Физика

19 августа 2014 г.

Преподаватель:
Рубцов Сергей Евгеньевич
Литература:

1. Савельев “Курс общей физики”. (Брать с механикой)

2. Трофимова Т.И. “Курс физики” (Учебник - шпаргалка)

Часть I

Механика

1 Введение

Определение. Механика изучает простейшую форму движения, то-есть перемещения материальных тел в пространстве с течением времени.

1. Нужно выбрать тело отсчета.

2. Выбрать систему отсчета (в чем мерить, не только пространства, но и времени). Арифметизация пространства и времени.

   На данный момент есть общепризнанная система измерений(международная). Первоначально было принято что 1 метр - это $\frac{1}{40\ 000\ 000}$от длинны меридиана. Также выбрана 1 секунда - это часть $(\frac{1}{31\ 500\ 000,\dots})$ тропических суток в 1900 году. Длительность суток везде разная. 1960 году выло выяснено что привязывать систему отсчета к земле(она с каждым годом разбухает) невозможно. Тогда метр и секунда были пересмотрены и привязаны к частоте какого-то там излучения.

3. Система координат.

   - Декартова
   - Цилиндрическая(на плоскости Полярная)
   - Сферическая

4. Классическая механика представляет собой теорию движения достаточно медленных макроскопических тел. В нашей вселенной существует предельная скорость (скорость света $c = 3 \cdot 10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, v - так будем обозначать скорость света, и $v \ll c$).

1.0.0.1 Объекты изучения:

Определение. Материальная точка - тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с его пространственными перемещениями.

Определение. Система материальных точек - это совокупность частиц, положения и движение каждой их которых влияет на положение и движение остальных точек системы.

Механика изучает такие объекты как : материальная точка, система материальных точек.

Определение. Абсолютное твердое тело - это такое тело, деформациями которого можно пренебречь по сравнению с его пространственным перемещением.

Определение. Сплошная среда - это тоже система материальных точек, но которая всюду плотная (нету промежутка между точками).

1.0.0.2 Глобальные разделы механики:

1. Кинематика (изучает движения тел с течением времени без учета причин, которые это движение вызывают).
2. Статика (изучает условия равновесия тел).
3. Динамика (изучает движения тел в связи с теми причинами, которые его вызывают).

Определение. Основные понятие классической механики: пространство и время.

1.0.0.3 Постулаты механики:

1. Считается возможным одновременные измерения с кокой угодно точностью любых физических величин, характеризующих движение макроскопических тел.
2. Продолжительность любого процесса одинакова во всех системах отсчета как бы они не двигались.
3. Значение пространственного интервала (расстояния) между положениями любых материальных точек в данный момент одинаково во всех системах отсчета.

Определение. Сила — это мера взаимодействия между телами.

Существует 4 вида взаимодействия: Гравитационная, Электромагнитная, еще 2 Внутриядерных взаимодействия - Сильное и Слабое.

Определение. Масса — это мера инертности тел. (Мера податливости к внешнему воздействию).

Система отсчета включает тело отсчета, систему координат и часы.

2 Кинематика

2.1 Способы задания движения точки.

Определение. Траектория — это линия, по которой движется тело.

Определение. Вектор перемещения — вектор, соединяющий начальное и текущее положение тела.

Определение. Радиус вектор — вектор, соединяющей тело отсчета и текущее положение точки.

Определение. Путь — полное расстояние, пройденное точкой по траектории.

1. Естественный способ.

   Задается:

   - Траектория движения.
   - Начальное положения на траектории.
   - Направление положительного движения по траектории.
   - Текущее положение точки на траектории как функция времени.
     Функция должна быть:
     - Однозначной
     - Непрерывной
     - Дифференцируемой

2. Координатный способ.

   Задается:

   - Какая либо система координат
   - Координаты движущейся точки как функция времени. $(q_x(t), q_y(t), q_z(t))$ или в Декартовой системе координат $\begin{pmatrix} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{pmatrix}$

3. Векторный способ

   Основан на задании радиус вектора материальной точки как функции от времени.

2.2 Кинематические элементы движения точки.

2.2.1 Скорость

Пусть точка переместилась из положения M_0 в положение M за время Δt. Тогда:

- Средняя скорость точки $\overrightarrow{v}_{cp} = \dfrac{\Delta \overrightarrow{r}}{\Delta t}$.
- Устремим Δt к нулю, получим мгновенную скорость:

$$\overrightarrow{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{r}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \dot{\overrightarrow{r}}$$

Где $\dot{\overrightarrow{r}}$ — производная.

Так как радиус-вектор может быть задан в виде: $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{i} \cdot x + \overrightarrow{j} \cdot y + \overrightarrow{k} \cdot z$, то продифференцировав, получим:

$$\frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \overrightarrow{i}\frac{dx}{dt} + \overrightarrow{j}\frac{dy}{dt} + \overrightarrow{k}\frac{dz}{dt}$$

Или $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} \cdot v_x + \overrightarrow{j} \cdot v_y + \overrightarrow{k} \cdot v_z = \overrightarrow{i}\dot{x} + \overrightarrow{j}\dot{y} + \overrightarrow{k}\dot{z}$.

Скорость можно вычислить, как длину вектора скорости:

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = v$$

2.2.1.1 Направляющие косинусы вектора скорости:

- $\cos\alpha = \dfrac{v_x}{v}$
- $\cos\beta = \dfrac{v_y}{v}$
- $\cos\gamma = \dfrac{v_z}{v}$

2.2.2 Ускорение

Пусть вектор скорости изменился от $\overrightarrow{v_0}$ до $\overrightarrow{v}$ за время Δt. Тогда $\Delta\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{v_0}$.

- Средним ускорением называется величина $\overrightarrow{\omega_{cp}} = \dfrac{\Delta\overrightarrow{v}}{\Delta t}$.
- Устремим Δt к нулю, получим мгновенное ускорение:

$$\overrightarrow{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{v}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt}$$

$$\overrightarrow{\omega} = \dot{\overrightarrow{v}} = \ddot{\overrightarrow{r}}$$

В покоординатной форме:

$$\omega_x = \dot{v_x} = \ddot{x}, \quad \omega_y = \dot{v_y} = \ddot{y}, \quad \omega_z = \dot{v_z} = \ddot{z}$$

Ускорение можно вычислить, как длину вектора ускорения:

$$|\overrightarrow{\omega}| = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = w$$

2.2.2.1 Направляющие косинусы вектора ускорения:

- $\cos\alpha = \dfrac{\omega_x}{\omega}$
- $\cos\beta = \dfrac{\omega_y}{\omega}$
- $\cos\gamma = \dfrac{\omega_z}{\omega}$

2.3 Естественный способ задания движения

2.3.1 Скорость

Определим среднюю скорость, как: $\overrightarrow{v_{cp}} = \frac{\Delta\overrightarrow{r}}{\Delta t}$. Тогда мгновенная скорость:

$$\overrightarrow{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overrightarrow{r}}{\Delta t}.$$

Вектор скорости направлен по касательной к траектории в сторону движения. Единичный вектор касательной будем обозначать $\overrightarrow{\tau}$, тогда: $\overrightarrow{v} = v\cdot\overrightarrow{\tau}$.

$$v = |\overrightarrow{v}| = \left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overrightarrow{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\overrightarrow{r}|}{\Delta t} = \left||\Delta\overrightarrow{r}| \geq \Delta\,|\overrightarrow{r}|\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = \dot{S}$$

Тогда:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\tau}\cdot\frac{dS}{dt}$$

2.3.2 Ускорение

Разобьем путь на маленькие части:

$$S_i = \sum_{i=1}^{\infty} S_i = \sum_{i=1}^{\infty} v_i\Delta t_i$$

$v\left(t\right) = |\overrightarrow{v}|$. То есть путь:

$$S = \lim_{\Delta t_i\to 0}\sum_{i=1}^{\infty} v_i\Delta t_i = \int\limits_{t_0}^{t} v\left(t\right)dt$$

А перемещение:

$$\Delta\overrightarrow{r} = \int\limits_{t_0}^{t}\overrightarrow{v}\left(t\right)dt$$

2.3.2.1 Естесственный трехгранник Возьмем траекторию и расположим на ней 3 точки $M_0,\ M_1,\ M_2$.

Определение. Предельное положение плоскости, проходящей через точки $M_0,\ M_1,\ M_2$, когда M_1 и M_2 стремятся к M_0 называется соприкасающейся плоскостью точки M_0.

Определение. Предельное положение точки M_0 когда M_1стремиться к M_0 называется касательной траектории к точке M_0.

Перпендикуляр касательной называется нормалью. Этих нормалей у траектории в данной точке бесконечное множество.

Определение. Нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости называется главной нормалью. Вектор главной нормали направлен в сторону вогнутости кривой.

Плоскость, перпендикулярная касательной называется нормальной плоскостью.

Определение. Плоскость, перпендикулярная соприкасающейся плоскости и нормальной плоскости называется спрямляющей плоскостью.

Определение. Вектор, нормали, лежащий в спрямляющей плоскости называется бинормалью и обозначается $\overrightarrow{b}$.

Направление бинормали выбирается так, чтобы вектора $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{b}$ образовывали правую тройку векторов.

Определение. Система координат, построенная на векторах $\overrightarrow{\tau}$, $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{b}$ носит название естественного трехгранника (или просто естественной системы координат).

- $(\overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{n})$ - соприкасающаяся плоскость
- $\left(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{b}\right)$ - нормальная плоскость
- $\left(\overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{b}\right)$ - спрямляющая плоскость

Определение. Угол смежности $\Delta\Theta$ — угол между $\overrightarrow{\tau}$ и $\overrightarrow{\tau_0}$.

Определение. Средняя кривизна траектории определяется как $K_{cp} = \dfrac{\Delta\Theta}{\Delta S}$

$$K = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\Theta}{\Delta S} = \frac{d\Theta}{dS}$$

Определение. Предельное положение окружности, проходящей через 3 точки $M_0,\ M_1,\ M_2$, когда M_1 и M_2 стремятся к M_0называются кругом кривизны.

Определение. Радиус круга кривизны называется радиусом кривизны траектории в данной точке и обозначается $\rho = \dfrac{1}{K}$.

2.3.2.2 Ускорение при естественном задании движения точки.

Пусть

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\tau} \cdot v$$

А тогда:

$$\overrightarrow{\omega} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{\tau}}{dt} \cdot v + \overrightarrow{\tau} \cdot \frac{dv}{dt}$$

Проблема. Вычислить первое слагаемое.

$$\frac{d\overrightarrow{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{\tau}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{\overrightarrow{\tau} - \overrightarrow{\tau_0}}{\Delta t} = \overrightarrow{n} \cdot \left|\frac{d\overrightarrow{\tau}}{dt}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{\tau}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\overrightarrow{\tau}|}{\Delta t} =$$
$$= \left| |\Delta\overrightarrow{\tau}| = 2 \cdot |\tau| \cdot \sin\frac{\Delta\Theta}{2} = \{\sin\alpha \approx \alpha,\ \text{при } \alpha \to 0\} = 2 \cdot |\tau| \cdot \frac{\Delta\Theta}{2} \right| =$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\Theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\Theta}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\Theta}{\Delta S} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = K \cdot v = \frac{v}{\rho}$$

Тогда $\dfrac{d\overrightarrow{\tau}}{dt} = \overrightarrow{n} \cdot \dfrac{v}{\rho}$, и получаем следующую формулу:

$$\boxed{\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{n} \cdot \frac{v^2}{\rho} + \overrightarrow{\tau} \cdot \frac{dv}{dt}}$$

Первое слагаемое называется нормальным ускорением, 2-е — касательным ускорением (или тангенциальным).
$\omega_n = \dfrac{v^2}{\rho}$ — величина нормального ускорения.
$\omega_\tau = \dfrac{dv}{dt}$ — величина касательного ускорения.
$\omega = \sqrt{\omega_\tau^2 + \omega_n^2}$ — величина ускорения.

2.4 Частные случаи движения

2.4.1 Прямолинейное движение

Система координат выбирается так, чтобы траектория лежала на одной из осей, например Ox.
$x = x(t)$ — уравнение движения точки.
$v_x = \dot{x}$ — скорость точки.
$\omega_x = \ddot{x}$ — ускорение точки.

