n)$ непрерывная со своими часными производными, которые при подстановки превращаю.т уравнение в тождество.

$$a_1(x_1\ldots x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x_1\ldots x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = a(x_1\ldots x_n,u) \tag{2.35}$$

квази-линейное диференциальное уравнение. $a_1\ldots a_n$, a — известные функции своих переменных, u — неизвесная функция.

Уравнение вида:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$a_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n} = a(x)\,u + b(x) \tag{2.36}$$

линейное дифференциальное уравнение.

$$a_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \tag{2.37}$$

Будем предпологать, что $x_1\ldots x_n$ изменяются в области G, и пусть в области B функции a_i обладают непрерыными производными, и $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0$ (одновременно не отображаются в ноль). Подставим в (2.37) сисмему обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = a_1(x_1\ldots x_n),\ i = \overline{1,n} \tag{2.38}$$

Система (2.38) называется характеристической системой уравнения (2.37). Фозовые траэктории $\begin{matrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{matrix}$, где t — параметр (в фазовой плоскости $x_1\ldots x_n$) называются характеристическими уравнениями (2.37)

$$\frac{\partial x_1}{a_1} = \ldots = \frac{\partial x_n}{a_n} \tag{2.39}$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_n} = (\neq)\frac{a_i}{a_n},\ i = \overline{1, n-1}$$

Решения системы (2.39) называются характеристика (2.37).

В силу найденных условий на (2.39) система разрешима. (справедливо т. ∃!)

Через кваходуло т. $\in G$.

Определение. Первым интегралом (2.39)$\varphi(x_1 \ldots x_n)$ обращающаеся тождественно в констанут, когда $x_1 \ldots x_n$ пробегают интегральную прямую системы (2.39).

Теорема. *Всякое решение $\psi(x_1 \ldots x_n)$ уранвнения (2.37) является первым интегралом системы(2.39). И обратно всякий первый игнтнграл $\varphi(x_1 \ldots x_n)$является решениям (2.37).*

Теорема. *Всякое решение $u = \psi(x_1 \ldots x_n)$ уравнения (2.37) представимо в виде:*

$$U = \Pi(\varphi_1(x_1 \ldots x_n) \ldots \varphi_n(x_1 \ldots x_n))$$

где $\Pi(\varphi_1 \ldots \varphi_n)$ — некоторое дифференциальное функция своих аргументов, а $\varphi_1(x_1 \ldots x_n) \ldots \varphi_{n-1}$ — независимые первые интегралы системы (2.39).

Справедливо и обратно, что $\psi = \Pi(\varphi_1 \ldots \varphi_n)$, где $\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}$ — независимые пмервые интегралы системы (2.39), а Π — произвольная непрерывная дифференцируемая функция.

2.9 Квазилинейные уравнения

Рассмотрим квазилинейные дифференциальные уравнения вида:

$$a_1(x_1 \ldots x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x_1 \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = a(x_1 \ldots, x_n, u) \qquad (2.40)$$

Пусть функции $a(x_1 \ldots, x_n, u)$, $a_i(x_1 \ldots, x_n, u)$, $i = \overline{1, n}$ — непрывные дифференцируемые функции своих аргументов в некоторой области $D \in R_n$. Поставим в соответствию уравнению (2.40) линейное однородное уравнение......

....

Теорема. *Пусть $\upsilon = V(x_1 \ldots x_n, u)$ — решение уравнения (-10). Пусть $V(x_1 \ldots x_n, U) = 0$ определяет в области G переменных $(x_1 \ldots x_n)$ функциию $U = \varphi(x_1 \ldots x_n)$. Пусть $\frac{\partial V}{\partial U}|_{U=\varphi} \neq 0$ в G, тогда $U = \varphi(x_1 \ldots x_n)$ является решением уравнения (2.40).*

Чтобы построить общее решение уравнения (2.40) мы записываем характеристическую систему вида:

$$\frac{dx_1}{a_1} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{dU}{a} \qquad (2.41)$$

Интегральные кривые этой системы называются характеристическими уравнениями (2.40). Тогда у этой системы существует n независимых первых интегралов $\varphi_1(x_1 \ldots x_n, U), \ldots, \varphi_n($ тогда $\upsilon = \Pi(\varphi_1(x_1 \ldots x_n, U), \ldots, \varphi_n(x_1 \ldots, x_n, U))$ общее решение уравнения (-10).

$$\Pi(\varphi_1(x_1 \ldots x_n, U), \ldots, \varphi_n(x_1 \ldots, x_n, U)) = 0 \qquad (2.42)$$

является неявным заданием решения уравнения (2.40). (2.42) называется убщим интегралом уравнения (2.40).

Нужног задавать дополнительные условия для $U(x_1 \ldots x_n)$ если нужно единственное решение, например $U|_\gamma = q(x_1 \ldots x_n)$, где γ — нбекоторая кривая в G , и если γ не является характеристическим, то существует единственное решение.

Содержание