- Если знаки ω_x и v_x совпадают, то движение ускоренное, если наоборот, то замедленное.
- Если $\omega_x = 0$, то $v_x = const$.
- Если $\omega_x = a = const$, то это — равнопеременное движение (равно-ускоренное или равно-замедленное). Тогда скорость:
$$v_x = v_0 + at,$$
а координата точки:
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Определение. $x = A \cdot \sin(\omega t + \psi)$ — уравнение колебательного движения.

2.4.2 Круговое движение

Пусть R — радиус окружности. В таком случае величина скорости будет $v = \dfrac{ds}{dt}$, и скорость направлена по касательной.

Но на самом деле, удобно описывать положение точки при помощи угла. Измеряем мы его в радианах, тогда:
$$S = R \cdot \varphi$$
А скорость:
$$v = R \cdot \frac{d\varphi}{dt} = R \cdot \omega$$

Определение. $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$ — угловая скорость.

Ввиду $\overline{w} = \overline{\tau} \cdot w_\tau + \overline{n} \cdot w_n$ получим:
$$w_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{R} = w^2 \cdot R$$
А касательное ускорение:
$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = R \cdot \frac{dw}{dt} = R \cdot \varepsilon$$
Где $\varepsilon = \dfrac{dw}{dt}$ — угловое ускорение.

Если записывать величину полного ускорения во время движения точки то она равна:
$$w = \sqrt{w_n^2 + w_\tau^2} = R\sqrt{w^4 + \varepsilon^2}$$

2.5 Кинематика системы и абсолютно твердого тела.

Определение. Механической системой называется множество материальных точек, в котором движение каждой точки зависит от положения и движения остальных точек системы.

Будем говорить что положение механической системы задано, если известно положение всех точек системы. Если у нас система состоит из n точек, то чтобы задать систему точек, нам надо задать $3n$ координат.

- Геометрическая связь: $f(x_1, y_1, z_1 \ldots x_n, y_n, z_n, t) = 0$.

  В ней не участвует ничего кроме координат и времени.

- Кинематическая связь: $g(x_1, y_1, z_1 \ldots x_n, y_n, z_n, \dot{x_1}, \dot{y_1}, \dot{z_1}, \ldots \dot{x_n}, \dot{y_n}, \dot{z_n}, t) = 0$.

Пусть имеется система n точек и на нее наложено K геометрических связей, $K \leq 3 \cdot n$. То тогда мы имеем $3n - K$ независимых координат, которые носят называние координат системы. Число координат системы в случае существования *только* геометрических связей называется *числом степеней свободы системы.*

Определение. Абсолютно твердым телом называется такая механическая система, в которой расстояние между любыми 2-мя точками постоянно.

Теорема. *Абсолютно твердое тело имеет 6 степеней свободы.*

Доказательство. Берем любые 3 точки твердого тела:

$$A\left(x_a, y_a, z_a\right), \quad B\left(x_b, y_b, z_b\right), \quad C\left(x_c, y_c, z_c\right).$$

Тогда: $R_{A,B} = \sqrt{\left(x_a - x_b\right)^2 + \left(y_a - y_b\right)^2 + \left(z_a - z_b\right)^2} = const$, $R_{B,C} = const$, $R_{A,C} = const$

9 координат, 3 уравнения. Число степеней свободы равно 6.

Добавим к нему еще одну точку: $D\left(x_d, y_d, z_d\right)$. Добавление ее сразу-же добавляет еще 3 уравнения связи. Опять же 6 степеней свободы.

Если добавлять еще ограниченное количество точек у нас останется ровно 6 степеней свободы. □

2.6 Простейшие случаи движения твердого тела

Простейшими случаями движения являются:

1. Поступательное движение
2. Вращательное движение (вращение твердого тела вокруг неподвижной оси).

Определение. Поступательное движение, это такое движение при котором любая прямая, проведенная в твердом теле остается параллельной самой себе за все время движения.

Пример. Возьмем твердое тело, 2 точки A и M принадлежат ему, а точка O не принадлежит ему.

$OA = \overrightarrow{r_0}$

$OM = \overrightarrow{r}$

$AM = \overrightarrow{r'}$

$\overrightarrow{r'} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}$

$\overrightarrow{v} = \dfrac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \dfrac{d\overrightarrow{r_0}}{dt} + \dfrac{d\overrightarrow{r'}}{dt} = \overrightarrow{v_0}$

$\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{\omega_0}$

При поступательном движении скорость и ускорение всех точек твердого тела совпадает, а траектории получаются друг из друга параллельным переносом. То-есть движение твердого тела сводится к механики точки.

Угловая скорость называется радиан в секунду $[\omega] = \dfrac{\text{рад}}{c} = \dfrac{1}{c}$.

$[n] = \dfrac{\text{об}}{\text{мин}}$

$\omega = \dfrac{n \cdot 2\pi}{60} = \dfrac{n \cdot \pi}{30}$

Определение. Если твердое тело движется так, что 2 его точки остаются неподвижным, то движение тела называется вращательным, а прямая, проходящая через эти 2 точки — осью вращения.

Пример. В начальный момент времени проведем через твердое тело через ось вращения плоскость. Угол между начальным положением и положением, меняющимся у части этой плоскости, принадлежащей твердому телу, называется углом вращения твердого тела.

Возьмем точку твердого тела M. Повернем тело и точка M перейдет в точку M' . O - начало координат. $\Delta\overrightarrow{r} = MM'.A_M$ и $A_{M'}$ - проекции точек M и M' на Oxy. Угол $A_M O A_{M'} = \Delta\varphi$ - угол вращения. a - расстояние от точки M до оси вращения. α - угол между Oz и M .

$\overrightarrow{v_M} = \dfrac{d\overrightarrow{r}}{dt}$

$v = \dfrac{d\varphi}{dt} \cdot a = \dfrac{d\varphi}{dt} \cdot r \cdot \sin\alpha$ - похоже на векторное произведение 2х векторов.

Мы вводим в рассмотрение понятие вектора угловой скорости $\overrightarrow{\omega}$. Он направлен по оси вращения так что если смотреть с конца вектора то вращение происходит против часовой стрелке.

В данной системе он направлен вверх. (В положительном направлении оси Oz.)

$\overrightarrow{\xi} = \dfrac{d\overrightarrow{\omega}}{dt}$ - угловое ускорение.

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}$$

$\overrightarrow{\omega} = \dfrac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \dfrac{d\overrightarrow{\omega}}{dt} \times \overrightarrow{r} + \overrightarrow{\omega} \times \dfrac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \overrightarrow{\xi} \times \overrightarrow{r} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{\xi} \times \overrightarrow{r} + \overrightarrow{\omega} \times (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r})$

$\overrightarrow{\xi} \times \overrightarrow{r}$ это $\overrightarrow{\omega_\tau}$

$\overrightarrow{\omega} \times (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r})$ это $\overrightarrow{\omega_n}$

$\dfrac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}$ только для $|\overrightarrow{r}| = const$

2.7 Задаем положение твердого тела в пространстве

1. Выбирается 1н полюс(1на точка в твердом теле)

   Мы выбраны 1ну точку, она задает положение тела в пространстве, а теперь нам необходимо задать ориентацию. Но удобнее ее задавать не точками, а углами.

2. Нарисуем 2 системы координат. Одна глобальная, другая локальная относительно тела.

3. Потом мы переносим параллельным переносом точку $C\,(x, y, z)$ (начало локальной системы координат) с точкой $O\,(X, Y, Z)$(началом глобальной системы координат).

4. Построим линию пересечения плоскостей OXY и плоскости CXY. Эта линия (Ol) носит название линией узлов.

5. Первый угол который мы определяем это угол Θ между Z и z через O. Угол отчитывается от Z. Называется он угол мутации.

6. Следующий угол (φ) между Ox и Ol. Угол прецессии.

7. Потом угол (ψ) между Ol и Ox - угол собственного вращения.

   $0 \leq \Theta \leq \pi$

   $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

   $0 \leq \psi \leq 2\pi$

Вывод. *Таким образом координаты твердого тела задаются с помощью 6-ти координат и углами Эйлера* φ, Θ, ψ.

2.8 Произвольное движение твердого тела

(Относится к предыдущему примеру)

Возьмем на теле точку M. Проведем векторы $\overrightarrow{r} = OM$, $\overrightarrow{r_0} = OC$, $\overrightarrow{r'} = CO$.

$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{r'}$

$\left|\overrightarrow{r'}\right| = const$

$$\overrightarrow{v_M} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{r_0}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{r'}}{dt} = \overrightarrow{v_C} + \left[\overrightarrow{\omega}; \overrightarrow{r'}\right] \tag{1}$$

1-е слагаемое представляет из себя поступательную составляющую движения, 2-е слагаемое — вращение движение вокруг полюса.

$\overrightarrow{\omega}_M = \dfrac{d\overrightarrow{v}_M}{dt} = \dfrac{d\overrightarrow{v}_C}{dt} + \dfrac{d\left[\overrightarrow{\omega}, \overrightarrow{r}'\right]}{dt} = \overrightarrow{\omega}_C + \left[\dfrac{d\overrightarrow{\omega}}{dt}; \overrightarrow{r}'\right] + \left[\overrightarrow{\omega}; \dfrac{d\overrightarrow{r}'}{dt}\right]$

$\overrightarrow{\omega}_M = \overrightarrow{\omega}_C + [\overrightarrow{\varepsilon}; \overrightarrow{r}'] + [\overrightarrow{\omega}; [\overrightarrow{\omega}; \overrightarrow{r}']]$

Первое слагаемое — поступательное ускорение, 2 других — составляющие вращательного ускорения.

Выберем другую точку вместо M - точку A.

$\overrightarrow{r}' = CM$
$\overrightarrow{a} = CA$
$\overrightarrow{r^*} = AM$

$$\overrightarrow{v}_M = \overrightarrow{v}_C + [\overrightarrow{\omega}; \overrightarrow{r}'] \tag{2}$$

$$\overrightarrow{v}_M = \overrightarrow{v}_A + \left[\overrightarrow{\omega}'; \overrightarrow{r^*}\right] \tag{3}$$

....

Вывод. *Сопоставляя последнее равенство с соотношением (3) приходим к выводу, что* $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{\omega}'$.

2.9 Как сказал Тимур, оптимизация выбора полюса

Рассмотрим 2 случая:

1. $\overrightarrow{v}_C \perp \overrightarrow{\omega}$

   Перенесем C в A на вектор $\overrightarrow{a}$.

   $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{v}_C$

   $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{\omega}$

   $|\overrightarrow{v}_C| = |[\overrightarrow{\omega}; \overrightarrow{a}]|$

   Тут 2 направления по прямой, на которой лежит вектор $\overrightarrow{a}$. Выберем его так, чтобы $[\overrightarrow{\omega}; \overrightarrow{a}] = -\overrightarrow{v}_C$.

   $\overrightarrow{r}' - \overrightarrow{a} = \overrightarrow{r^*}$

   $v_M = v_C + \left[\overrightarrow{\omega}; \left(\overrightarrow{r^*} + \overrightarrow{a}\right)\right] = \overrightarrow{v}_C + \left[\overrightarrow{\omega}; \overrightarrow{r^*}\right] + [\overrightarrow{\omega}; \overrightarrow{a}] = \left[\overrightarrow{\omega}; \overrightarrow{r^*}\right]$

   Вывод. *Получается что относительно точки A тело совершает чисто вращательное движение вокруг оси, проходящее через точку A, в направлении вектора* $\overrightarrow{\omega}$ *(Мгновенная ось вращения).*

2. $\overrightarrow{v}_C \overline{\perp} \overrightarrow{\omega}$

   Разложим $\overrightarrow{v}_C$ на 2 составляющих $\overrightarrow{v}_C = \overrightarrow{v}_{\parallel} + \overrightarrow{v}_{\perp}$.

   $[\overrightarrow{\omega}; \overrightarrow{a}] = -\overrightarrow{v}_{\perp}$

   Повторяем действия, которые мы уже проводили...

   $v_M = \ldots = \overrightarrow{v}_C + \left[\overrightarrow{\omega}; \overrightarrow{r^*}\right] - \overrightarrow{v}_{\perp} = \overrightarrow{v}_{\parallel} + \left[\overrightarrow{\omega}; \overrightarrow{r^*}\right]$

   Вывод. *В данном случае, движение точки A представляет собой винтовое движение. Ось, относительно которой происходит вращение называется мгновенной винтовой осью.*

3 Динамика

3.1 Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчета

Инерциальные системы отсчета -это такие системы, в который пространство однородно(все физические точки эквивалентны), изотропно (все направления в пространстве эквивалентны) и время однородно(физическая эквивалентность всех моментов времени).

Изолированная точка, может оставаться в покое, либо двигаться равномерно и прямолинейно в таких системах.

3.1.1 Первый закон Ньютона

Существуют такие системы отсчета, в которых всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, пока воздействия со стороны других тел не заставят его изменить это состояние.

3.2 Второй закон Ньютона. Понятие о силе и массе

Определение. Сила — это количественная мера взаимодействия тел.

$F(ab)$— сила с которой на материальную точку A, действует тело B, понимают такое механическое воздействие B на A в результате, которого частица A получает ускорение $W \Rightarrow W||F$

3 принципа суперпозиции силы:

1. Действие каждой из приложенных к материальной точке сил не зависит от того, находится ли она в движении или покоиться, а также не зависит от числа других воздействующих на нее сил.
2. Силы, действующие на любую частицу складываются векторным способом
3. Механическое состояние материальной точки не изменится, если приложить к ней систему сил равную нулю

Определение. Инертность тела -податливость тела к внешним воздействиям. Количественной мерой инерции является масса.

Замечание. Масса является величиной аддитивной, то-есть масса системы является суммой масс ее составляющих.

3.2.1 Второй закон Ньютона

Ускорение, которое приобретает тело прямо пропорционально силе и обратно пропорционально массе.

$$\overrightarrow{\omega} = k \cdot \frac{\overrightarrow{F}}{m} \tag{4}$$

Замечание. Выполняется только в инерциальных системах.

Определение. Система, построенная на длине, времени и массе называется абсолютной.

	СИ	СДС
длина	метры	сантиметры
время	секунды	секунды
масса	килограммы	граммы

Выберем единицы измерения силы так чтобы коэффициент пропорциональности в уравнении (4) был равен $\overrightarrow{F} = m \cdot \overrightarrow{\omega}$ $[\frac{\text{кг} \cdot \text{метр}}{\text{секунда}}]$ = Ньютон в СДС - дина.

3.3 Третий закон Ньютона

Действие тел друг на друга носит характер взаимодействия. Сила, с которой действуют друг на друга тела равны по величине , противоположны по направлению.

Взаимодействие передается мгновенно.

$F_{12} = F_{(r12)}$ — типа зависит от расстояния.

3.4 Принцип относительности Галилея

Возьмем 2 инерциальные системы отсчета:

....

Одна двигается вкруг другой с некоторой v_0 к двигаться поступательно относительно k' с v_0.

$\overrightarrow{z} = \overrightarrow{R} + \overrightarrow{z'}$

$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R_0} + \overrightarrow{v_0} \cdot t$

$\overrightarrow{v_m} = \dot{\overrightarrow{r}} = \dot{\overrightarrow{R}} - \dot{\overrightarrow{r'}} = \overrightarrow{v_0} + \dot{\overrightarrow{r'}}$

$\overrightarrow{\omega_m} = \dot{\overrightarrow{v_m}} = \ddot{\overrightarrow{r'}} = \overrightarrow{\omega'}$

Отличить 2 системы нереально...

Все механические явления в различных инерциальных система отсчета протекают одинаковым образом, следовательно такими механическими опытами невозможно установить, находится данное система в покое или движется прямолинейно и равномерно.

3.5 Виды сил

Сила тяжести и вес.
$\overrightarrow{p} = m \cdot \overrightarrow{g}$
$g \approx 9,8\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

Определение. Весом называется сила, с которой тело действует на опору или подвес.

Сила тяжести не всегда равна весу. Сила тяжести приложена к телу. Вес - к опоре.

Пример. Груз лежит в лифте. Сила, с которой груз действует на лифт равны p. Сила, с которой опора действует на груз равна $\overrightarrow{R} = -\overrightarrow{p}$, при лифте, находящимся не в движении. Теперь пусть лифт движется вверх с постоянным ускорением a.
$\overrightarrow{a} \cdot m = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R}$
$a \cdot m = -mg + R$
$\overrightarrow{R} = -\overrightarrow{G}$
$\left|\overrightarrow{R}\right| = \left|\overrightarrow{G}\right|$
$G = m\left(g + a\right)$
То-есть теперь тело весит больше. А если лифт будет двигаться с постоянным ускорением вниз, то...
$-am = -mg + R$
$G = m\left(g - a\right)$

3.6 Сила трения

Есть несколько видов трения: внутреннее(происходит между частями 1го тела) и внешнее (с разными телами). Еще есть вязкое(при движении жидкостей и газов. При движении твердого тела в жидком вязкое трение состоит из 2х видов: сопротивление среды и самого трения. При низких скоростях зависимость трения от скорости почти линейная, а при высоких - квадратичная. $\overrightarrow{F} = -\mu \cdot \overrightarrow{v}$ - при малых. $\overrightarrow{F} = -\mu_2 \cdot v \cdot \overrightarrow{v}$ - при квадратичной зависимости) или сухое(при жидкого, твердого и газообразного). Сухое трения делят на трение качение(Трение качения по своей сути трением не является, а является энергией, с котором тело противодействует силе тяжести(преодоление силы тяжести)) и трение скольжения($\overrightarrow{F_{\text{тр.п.}}} = -\overrightarrow{F}$. $F_{\text{тр}} = kN$. N - нормальное давление. Если построить график зависимости силы трения от скорости движения то при очень маленькой скорости ее двигать сложно, при небольшой легче чем при очень малой, а при очень большой ее становится все сложнее двигать).

3.7 Сила упругости

$F_{\text{упр}} = -k \cdot \Delta x$

3.8 Уравнения движения механической системы

N частиц в пространстве
$m_i \cdot \overrightarrow{\omega_i} = \overrightarrow{F_i}$ - сумма всех сил, действующих на частицу
$i = \overline{1, n}$
$m_i \cdot \overrightarrow{\ddot{r_i}} = \overrightarrow{F_i}$
$$\overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{F_i^e} + \overrightarrow{F_i^{in}} = \overrightarrow{F_i^e} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \overrightarrow{F_{i,j}},\ i = \overline{1, N}$$
$F_{i,j} = F\left(r_{i,j}\right)$ - функция, зависящая от расстояния.
$\overrightarrow{r_{i,j}} = \overrightarrow{r_j} - \overrightarrow{r_i}$

Уравнение движения в механической системе: $m_i \cdot \overrightarrow{\ddot{F}_i^{(e)}} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \overrightarrow{F_{i,j}},\ i = \overline{1, N}$

$\overrightarrow{F_i^{(e)}} = F\left(\overrightarrow{r_i}, \overrightarrow{v_i}, t\right)$
Уравнение движения механической системы представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Если у нас N точек это система из $3N$ уравнений.

Определение. Будем называть механическую систему свободной если в любой момент времени t можно произвольным образом задать значения радиус векторов $\overrightarrow{r_i}$ и скоростей $\overrightarrow{v_i}$ всех ее точек.

Определение. Прямая или основная задача динамики это задача об определении радиус векторов частиц как функции времени при известных массах частиц по заданным внутренним и внешним силам.

Определение. Обратная задача: задача о нахождении полной силы F_i действующей на i-ю частицу по ее массе и заданному радиус вектору.

Пример. Рассмотрим простой пример. Точка движется в области земли.
$m\ddot{\overrightarrow{r}} = m\overrightarrow{g}$
$\overrightarrow{r} = (x, y, z)$
$\overrightarrow{g}\,(0, 0, -g)$
$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$
$\begin{cases} x = c_1 t + c_2 \\ y = c_3 t + c_4 \\ z = c_5 t + c_6 - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$
Для того чтобы задать движение точки, нужно задать 6 констант.
$\overrightarrow{r_{i,0}} = \overrightarrow{r_i}\,(0)$
$\overrightarrow{v_{i,0}} = \dot{\overrightarrow{v_i}}\,(0)$
Поместим начало координат в точку, которую мы исследуем.
$\overrightarrow{r} = 0$
$x\,(0) = 0$
$y\,(0) = 0$
$z\,(0) = 0$
Бросим тело под углом α к горизонту
$\overrightarrow{v}\,(0) = \overrightarrow{v_0}$
$\dot{x}\,(0) = 0$
$\dot{y}\,(0) = v_0 \cdot \cos\alpha$
$\dot{z}\,(0) = v_0 \cdot \sin\alpha$
$x = 0$
$y = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha$
$z = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2}$
Теперь мы полностью получили уравнение движения нашей точки.

Так что при решении $m_i \cdot \ddot{\overrightarrow{F_i^{(e)}}} + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \overrightarrow{F_{i,j}},\ i = \overline{1, N}$ мы получаем решение в виде

$$\overrightarrow{r_i} = \overrightarrow{r_i}\,(t, c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3}, c_{1,4}, c_{1,5}, c_{1,6}, c_{2,1} \ldots, c_{N,6})$$

Когда мы подставим полученное решение к уравнению мы придем к системе из $6 \cdot N$ уравнений, и решив которую, мы получим окончательное решение. Общее решение прямой задачи будет выглядеть следующим образом: $\overrightarrow{r_i}\,(t, \overrightarrow{r_{1,0}}, \overrightarrow{r_{N,0}}, \overrightarrow{v_{1,0}} \ldots \overrightarrow{v_{N,0}})\,,\ i = \overline{1, N}$.

Вывод. *Задание начального состояния механической системы однозначно определяется ее поведением во все последующие моменты времени.*

Есть еще несвободное движение системы.
Уравнение связи $f\,(\overrightarrow{r_1} \ldots \overrightarrow{r_v}, t) = 0$
Любую связь в уравнении можно заменить ее реакцией, то-есть силой, которая в этой связи возникает и обычно обозначают R_i.

$$m_i \cdot \overrightarrow{\ddot{F}_i^{(e)}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \overrightarrow{F_{i,j}} + R_i,\ i = \overline{1,N}$$

R_i - равнодействующая всех реакций связей, действующая на i-ю точку
Как правило реакции связей являются неизвестными.
Тогда для решения данной задачи необходимо добавить уравнения связи.

3.9 Частные случаи интегрирования уравнений материальной точки

3.9.1 Силы, действующие на точку зависят только от времени

$m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \overrightarrow{F}(t)$
$\overrightarrow{r}(0) = \overrightarrow{r_0}$
$\overrightarrow{v}(0) = \overrightarrow{v_0}$
$\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{v_0} + \frac{1}{m}\int\limits_0^t \overrightarrow{F}(\tau)\,d\tau$
$\frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \overrightarrow{v}$
$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + v_0 \cdot t + \int\limits_o^t \left(\int\limits_0^\sigma \overrightarrow{F}(\tau)\,d\tau\right) d\sigma$ - Общее решение задачи

3.9.2 Декартовые проекции силы являются функциями соответствующих координат.

$\overrightarrow{F} = (F_x, F_y, F_z)$

$$\begin{cases} F_x = f_1(x) \\ F_y = f_2(y) \\ F_z = f_3(z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\frac{dv_x}{dt} = f_1(x) & , x(0) = x_0,\ v_x(0) = v_{0x} \\ m\frac{dv_y}{dt} = f_2(y) & , y(0) = y_0,\ v_y(0) = v_{0y} \\ m\frac{dv_z}{dt} = f_3(z) & , z(0) = z_0,\ v_z(0) = v_{0z} \end{cases}$$

Нет смысла решать всю систему. Рассмотрим решение 1го уравнения.
$m\frac{dv}{dt} = f(x),\ v(0) = v_0$
$\frac{dx}{dt} = v \Rightarrow dt = \frac{dx}{v}$
Подставим dt в уравнение движения, получаем уравнение с разделяющимися переменными: $m\frac{vdv}{dx} = f(x)$.
$m \cdot v \cdot dv = f(x) \cdot dx$
При этом, учитывая что $x(0) = x_0$, то получим $v(x_0) = v_0$.
Интегрируем $m \cdot v \cdot dv = f(x) \cdot dx$.
$m \cdot \int\limits_{v_0}^{v} v \cdot dv = \int\limits_{x_0}^{x} f(x) \cdot dx$
$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \frac{1}{m} \cdot \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi$
$v^2 = v_0^2 + \frac{2}{m} \cdot \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi$
$v = \pm\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} \cdot \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi}$
Знак v определяется знаком v_0.
$\frac{dx}{dt} = v \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} \cdot \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi},\ x(0) = x_0$

$$\pm\frac{dx}{\sqrt{v_0^2+\frac{2}{m}\cdot\int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi}}=dt$$

$$t=\pm\int\limits_{x_0}^{x}\sqrt{v_0^2+\frac{2}{m}\cdot\int\limits_{x_0}^{\eta} f(\xi)\,d\xi}d\eta$$

3.9.3 Декартовы проекции силы являются функциями соответствующих проекций скорости

$\overrightarrow{F}=(F_x,F_y,F_z)$

$$\begin{cases}F_x=f_1(v_x)\\F_y=f_2(v_y)\\F_z=f_3(v_z)\end{cases}$$

$$\begin{cases}m\dfrac{dv_x}{dt}=f_1(v_x) & ,x(0)=x_0,\ v_x(0)=v_{0x}\\m\dfrac{dv_y}{dt}=f_2(v_y) & ,y(0)=y_0,\ v_y(0)=v_{0y}\\m\dfrac{dv_z}{dt}=f_3(v_z) & ,z(0)=z_0,\ v_z(0)=v_{0z}\end{cases}$$

Решим только для x.

$m\dfrac{dv}{dt}=f(v)\,,\ v(0)=v_0,\ x(0)=x_0$

$m\dfrac{dv}{f(v)}=dt$

Интегрируя получим соотношение

$t=m\int\limits_{v_0}^{v}\dfrac{du}{f(u)}$

Если полученное уравнение разрешимо относительно скорости, тогда мы сможем представить в виде $v=\varphi(t)$.

$\dfrac{dx}{dt}=v=\varphi(t)$

$\cdots$

$x=x_0+\int\limits_{o}^{t}\varphi(\tau)\,d\tau$

Другой способ...

$dt=\dfrac{dx}{v}$

$\dfrac{m\cdot v\cdot dv}{dx}=f(v)$

$m\dfrac{v\cdot dv}{f(v)}=dx$

Интегрируем

$x=x_0+m\cdot\int\limits_{v_0}^{v}\dfrac{u\cdot du}{f(u)}$

3.9.4 Сила, действующая на точку имеет вид:

$F(\overrightarrow{r},\overrightarrow{v},t)=-k\overrightarrow{r}-\alpha\overrightarrow{v}+\overrightarrow{f}(t)$

Тогда уравнение движения может быть приведено к виду

$\ddot{\overrightarrow{r}}+2\lambda\dot{\overrightarrow{r}}+\omega_0^2\overrightarrow{r}=\dfrac{1}{m}\cdot\overrightarrow{f}(t)\,,\ 2\lambda=\dfrac{\alpha}{m},\ \omega_0^2=\dfrac{k}{m}$

На этот момент нам еще не рассказали как решать это уравнение на диффурах, так что, так как наш препод не хочет работать за Колотия, то я не знаю, когда этот пункт будет написан.

3.10 Импульс точки и импульс силы

Рассмотрим 2й закон Ньютона для точки

$m\dfrac{d\overrightarrow{v}}{dt}=\overrightarrow{F}$

$\dfrac{d\,(m\overrightarrow{v})}{dt} = \overrightarrow{F}$

$m\overrightarrow{v} = \overrightarrow{J}$ - импульс материальной точки(количество движения)

С учетом этог7о соотношения мы получим следующее уравнение

$\dfrac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \overrightarrow{F}$ - тоже 2й закон Ньютона

$d\overrightarrow{J} = \overrightarrow{F}dt$

$\overrightarrow{J} - \overrightarrow{J_0} = \int\limits_0^t \overrightarrow{F}d\tau$ - называется импульсом силы

Для любого вектора можно определить момент этого вектора относительно точки.

Моментом вектора a относительно точки o называют векторное произведение радиус вектора приложения $\mathrm{mom}_0\overrightarrow{A} = [\overrightarrow{r}, \overrightarrow{a}] = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{a}$

$\overrightarrow{L} = \mathrm{mom}_0\overrightarrow{J} = \left[\overrightarrow{r}, \overrightarrow{J}\right] = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{J}$

$\overrightarrow{M}$ — момент силы

$\overrightarrow{M} = \mathrm{mom}_0\overrightarrow{F} = \left[\overrightarrow{r}, \overrightarrow{F}\right] = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}$

$\overrightarrow{L} = (L_x, L_y, L_z)$ L_x — Момент импульса относительно оси x. Аналогично и для момента силы и момента импульса.

3.11 Работа и энергия

Энергия - количественная мера движения материи во всех формах этого движения.

Чтобы как то изменить энергию тела нужно что нить сделать с телом, совершить над ним работу. Понятие энергии тесно связано с работой. Работа является мерой передачи движения от одного тела к другому или мерой перехода энергии от одного тела к другому. Энергия определяет способность тела совершить работу.

Пусть материальная точка перемещается по траектории из положения (1) в положение (2). под действием какой то силы.

Определение. Элементарной работой δA называют скалярное произведение силы на элементарное перемещение.

$\delta A = \overrightarrow{F}d\overrightarrow{r}$

Разделяем траекторию на кусочки.

$A = \sum\limits_i A_i = \sum\limits_i \overrightarrow{F} \cdot \Delta\overrightarrow{r_i}$ - Криволинейный интеграл

$A = \sum\limits_i A_i = \sum\limits_i \overrightarrow{F} \cdot \Delta\overrightarrow{r_i} = \int\limits_{\smile 12} \overrightarrow{F}d\overrightarrow{r}$

То постоянной силе получим...

$A = \overrightarrow{F} \cdot \Delta\overrightarrow{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha$

Один Джоуль = Один Ньютон · Один Метр

Один Эрг = Один Джоуль · Один сантиметр

Один Джоуль = 10^7 Эрг

3.12 Мощность

$N = \dfrac{\Delta A}{\Delta t}$ - средняя мощность.

Рассматривать работу как дифференциал можно только, есть работа зависит только от времени.

$N = \dfrac{dA}{dt}$ - мгновенная мощность

$N = \dfrac{\overrightarrow{F}d\overrightarrow{r}}{dt} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}$

В система с $[N] = \dfrac{\text{Дж}}{c} = \text{Ватт}$

В систем СДС $[N] = \dfrac{\text{Эрг}}{\text{с}}$

3.12.1 Потенциальное поле сил. Силы консервативные и не консервативные.

Определение. Если на тело в любой точке пространства действует сила, закономерно меняющаяся от точке к точке, то говорят, что сила находится в поле сил.

Замечание. Понятие поля оно справедливо не только для понятия силы. Можно для любой физической величины определить поле, например поле температур, море.. Понятие поля — всеобъемлющее.

Определение. В том случае, когда при перемещении тела из одного положения в другое, работа, совершаемая силами поля не зависит от пути (траектории), а только от начального и конечного положения, то поле сил называется потенциальным, а сила — консервативной.

Теорема. *Работа консервативных сил на любом замкнутом пути равна нулю.*

Доказательство. Рассмотрим некое поле сил и точка перемещается по замкнутому пути. Возьмем на этой траектории два положение. Путь из первого во второе положение назовем первым, а из второго в первый — вторым.

$A = A^{I}_{1,2} + A^{II}_{2,1}$

δA - работа, потраченная на перемещение точки по пути I, а $\delta A'$ - работа, потраченная на перемещение точки по пути II.

$\delta A = -\delta A'$

$A^{II}_{2,1} = -A^{I}_{1,2}$

$A = A^{II}_{2,1} - A^{I}_{1,2} = 0$ □

3.12.2 Силы трения

$\delta A = \overrightarrow{F_{tp}} \cdot d\overrightarrow{r} = \overrightarrow{F_{tp}}\overrightarrow{v}dt < 0$

$A_{tp} < 0$

Работа сил трения всегда является отрицательной. Сила трения — не консервативная сила.

3.12.3 Сила тяжести

$A = \int\limits_{\underset{1,2}{\smile}} \overrightarrow{p}d\overrightarrow{r} = \int\limits_{\underset{1,2}{\smile}} m\overrightarrow{g}d\overrightarrow{r} = m\overrightarrow{g}\int\limits_{\underset{1,2}{\smile}} d\overrightarrow{r} = m\overrightarrow{g}\overrightarrow{\Delta r}$

$A = \int\limits_{\underset{1,2}{\smile}} \overrightarrow{p}d\overrightarrow{r} = \int\limits_{\underset{1,2}{\smile}} m\overrightarrow{g}d\overrightarrow{r} = m\overrightarrow{g}\int\limits_{\underset{1,2}{\smile}} d\overrightarrow{r} = m\overrightarrow{g}\overrightarrow{\Delta r} = m \cdot g \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha = m \cdot g \cdot \Delta h = m \cdot g \cdot (h_1 - h_2)$

Определение. Сила называется центральной, если в любой момент времени линия действия силы проходит через одну и ту же точку.

Замечание. Оказывается любая центральная сила консервативна.

$A = \int\limits_{\underset{1,2}{\smile}} \overrightarrow{F}d\overrightarrow{r}$

$\overrightarrow{F}d\overrightarrow{r} = F \cdot |d\overrightarrow{r}| \cos\alpha$

Теперь если он возьмет и спроектирует....

$\overrightarrow{F}d\overrightarrow{r} = F \cdot |d\overrightarrow{r}| \cos\alpha = F \cdot d\,|\overrightarrow{r}| = F \cdot dr$

$A = \int\limits_{\underset{1,2}{\smile}} \overrightarrow{F}d\overrightarrow{r} = \int\limits_{\underset{1,2}{\smile}} F \cdot dr = \int\limits_{r_1}^{r_2} F \cdot dr$

Следовательно любая центральная сила консервативна.

3.12.4 Сила упругости

В простейшем варианте силы упругости имеют вод такое обозначение

$F_{\text{упр}} = -k \cdot x$

Его работа, если он тянет пружинку, равняется

$$A = \int\limits_0^x F \cdot dx = \int\limits_0^x k \cdot x \cdot dx = \frac{k \cdot x^2}{2}$$

$A_{\text{упр}} = -\dfrac{k \cdot x^2}{2}$
Сила упругости - консервативная сила.

Определение. Физическая величина, характеризующая способность тела совершать работу называется энергией.

Если я трачу какую нить элементарную энергию, то она идет на какую то элементарную работу. $dE = \delta A$.
Механическая энергия может быть:

1. Энергия, связанная с движением тела — кинетическая энергия.

2. Энергия, связанная с нахождением тела в потенциальном поле сил — потенциальная энергия.

3.13 Кинетическая энергия

Пусть у нас некое тело под действием силы $\overrightarrow{F} = const$ за какой то промежуток времени разгоняется до скорости $\overrightarrow{v}$. Сила совершает работу и она переходит в кинетическую энергию этого тела.
$\delta A = dE$
Кинетическую энергию обозначают δT
$\delta A = dT$ - вод такое соотношение
$\delta A = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v} \cdot dt = dT$
Вспомним второй закон Ньютона
$m \cdot \dfrac{d\overrightarrow{v}}{dt} \cdot \overrightarrow{v} \cdot dt = dT$
$m \cdot \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{v} = dT$
$m \cdot d\dfrac{v^2}{2} = dT$
$d\dfrac{m \cdot v^2}{2} = dT$

$$\frac{m \cdot v^2}{2} = T$$

$\overrightarrow{J} = m \cdot \overrightarrow{v}$
$T = \dfrac{J^2}{2 \cdot m}$
Если полностью вся работа идет на изменения скорости, значит $A = \Delta T$

3.14 Потенциальная энергия

Рассмотрим некоторую материальную точку, находящуюся в поле потенциальных сил. Введем систему координат.. Введем некую функцию $U\left(\overrightarrow{r}\right)$, которая тоже будет закономерно меняться от точке к точке. Мы возьмем точку 0 и случайно зададим значение функции от этой точки $U_0 = U\left(\overrightarrow{r_0}\right)$. Возьмем еще 1ну точку и сделаем тоже самое..
И тогда получим..
$U\left(\overrightarrow{r_1}\right) = U_1 = U_0 + A_{1,0}$
$A_{1,0}$ — работа сил поля по перемещению точки из положения 1 в 0.
Возьмем еще 1ну точку..
$U\left(\overrightarrow{r_2}\right) = U_2 = U_0 + A_{2,0}$
$A_{1,2} = A_{1,0} + A_{0,2} = A_{1,0} - A_{2,0} = (U_1 - U_0) - (U_2 - U_0) = U_1 - U_2$
$A_{1,2} = U_1 - U_2 = -\Delta U$
Так как размерность U совпадает с размерностью работы, и изменение функции U дает нам работу, то можно рассматривать функцию U как функцию потенциальной энергии.
Работа сил тяжести $A = m \cdot g \cdot \Delta h = m \cdot g \cdot (h_1 - h_2)$.

Замечание. При задании функции потенциальной энергии необходимо задать нулевой уровень потенциальной энергии.

$U_1 - U_2 = m \cdot g \cdot h_1 - m \cdot g \cdot h_2$
$U = m \cdot g \cdot h$, где h - расстояние от нулевого уровня.
U может быть отрицательным
Работа сил упругости $A = -k\dfrac{x^2}{2}$, значит $U = k\dfrac{x^2}{2}$.

Свяжем понятия силы и энергии..

$\delta A = \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{l} = -dU$
$F \cdot dl \cdot \cos\alpha = -du$
$F_l \cdot dl = -du$
F_l - проекция силы на направления $\overrightarrow{l}$
$F_l = -\dfrac{\partial u}{\partial e}$
$F_x = -\dfrac{\partial u}{\partial x}$
$F_y = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$
$F_z = -\dfrac{\partial u}{\partial z}$
$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{i} \cdot F_x + \overrightarrow{j} \cdot F_y + \overrightarrow{k} \cdot F_z = -\left(\overrightarrow{i}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \overrightarrow{j}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \overrightarrow{k}\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)$ - градиент. Обозначается $grad$.
$\overrightarrow{F} = -gradU$

3.15 Классификация свободных механических систем

Внутренние силы — силы взаимодействия между точками системы, они потенциальны. Исключения составляют лишь силы трения, они в одних случаях можно считать как внутренними так и внешними.

Будем считать, что если все силы потенциальны, то полная потенциальная энергия $U = U^{(e)} + U^{(i)}$, e - внешних силы, i - внутренних.
$U^{(e)} = U\left(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}, \ldots, \overrightarrow{r_n}, t\right)$
$U_{i,j}\left(|\overrightarrow{r_i} - \overrightarrow{r_j}|\right)$
$U^{(i)} = \dfrac{1}{2} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1,\ i\neq j}^{n}\left(U_{i,j}\left(|\overrightarrow{r_i} - \overrightarrow{r_j}|\right)\right)\right)$
Полная потенциальная энергия частицы

$$U = U^{(e)}\left(\overrightarrow{r_1}, \ldots, \overrightarrow{r_n}, t\right) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1,\ i\neq j}^{n}\left(U_{i,j}\left(|\overrightarrow{r_i} - \overrightarrow{r_j}|\right)\right)\right) \tag{5}$$

Классификация систем по отношению к этой формуле сейчас будет.

1. Замкнутые механические системы

   Системы, на которые не действуют внешние силы или действие внешних сил скомпенсировано. В формуле (5) нету первого слагаемого.
   $U^{(e)} = 0$
   $U = \dfrac{1}{2} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1,\ i\neq j}^{n}\left(U_{i,j}\left(|\overrightarrow{r_i} - \overrightarrow{r_j}|\right)\right)\right)$

   $$\frac{dU}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial\overrightarrow{r_i}} \cdot \frac{d\overrightarrow{r_i}}{dt} \tag{6}$$

   $\dfrac{\partial U}{\partial\overrightarrow{r_i}} = \left(\dfrac{\partial U}{\partial x_i}; \dfrac{\partial U}{\partial y_i}; \dfrac{\partial U}{\partial z_i}\right)$
   $\dfrac{d\overrightarrow{r_i}}{dt} = \left(\dfrac{dx_i}{dt}; \dfrac{dy_i}{dt}; \dfrac{dz_i}{dt}\right)$

2. Системы, находящиеся во внешних потенциальных *стационарных* силовых полях

   Стационарная — явно от времени не зависящая.
   $U^{(e)} = U\left(\overrightarrow{r_1}, \ldots, \overrightarrow{r_n}\right)$
   Полная потенциальная энергия явно от времени не зависит.
   Полная производная от потенциальной энергии так-же определяется формулой (6).

3. Внешние потенциальное поле не стационарно.

   В этом случае формула (6) примет следующий вид

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial \overrightarrow{r_i}} \cdot \frac{d\overrightarrow{r_i}}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} \tag{7}$$

4. Все остальные.

   Это те системы, которые могут находиться в вихревых силовых полях (магнитных и т.п.), и также все системы, в которых есть внешние силы трения, и также внутренние. Мы должны рассматривать в общих позициях. Мы можем посчитать потенциальную энергию для отдельных сил, но не можем посчитать полную потенциальную энергию.

3.16 Первые интегралы уравнений движения и законы сохранения

В этом случае мы должны задать $\overrightarrow{r_1}, \ldots, \overrightarrow{r_n}, \dot{\overrightarrow{r_1}}, \ldots, \dot{\overrightarrow{r_n}}$. Мы должны задать $6 \cdot n$ значений. Но в процессе движения системы есть такие функции,, которые не меняют своих значения во время движения. Любую такую функцию $f_\alpha \left(\overrightarrow{r_1}, \ldots, \overrightarrow{r_n}, \dot{\overrightarrow{r_1}}, \ldots, \dot{\overrightarrow{r_n}}, t\right) = f_{\alpha_0} - const$ называют первым интегралом уравнения движения.

Пример. Пусть движется точка в жидкости. Действует на нее только сила вязкого трения. Сила тяжести компенсируется силой Архимеда.
$F_{\text{тр}} = -k \cdot v$
$m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = -k \cdot \overrightarrow{v}$
$m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} + k \cdot \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = 0$
$\frac{d\left(m \cdot \overrightarrow{v}\right)}{dt} + \frac{d\left(k \cdot \overrightarrow{r}\right)}{dt} = 0$
$\frac{d}{dt}\left(m \cdot \overrightarrow{v} + k \cdot \overrightarrow{r}\right) = 0$
$m \cdot \overrightarrow{v} + k \cdot \overrightarrow{r} = \text{константа}$

Факт. *Теорема о существовании: “Ведьмы существуют. Это моя Жена!” - говорил учитель Сергея Евгеньевича.*

Мы можем понизить число дифференциальных уравнений с помощью этих первых интегралов.

Среди первых интегралов уравнений движения выделяю группу (имеющих глубокое происхождение) имеющих особое значение.

1. Функция в указанных интегралов не зависит явно от времени.

$$f_\alpha \text{ - не зависит явно от времени.} \tag{8}$$

2. Функция (8) определяет некую физическую величину, которая является *аддитивной*. Это означает что для системы это величина равна сумме величин частей системы, или значение указанной величины для системы равно сумме значений этой величины для каждой частицы системы.

3. О существовании первых интегралов этой группы можно судить не по дифференциальным уравнениям движения, а исходя из общих физических представлений о природе.

Указанная группа интегралов носит название *законов сохранения.*

Мы будем рассматривать 3 закона:

1. Закон сохранения *механической энергии*

2. Закон сохранения *импульса*

3. Закон сохранения *момента импульса*

3.17 Закон сохранения *механической энергии*

Механическая энергия сохраняется в процессе движения у замкнутых систем и систем находящихся в стационарных потенциальных силовых полях, для систем типа 1 и 2.
$\dfrac{\partial U}{\partial \overrightarrow{r_i}} = \left(\dfrac{\partial U}{\partial x_i}; \dfrac{\partial U}{\partial y_i}; \dfrac{\partial U}{\partial z_i}\right)$
Покажем что этот закон можно получить из общих уравнений движения.
Рассмотрим уравнения движения $m_i\dfrac{d\overrightarrow{v_i}}{dt} = \overrightarrow{F_i},\ i = \overline{1,n}$. Где $\overrightarrow{F_i}$ - равнодействующая всех внутренних и внешних сил, действующих на i-ю точку.
$\overrightarrow{F_i} = -\mathrm{grad}U = -\left(\dfrac{\partial U}{\partial x_i}; \dfrac{\partial U}{\partial y_i}; \dfrac{\partial U}{\partial z_i}\right) = -\dfrac{\partial U}{\partial \overrightarrow{r_i}}$
$m_i\dfrac{d\overrightarrow{v_i}}{dt} = -\dfrac{\partial U}{\partial \overrightarrow{r_i}}$
Каждое уравнение скалярно умножим на скорость соответствующей точки.
$m_i\overrightarrow{v_i}\dfrac{d\overrightarrow{v_i}}{dt} = -\dfrac{\partial U}{\partial \overrightarrow{r_i}}\overrightarrow{v_i}$
$\dfrac{1}{2}\cdot m_i \cdot \dfrac{dv_i^2}{dt} = -\dfrac{\partial U}{\partial \overrightarrow{r_i}} \cdot \dfrac{d\overrightarrow{r_i}}{dt}$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right)\right) = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial \overrightarrow{r_i}} \cdot \frac{d\overrightarrow{r_i}}{dt}\right) \tag{9}$$

$\Longrightarrow$ из (6) $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial U}{\partial \overrightarrow{r_i}} \cdot \dfrac{d\overrightarrow{r_i}}{dt}\right) = \dfrac{dU}{dt} \Longrightarrow$
$\dfrac{d}{dt}\sum\limits_{i=1}^{n} T_i = -\dfrac{dU}{dt}$
$\dfrac{dT}{dt} + \dfrac{dU}{dt} = 0$
$T + U = E_0$ – константа
Рассмотрим систему, находящуюся не в стационарном силовом поле(систему 3). (рассматриваем тип системы 3)
Формула (9) исходя из соотношения (7) принимает вид $\dfrac{d}{dt}\sum\limits_{i=1}^{n} T_i = -\dfrac{dU}{dt} + \dfrac{\partial U}{\partial t}$. Поесть $\dfrac{d}{dt}(T+U) = \dfrac{\partial U}{\partial t}$.
Изменения энергии равно изменениям потенциальной энергии со временем.
Теперь рассмотрим систему типа 4.
Сила $\overrightarrow{F_i}$ - не потенциальна.
$\overrightarrow{F_i} = m_i\dfrac{d\overrightarrow{v_i}}{dt}$
$m_i \cdot \overrightarrow{v_i} \cdot \dfrac{d\overrightarrow{v_i}}{dt} = \overrightarrow{v_i} \cdot \overrightarrow{F_i}$
$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{m_i v_i^2}{2}\right) = \dfrac{d\overrightarrow{r_i}}{dt} \cdot \overrightarrow{F_i}$
$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{m_i v_i^2}{2}\right) = \dfrac{\overrightarrow{F_i}d\overrightarrow{r_i}}{dt}$
$d(T_i) = \overrightarrow{F_i} \cdot d\overrightarrow{r_i}$
$dT_i = \delta A_i$
Суммируя по всем i получим дифференциал кинетический энергии равен элементарной работе всех внутренних и внешних сил, действующих по систему.

$dT = \delta A$
$dT = \sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{F_i^{(e)}}d\overrightarrow{r_i} + \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{i=1,\ i\neq j}^{n}\overrightarrow{F_{i,j}} \cdot d\overrightarrow{r_i}$
$\Delta T = A^{(e)} + A^{(i)}$

Это теорема и изменений кинетической энергии: изменение кинетической энергии системы равно работе внутренних и внешних сил.

$-\Delta U^{(i)} = A^{(i)}$
$\Delta(T+U) = A^{(e)}$
$\Delta(T+U) \leq 0$

3.18 Закон сохранения *импульса*

$\overrightarrow{J}_i = m_i \overrightarrow{v}_i$

Формулировка: Импульс замкнутой систтемы материальных точек сохраняется.

Замечание. Внутренние силы могут быть непотенцильны.

Уравнение движения замкнутой механической системы:

$m_i \dot{\overrightarrow{v_i}} = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \overrightarrow{F_{i,j}},\ i = \overline{1,n}$

$m_i \dfrac{d\overrightarrow{v_i}}{dt} = \dfrac{d\left(m_i \overrightarrow{v_i}\right)}{dt} = \dfrac{d\overrightarrow{J_i}}{dt}$

$\dfrac{d\overrightarrow{J_i}}{dt} = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \overrightarrow{F_{i,j}},\ i = \overline{1,n}$

$\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{d\overrightarrow{J_i}}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \overrightarrow{F_{i,j}},\ i = \overline{1,n}$ - просумируем все уравнения системы.

Поменяем порядок дифференцирования и сумммирования.

$\overrightarrow{J} = \sum\limits_{i=1}^{n} \overrightarrow{J_i}$ - общий импульс системы.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \overrightarrow{F_{i,j}} &= \overrightarrow{F_{1,1}} + \overrightarrow{F_{1,2}} + \overrightarrow{F_{1,3}} + \ldots + \overrightarrow{F_{1,n}} + \\
&+ \overrightarrow{F_{2,1}} + \overrightarrow{F_{2,2}} + \overrightarrow{F_{2,3}} + \ldots + \overrightarrow{F_{2,n}} + \\
&+ \ldots + \\
&+ \overrightarrow{F_{n,1}} + \overrightarrow{F_{n,2}} + \overrightarrow{F_{n,3}} + \ldots + \overrightarrow{F_{n,n}} = \\
&= \left(\overrightarrow{F_{1,2}} + \overrightarrow{F_{2,1}}\right) + \ldots + \left(\overrightarrow{F_{i,j}} + \overrightarrow{F_{j,i}}\right) + \ldots + \left(\overrightarrow{F_{n,n-1}} + \overrightarrow{F_{n-1,n}}\right) = \\
&= \{\text{по закону Ньютона}\} = \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{J} = \overrightarrow{J_0}$ - постоянный вектор

Импульс незамкнутой системы.

$m_i \dot{\overrightarrow{v_i}} = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \overrightarrow{F_{i,j}} + \overrightarrow{F_i}^{(e)},\ i = \overline{1,n}$

$\dfrac{d\overrightarrow{J_i}}{dt} = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \overrightarrow{F_{i,j}} + \overrightarrow{F_i}^{(e)},\ i = \overline{1,n}$

$\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{d\overrightarrow{J_i}}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \overrightarrow{F_{i,j}} + \sum\limits_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i}^{(e)},\ i = \overline{1,n}$

$\dfrac{d\overrightarrow{J}}{dt} = \overrightarrow{K},\ \overrightarrow{K} = \sum\limits_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i}^{(e)}$

Вектор K - главный вектор внешних сил.

Главный вектор системы не равнодействующий, потомучто силы приложены к разным точкам.

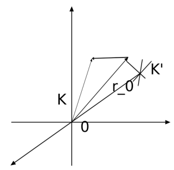

Рис. 1:

Теорема. *(О движении центра масс)*

$\overrightarrow{J} = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{v_i}$ *- Эт задано в неподвижной системе отсчета K, с центром в точке O. Давайте перейдем к какой нить другой системе отсчета K', с центром в точке O'. Так как обе системы отсчета инерциальны, то система K' должна двигаться поступательно, относительно системы K, причем без ускорения.*

$\overrightarrow{r_i} = \overrightarrow{r_i}' + \overrightarrow{r_0}$

$\overrightarrow{v_i} = v_i' + \overrightarrow{v_0}$

$\overrightarrow{v_0}$ *- постоянный вектор, так как K, K' - инерциальны.*

Перейдем от K к K'.

$$\overrightarrow{J} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\overrightarrow{v_i}' + \overrightarrow{v_0}\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{v_i}' + \overrightarrow{v_0} \sum_{i=1}^{n} m_i = \overrightarrow{J}' + \overrightarrow{v_0} \cdot M$$

$\sum\limits_{i=1}^{n} m_i = M$ *- масса всей системы.*

Имеется такая система, в которой $\overrightarrow{J}' = 0$. Такая система называется системой центра масс K_C', а центр этой системы - точку C - центром масс системы материальных точек.

В этом случае $\overrightarrow{J} = M \cdot \overrightarrow{v_c}$, где $\overrightarrow{v_c}$ - скорость центра масс механической системы. Оно преобретает смысл поступательного движения. Скорость центра массс в этом случае выспупает как скорость движения механической системы, как единогог целого.

Как найти центр масс?

$$\overrightarrow{v_C} = \frac{\overrightarrow{J}}{M}$$

$$\frac{d\overrightarrow{r_c}}{dt} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \frac{d\overrightarrow{r_i}}{dt}}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{r_c}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \frac{d\overrightarrow{r_i}}{dt}}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}\right)$$

$$\overrightarrow{r_c} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \frac{d\overrightarrow{r_i}}{dt}}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i} + \overrightarrow{const}$$

Если мы рассмотрим системы центра масс (системы в начале координат, совпожающим с центром масс), то $\overrightarrow{const} = \overrightarrow{0}$

$$x_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \frac{dx_i}{dt}}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i},\ y_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \frac{dy_i}{dt}}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i},\ z_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \frac{dz_i}{dt}}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}$$

Лирическое отступление: $x_c = \dfrac{\int x \cdot \rho(x) \cdot dx}{\int \rho(x) \cdot dx}$

$\dfrac{d\overrightarrow{J}}{dt} = \overrightarrow{K}$ *- переведем его в системы центра масс.*

$M\dfrac{d\overrightarrow{v_c}}{dt} = \overrightarrow{K}$ *- это запись представляет собой теоремы о двиижегнии центра масс.*

Центры масс механической системы движетося как некоторая фиктивная материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы и к которой приложены все внешние силы.

Чем эта формул хороша? Мы можем исключить поступательное движение системы.

Теорема. *(Кёнига)*

Попробуем посчитать кинетическую энергию при переходе от 1ной стсемы координат к другой.

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \overrightarrow{v_i^2}}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i\left(\overrightarrow{v_i}' + \overrightarrow{v_c}\right)^2}{2} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i\left(\overrightarrow{v_i}'\right)^2}{2} + \sum_{i=1}^{n} m_i\left(\overrightarrow{v_i}' \cdot \overrightarrow{v_c}\right) + \frac{v_c^2}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \end{aligned}$$

$\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{m_i\left(\overrightarrow{v_i}'\right)^2}{2} = T_c'$ *- кинетическая энергия относительно центра масс.*

$\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\left(\overrightarrow{v_i}' \cdot \overrightarrow{v_c}\right) = \left(\overrightarrow{v_c}, \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{v_i}'\right) = 0$ *так как* $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{v_i}' = 0$ *как центр системы центра масс.*

$T = T_c' + \dfrac{Mv_c^2}{2}$

Кинетическую энергию механической системы можно представить в виде 2х слогаемых: механической энергии ее поступательного движения (как единого целого, $\dfrac{Mv_c^2}{2}$*) и кинетической энергии движения частриц системы относительно ее центра масс (*T_c'*).*

3.19 Закон сохранения *момента импульса*

Момент импульса *замкнутой* механической системы сохраняются.

Замечание. Внутренние силы могут быть не потенцильны.

$\mathrm{mom}_0 \overrightarrow{a} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{a} = [\overrightarrow{r}, \overrightarrow{a}]$ - Вектор соеденяющий точеку O с точкой приложения вектора $\overrightarrow{a}$.

$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{J}$ - момент импульса.

$\overrightarrow{M} = m\left(\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v}\right)$

Мы берем уравнения двидения замкнутой механической системы точек.

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \overrightarrow{F_{i,j}},\ i = \overline{1,n}$$

Внесем массу под зна дифференциала и умножим слева на радиус вектор.

$$\overrightarrow{r_i} \times \frac{d\left(m_i \overrightarrow{v_i}\right)}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \overrightarrow{r_i} \times \overrightarrow{F_{i,j}}$$

Замечание. $\overrightarrow{r_i} \times \overrightarrow{J_i}$

$$\frac{d\overrightarrow{M_i}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{r_i} \times \overrightarrow{J_i}\right) = \frac{d\overrightarrow{r_i}}{dt} \times \overrightarrow{J_i} + \overrightarrow{r_i} \times \frac{d\overrightarrow{J_i}}{dt} = \left\{\frac{d\overrightarrow{r_i}}{dt} \times \overrightarrow{J_i} = \overrightarrow{v_i} \times m_i \overrightarrow{v_i} = 0\right\} = \overrightarrow{r_i} \times \frac{d\overrightarrow{J_i}}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{M_i}}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \overrightarrow{r_i} \times \overrightarrow{F_{i,j}},\ i = \overline{1,n}$$

$\overrightarrow{r_i} \times \overrightarrow{F_{i,j}}$ - момент силы

Складываем по всем i.
$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{dM_i}{dt}=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\overrightarrow{r_i}\times\overrightarrow{F_{i,j}}$
$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\overrightarrow{r_i}\times\overrightarrow{F_{i,j}}=\left(\overrightarrow{r_1}\times\overrightarrow{F_{1,2}}+\overrightarrow{r_2}\times\overrightarrow{F_{2,1}}\right)+\ldots+\left(\overrightarrow{r_i}\times\overrightarrow{F_{i,j}}+\overrightarrow{r_j}\times\overrightarrow{F_{j,i}}\right)+\ldots$
Таких пар будет $\dfrac{n\cdot(n-1)}{2}$.
$\overrightarrow{r_i}\times\overrightarrow{F_{i,j}}+\overrightarrow{r_j}\times\overrightarrow{F_{j,i}}=\overrightarrow{r_i}\times\overrightarrow{F_{i,j}}-\overrightarrow{r_j}\times\overrightarrow{F_{i,j}}=(\overrightarrow{r_i}-\overrightarrow{r_j})\times\overrightarrow{F_{i,j}}=0$ так как $(\overrightarrow{r_i}-\overrightarrow{r_j})\parallel\overrightarrow{F_{i,j}}$.
Таким образом $\dfrac{d}{dt}\overrightarrow{M}=0$, где $\overrightarrow{M}=\sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{M_i}$.
$\overrightarrow{M}=\overrightarrow{M_0}$ - постоянный вектор.

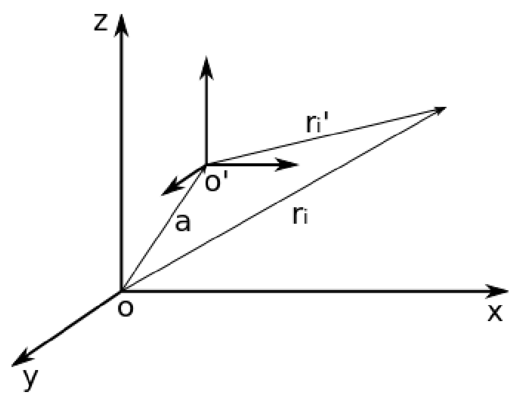

Рис. 2:

Тут скорости точек не меняются.
$\overrightarrow{r_i}=\overrightarrow{r_i'}+\overrightarrow{a}$
$\overrightarrow{v_i}=\overrightarrow{v_i}'$
$M_o=\sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{r_i}\times\overrightarrow{J_i}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\overrightarrow{r_i'}+\overrightarrow{a}\right)\times\overrightarrow{J_i}=\sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{r_i'}\cdot\overrightarrow{J_i}+\overrightarrow{a}\times\sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{J_i}=\overrightarrow{M_{o'}}+\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{J}$
Он не изменится в 2х случаях

1. В системе центра масс $\overrightarrow{J}=\overrightarrow{0}$
2. Если мы делаем перенос на вектор перпендикулярный вектору импутьса системы. $\overrightarrow{J}=\overrightarrow{0}$

Давайте из общей системы перейдем к ссиетму центра масс, которая движется с некоторой скоростью.

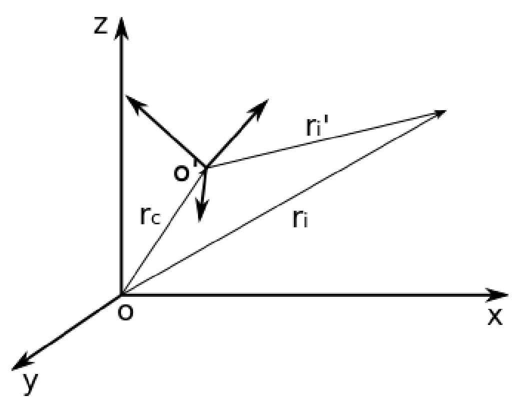

Рис. 3:

$\overrightarrow{r_i} = \overrightarrow{r_i'} + \overrightarrow{r_c}$
$\overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{v_i'} + \overrightarrow{v_c}$
Система наша являются инерциальной, тоесть она не вращается.
Переходом от системы коордимат

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{M_o} &= \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{r_i} \times \overrightarrow{J_i} = \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\overrightarrow{r_i'} + \overrightarrow{r_c}\right) \times \left(\overrightarrow{v_i'} + \overrightarrow{v_c}\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{r_i'} \times \overrightarrow{v_i'} + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{r_i'}\right) \times \overrightarrow{v_c} + \overrightarrow{r_c} \times \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{v_i'}\right) + \overrightarrow{r_c} \times \overrightarrow{v_c} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{r_c} = \dfrac{\sum m_i \overrightarrow{r_i}}{\sum m_i} \\ M\overrightarrow{r_0} = \sum m_i \overrightarrow{r_i} \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{r_i'}\right) = 0 \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{v_i'}\right) = 0 \end{array} \right\} = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{r_i'} \times \overrightarrow{J_i'} + \overrightarrow{r_c} \times M\overrightarrow{v_c} = \\
&= \left\{ \begin{array}{c} \sum\limits_{i=1}^{n} \overrightarrow{r_i'} \times \overrightarrow{J_i'} = M_c' \\ \overrightarrow{r_c} \times M\overrightarrow{v_c} = \overrightarrow{r_c} \times \overrightarrow{J} \end{array} \right\} = \\
&= \overrightarrow{M_c'} + \overrightarrow{r_c} \times \overrightarrow{J}
\end{aligned}
$$

Момент импульса системы мжено представить в виде суммы 2х слогаемых, одно из них: момент импульса сисстемы относительно его центра масс, котлорый называется собственным механическим моментом, и момента импульса системы, как единого целого.

В незамкнутой системе.

$\overrightarrow{r_i} \times m_i \dfrac{d\overrightarrow{v_i}}{dt} = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \overrightarrow{r_i} \times \overrightarrow{F_{i,j}} + \overrightarrow{r_i} \times \overrightarrow{F_i^{(e)}},\ i = \overline{1,n}$

$\dfrac{d}{dt} \sum\limits_{i=1}^{n} \overrightarrow{r_i} \times \overrightarrow{J_i} = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \overrightarrow{r_i} \times \overrightarrow{F_{i,j}} + \sum\limits_{i=1}^{n} \overrightarrow{r_i} \times \overrightarrow{F_i^{(e)}}$

$\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \overrightarrow{r_i} \times \overrightarrow{F_{i,j}} = 0$

$\sum\limits_{i=1}^{n} \overrightarrow{r_i} \times \overrightarrow{F_i^{(e)}} = \overrightarrow{N}$ — носит называние *главного момента внешних сил.*

$\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt} = \overrightarrow{N}$ — некое диференциальное уравнение

$\dfrac{d\overrightarrow{J}}{dt} = \overrightarrow{K}$ — это для импульса, а не для его момента

$\dfrac{d}{dt}\overrightarrow{M_o} = \sum\limits_{i=1}^{n} \overrightarrow{r_i} \times \overrightarrow{F_i^{(e)}}$

$\dfrac{d\left(\overrightarrow{M_c'} + \overrightarrow{r_c} \times \overrightarrow{J}\right)}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\overrightarrow{r_i}' + \overrightarrow{r_c}\right) \times \overrightarrow{F_i^{(e)}}$

$\dfrac{d\overrightarrow{M'_c}}{dt} + \dfrac{d}{dt}\left(\overrightarrow{r_c} \times \overrightarrow{J}\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \overrightarrow{r'_i} \times \overrightarrow{F_i^{(e)}} + \overrightarrow{r_c} \times \sum\limits_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i^{(e)}}$

$\dfrac{d}{dt}\left(\overrightarrow{r_c} \times \overrightarrow{J}\right) = \left(\overrightarrow{v_c} \times \overrightarrow{J_c}\right) + \left(\overrightarrow{r_c}\dfrac{d\overrightarrow{J}}{dt}\right)$

$\overrightarrow{J_c} = M \cdot \overrightarrow{v_c} \Longrightarrow \overrightarrow{v_c} \times \overrightarrow{J_c} = 0$

$\sum\limits_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i^{(e)}} = \overrightarrow{K}$

$\dfrac{d\overrightarrow{M'_c}}{dt} + \overrightarrow{r_c} \times \dfrac{d\overrightarrow{J}}{dt} = \overrightarrow{N'_c} + \overrightarrow{r_c} \times \overrightarrow{K}$

Учитывая это равенство $\dfrac{d\overrightarrow{J}}{dt} = \overrightarrow{K}$, мы приходим к следуюшему соотношению

$\dfrac{d\overrightarrow{M'_c}}{dt} = \overrightarrow{N_c}$ — будет описывать вращение нашей системы.

Пару слов о моменте силы: у нас возможно в школе, те у кого физика была, там было понятие момента силы: и было оно таким: $\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F} = \overrightarrow{N}$. Берем систему координат.

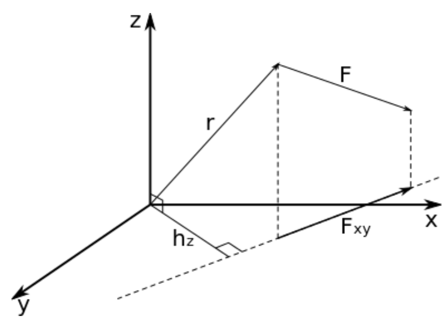

Рис. 4:

$\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}\left(yF_z - zF_y\right) + \overrightarrow{j}\left(zF_x - xF_z\right) + \overrightarrow{k}\left(xF_y - yF_x\right)$

$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{i}N_x + \overrightarrow{j}N_y + \overrightarrow{k}N_z$

Из центра перпендикуляр опускаем на эту линию. — Расстояние от оси oZ до линии действия силы (до прямой, на которой эта сила лежит).

$N_z = h_z \cdot F_{xy}$

$N_y = h_y \cdot F_{xz}$— момент силы — произведение силы на плечо

$N_x = h_x \cdot F_{yz}$

3.20 Применение законов сохранения к интегрирований уравнений движения

Будем применять только к одному случаю(заголовык был условный)

3.20.1 Одномерное движение

Задачей об одномерном движении принято называть движение консервативной механической системы с одной степенью свободы. (положение описывается всего лиш одной координатой, и есть только внешние силы)

Пусть x — координата системы. И тогда полная энергия может быть представлена в виде $E = \dfrac{m\left(\dot{x}\right)^2}{2} + U\left(x\right) = const$. Так как систма консервативная, то она константа.

Пример. Скажем точка движется по вертикале в поле тяжести земли.

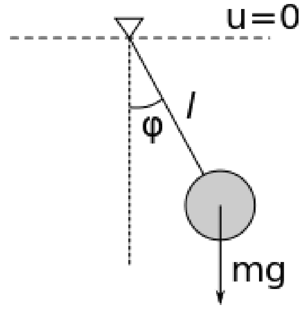

Рис. 5:

$E = \frac{m_i (\dot{y})^2}{2} + mgy$

Пример. Математический маятник.

8

Рис. 6:

Она весит на нитке (принебрегаем весом стержня).
Выберем нулевой уровень потенциальной энергии.
Длинна стержня l.
При этом ось направим вверх.
Определим скорость этой точки $v = \omega \cdot l = \dot{\varphi} \cdot l$
Потенциальная энергия определяется так: $U = -l \cdot \cos\varphi \cdot m \cdot g$
$E = \frac{m \cdot l^2 \cdot (\dot{\varphi})^2}{2} + l \cdot m \cdot g \cdot \cos\varphi = const$ Это константа, если опустить силу трения и сопротивление воздуха.

$E = \frac{m (\dot{x})^2}{2} + U(x) = const = E_0$
Так как $x(0) = x_0$ и $\dot{x}(0) = v_0$ — определена система отсчета, то можем сделать так: $E_0 = \frac{m \cdot v_0^2}{2} + U(x)$
$\dot{x} = \pm \left(\frac{2}{m} (E_0 - U(x)) \right)^{\frac{1}{2}}$
$dt = \pm \left(\frac{2}{m} (E_0 - U(x)) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot dx$
$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E_0 - U(x)}} + c$
$t(x_0) = 0$
Мы можем получить константу c.
Группа вопросов, в которые включает в себя каественный анализ

1. При каких значениях полной энергиях E в поле $U(x)$ (потенциальная энергия силового поля) впринципе возможно движение.

2. В каких областях изменения независимого переменного возможно движение.

   Определение. Области в которых возможно движение системы называются разрешенными областями.

3. Какой характер имеет движение в каждой из разрешенных областей.

1. Ответ:

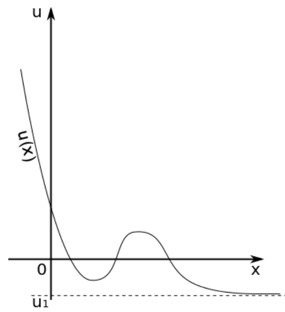

Рис. 7:

$E = T + U\left(x\right)$

Полная энергия системы вдруг окажется $E \leq U_1$. Что тогда? Тогда движение в системе быть не может.

Чтобы движение возникло нужно чтобы $E > U_1 = U\left(+\infty\right)$.

2. Ответ:

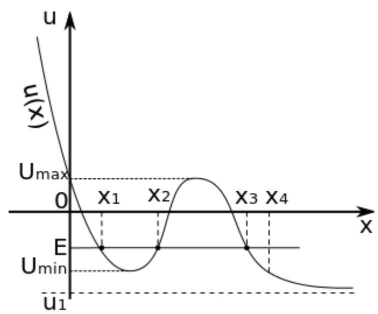

Рис. 8:

Если $U_1 < E < U_{min}$ тогда движение может происходить только в $+\infty$.

Если $U_{min} < E < U_{max}$ $x \in \left(x_1; x_2\right),\ x \in \left(x_3; +\infty\right)$. От x_1 до x_2 точка совершает колебательное движение. Это область носит название потенциальная яма. Область $\left(x_2; x_3\right)$ — потенциальный барьер, и без дополнительной энергии тело не может перескочить через его.

Если $E > U_{max}$ $x \in \left(x_0; +\infty\right)$.

Вывод. *Любая свободная систнма стремится к минимуму потенциальной энергии.*

Рассмотрим взаимодействие например 2х материальных тел.

1. Абсолютно не упругий удар.

   Определение. Им называется такое взаимодействие тел, при котором после взаимодействия взаимодействующие тела становятся единым телом.

   $\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ m_1,\ m_2 \to \overrightarrow{U},\ \left(m_1 + m_2\right)$

   $\overrightarrow{v_1} \cdot m_1 + \overrightarrow{v_2} m_2 = \overrightarrow{U}\left(m_1 + m_2\right)$

   $\overrightarrow{U_2} = \dfrac{\overrightarrow{v_1} \cdot m_1 + \overrightarrow{v_2} m_2}{m_1 + m_2}$

   $T_1 = \dfrac{m_1 v_1^2}{2} + \dfrac{m_2 v_2^2}{2}$

   $T_2 = \dfrac{\left(m_1 + m_2\right) U^2}{2} = \dfrac{v_1^2 m_1^2 + 2 m_1 m_2 \overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2} + v_2^2 m_2^2}{2\left(m_1 + m_2\right)}$

$$\begin{aligned}
\Delta T &= T_2 - T_1 = \\
&= \frac{1}{2}\frac{v_1^2m_1^2 + 2m_1m_2\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2} + v_2^2m_2^2 - m_1^2v_1^2 - m_1m_2v_1^2 - m_1m_2v_2^2 - m_2^2v_2^2}{m_1+m_2} = \\
&= \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left(-v_1^2 + 2\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2} - v_2^2\right) = \\
&= -\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left(\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}\right)^2 \le 0
\end{aligned}$$

Определение. $\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ — приведенная масса системы.

2. Абсолютно упругий удар.

Определение. Это такое взаимодействие тел, при котором не происходит потерь энергии.

Рассмотрим пример — 2 тела сталкиваются (взаимодействуют). При абсолюьно упругом ударе происходит: кинетическая энергия переходит в потенциальную. Абсолютно упругого удара не существует. Ими мы считаем если потери энергии при взаимодействии намного меньше чем общая энергия системы.

$\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ m_1,\ m_2 \to \overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2}$

$$\begin{cases} m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} = m_1\overrightarrow{u_1} + m_2\overrightarrow{u_2} \\ \dfrac{m_1v_1^2}{2} + \dfrac{m_2v_2^2}{2} = \dfrac{m_1u_1^2}{2} + \dfrac{m_2u_2^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1\left(\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{u_1}\right) = m_2\left(\overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{v_2}\right) \\ \dfrac{m_1}{2}\left(v_1^2 - u_1^2\right) = \dfrac{m_2}{2}\left(u_2^2 - v_2^2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1\left(\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{u_1}\right) = m_2\left(\overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{v_2}\right) \\ \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{u_2} \end{cases}$$

3.21 Закон всемирного тяготения

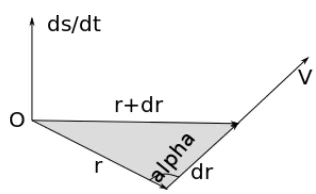

Рис. 9:

За время Δt частица переместиласть на $\Delta\overrightarrow{r}$.
$\Delta t \cdot \overrightarrow{v} = \Delta\overrightarrow{r}$
$d\overrightarrow{r} = \overrightarrow{v}dt$
Давайте попробуем посчитать площадь фигуры.
$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{r} \cdot \Delta\overrightarrow{r} \cdot \sin\alpha$
$\Delta S = \dfrac{1}{2}r \cdot \Delta r \cdot \sin\alpha = \dfrac{1}{2} \cdot r \cdot v \cdot \sin\alpha \cdot \Delta t$ — Это похоже на векторное произведение.
$dS = \dfrac{1}{2} \cdot (r \cdot u \cdot \sin\alpha) \cdot dt$
$\dfrac{dS}{st} = \dfrac{1}{2} \cdot r \cdot v \cdot \sin\alpha$
Но так как справа вектор, то слева тоже должен быть вектор.
$\dfrac{d\overrightarrow{S}}{st} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v}$ — Секториальная скорость — Скорость изменения этой площади с течением времени, которая описывается радиус вектором точки — Это площадь описываемая радус вектором в еденицу времени.

Ее вектор направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежит треугольник, от которого мы берем площадь.

Рассмотрим момент импульса.

$\overrightarrow{M} = m\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v}$

$\overrightarrow{M} = 2m\dfrac{d\overrightarrow{S}}{dt}$

Когда на точку действует внешняя сила: $\dfrac{dM}{dt} = \overrightarrow{N}$

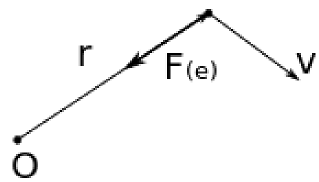

Рис. 10:

$N = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F^{(e)}} = 0$ — момент силы относительно точки O

Мы получаем что при движении точки в поле центральных сил момент сил сохраняется.

$\overrightarrow{N}$ — постоянный вектор. $\Longrightarrow \dfrac{d\overrightarrow{S}}{dt}$ - постоянный.

Мы доказали теорему площадей.

Теорема (Теорема площадей)**.** *Траэктория материальной точки в поле центральных сих есть плоская кривая.*

За равные промежутки времени радиус вектор материальной точки описывает равные площади.

Справедлива и обратная теорема.

Законы Кеплера движения планет солнейной системы:

1. Каждая планета движется по эллипсу в одном из фокусов которых находится солнце.

2. Радиус вектор планеты в за равные промежутки времени описывает равные площади.

3. Квадраты времени обращения планет вокруг солнца относятся как кубы больших осей элептических орбит.

$R_1, R_2, \ldots, R_8$

Из 1го и 2го закона Кеплера и теоремы площадей следует, что все планеты движутся под действием центральной силы. Исходя их 2го акона Ньютона, должно получаться, что ускорение должновычисляться через силу, действующую на планеты.

$m \cdot \omega = F$

Если принять что планеты движутся по окружностям, то:

$m \cdot \omega_1 = F$

Тоесть есть только нормальное ускорение.

$m \cdot \omega^2 \cdot R = F$

Угловая скорость.

$\dfrac{\Delta u}{\Delta T}$

$T_1, T_2, \ldots, T_8$ — времена обращения планты вокруг солнца.

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

$m \cdot \dfrac{4\pi^2}{T^2} R = F$

$T_1^3 : T_2^3 : \ldots : T_8^3 = R_1^3 : R_2^3 : \ldots : R_8^3$

$\dfrac{R^3}{T^2} = const = k$

$\dfrac{1}{T^2} = \dfrac{K}{R^3}$

$m \cdot 4\pi^2 k \cdot \dfrac{1}{R^2} = F$
$K = 4\pi^2 k$
$F = \dfrac{K}{R^2} \cdot m$ — эта сила с которой планета притягивается к солнцу.
Масса солнца спрятана в коофиценте K
$F = G\dfrac{M \cdot m}{R^2}$
Все тела притягиваются друг к другу. Так родился *закон всемирного тяготения.*

Лет через 100 Кавендиш (англичанин) поставил эксперемент, с которым вычислил G — гравитационную постоянную.

$G = 6.6726 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{Н \cdot м^2}{кг^2}$

3.22 Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции.

Рассмотрим 2 системы отсчета, подвижную(k', вся система движется поступательно но с ускорением) и нбеподвижную (k).

Точка M
Тогда относительнос системы k': $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{\omega'}$
$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{r'}$
$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{v'}$
$\omega = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{\omega'}$ — потом в более сложном варианте.
Посмотрим с точки зрения 2го закона Ньютона.
$m \cdot \overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{F}$
$m \cdot \overrightarrow{a} + m \cdot \overrightarrow{\omega'} = F$
$m\overrightarrow{\omega'} = \overrightarrow{F} - m\overrightarrow{a}$ — это отношение в подвижной системы отсчета.
Ему можно придать вид 2го закона Ньютона, если считать что $-m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F_{in}}$ — сила инерции.
В общем случае: $m \cdot \overrightarrow{\omega'} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{F_{in}}$.

Во всех системах отсчета всем физическим законам можно придать подобный вид — сказал Ейнштейн в своей теории относительности.

Рассмотрим другую ситуацию: Вы в автобусе. Автобус резко тормозит и вы падаете на колени незнакомой девушки. Вопрос: Что ей сказать? Ответ: “Я не специально, это же проявление сил инерции...” Но если она не знает физику то вам конечно пападет..

Если вы стоите в середине диска, то вы можете не чувствовать что диск двигается. А пружинка растянулась..

$m \cdot \omega_n = F_{упр}$
$F\omega^2 R = F_{упр}$
$0 = F_{упр} - m\omega^2 R$ — в подвижной системе
А теперь рассмотрим общий случай:
$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{r'}$
$\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ — еденичные вектора, но меняющие направления, тоесть не постоянные.
$\dfrac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \dfrac{d\overrightarrow{r_0}}{dt} = \dfrac{d\overrightarrow{r'}}{dt}$
$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_0}$
$\overrightarrow{r'} = \overrightarrow{i}x + \overrightarrow{j}y + \overrightarrow{k}z$
$\dfrac{d\overrightarrow{r'}}{dt} = \dfrac{d\overrightarrow{i}}{dt}x + \overrightarrow{i}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{d\overrightarrow{j}}{dt}y + \overrightarrow{j}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{d\overrightarrow{k}}{dt}z + \overrightarrow{k}\dfrac{dz}{dt}$
$\overrightarrow{i}\dfrac{dx}{dt} + \overrightarrow{j}\dfrac{dy}{dt} + \overrightarrow{k}\dfrac{dz}{dt} = v'$
$\dfrac{d\overrightarrow{i}}{dt}x - \overrightarrow{i}$ не меня есть по величине, а менятеся по направлению.
$\dfrac{d\overrightarrow{i}}{dt}x + \dfrac{d\overrightarrow{j}}{dt}y + \dfrac{d\overrightarrow{k}}{dt}z = x \cdot \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{i} + y \cdot \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{j} + z \cdot \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{\omega} \times \left(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}\right) = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r'}$
$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r'} + \overrightarrow{v'}$

$\overrightarrow{v_l} = \overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r'}$ — переносная скорость — скорость того пункта подвижной системы отсчета, в которой в данный момен находяится движуюшаяся точка.

Берем еще 1ну производнут, так как нада нам ускорение.

$\dfrac{d\overrightarrow{r'}}{dt} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r'} + \overrightarrow{v'}$

$\overrightarrow{\omega} = \dfrac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \dfrac{d\overrightarrow{v_0}}{dt} + \dfrac{d\overrightarrow{\omega}}{dt} \times \overrightarrow{r'} + \overrightarrow{\omega} \times \dfrac{d\overrightarrow{r'}}{dt} + \dfrac{d\overrightarrow{v'}}{dt} = \overrightarrow{\omega_0} + \overrightarrow{\varepsilon} \times r' + \overrightarrow{\omega} \times \left(\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r'} + v'\right) + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{v'} + \overrightarrow{\omega'}$

$\dfrac{dv_0}{dt}$ — это задана в инерциальной системе отсчета

Раскривая все скорки приходим к:

$\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{\omega_0} + \overrightarrow{\varepsilon} \times \overrightarrow{r'} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r'} + 2\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{v'} + \overrightarrow{\omega'}$

$\overrightarrow{\omega_0} + \overrightarrow{\varepsilon} \times \overrightarrow{r'} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r'} = \overrightarrow{\omega_l}$

$2\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{v'} = \overrightarrow{\omega_c}$ — ускорение Кориолиса

$m\overrightarrow{\omega'} = \overrightarrow{F} - m\overrightarrow{\omega_0} - m \cdot \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r'} - m\overrightarrow{\varepsilon} \times \overrightarrow{r'} - m\overrightarrow{\omega_c}$

$-m\overrightarrow{\omega_0} - m \cdot \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r'} - m\overrightarrow{\varepsilon} \times \overrightarrow{r'} - m\overrightarrow{\omega_c}$ — сила инерции

$-m\overrightarrow{\omega_0}$ — поступательные силы инерции

$-m \cdot \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r'}$ — центробежные силы инерции

$-m\overrightarrow{\varepsilon} \times \overrightarrow{r'}$ — не придумали название для этого слогаемого.

3.23 Динамика твердого тела

3.23.1 Импульс твердого тела

$\overrightarrow{J} = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{v_c} \cdot M$

Не относительно центра масс:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{J} &= \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{v_i} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{v_0} m_i + \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r_c} \end{aligned}$$

$\overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{v_i'}$

$\dfrac{d\overrightarrow{r_i}}{dt} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r_i}$ — скорость в системе, связаной с подвижной системе отсчета.

$$\begin{aligned} &= \overrightarrow{v_0} \times \cdot M + \overrightarrow{\omega} \times \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{r_i'} = \\ &= \left\{ \frac{\sum m_i r_i'}{\sum m_i} = R_o \right\} = \\ &= \overrightarrow{v_0} \cdot M + \overrightarrow{\omega} \times M\overrightarrow{R_o} \end{aligned}$$

Замечание. $\overrightarrow{J} = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{v_i} = \sum\limits_{i=1}^{n} \rho_i \Delta V_i \overrightarrow{v_i} = \iiint\limits_V \rho_i \cdot \overrightarrow{v_i} \cdot dV$

3.23.2 Кинетическая энергия твердого тела

Если вернуться к теореме Кенига...

$$
\begin{aligned}
T &= \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} = \\
&= \left\{ \overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{v_c} + \overrightarrow{v_i'} \right\} = \\
&= \frac{v_c^2 \cdot M}{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \left(\overrightarrow{v_i'}\right)^2}{2} = \\
&= \left\{ \overrightarrow{v_i'} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r_i'} \right\} = \\
&= \frac{v_c^2 M}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r_i'} \right)^2
\end{aligned}
$$

$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \left(\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r_i'} \right)^2$ — вращательная энергия твердого тела
$\overrightarrow{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$
$r_i' = (x, y, z)$

$$
\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r_i'} \right)^2 &= \left(|\overrightarrow{\omega}| \cdot \left|\overrightarrow{r_i'}\right| \cdot \sin\alpha \right)^2 = \\
&= |\overrightarrow{\omega}|^2 \left|\overrightarrow{r_i'}\right|^2 - (\overrightarrow{\omega}; \overrightarrow{r_i})^2 = \\
&= \left\{ \begin{array}{c} |\overrightarrow{\omega}|^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 \\ |\overrightarrow{r}|^2 = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 \\ \left(\overrightarrow{\omega}; \overrightarrow{r_i'}\right)^2 = \omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2 + \\ +2\omega_x\omega_y xy + 2\omega_y\omega_z yz + 2\omega_z\omega_x zx \end{array} \right\} = \\
&= \omega_x^2 \left(y^2 + z^2\right) + \omega_y^2 \left(x^2 + z^2\right) + \omega_z^2 \left(y^2 + x^2\right) - \\
&- \ 2\omega_x\omega_y xy + 2\omega_y\omega_z yz + 2\omega_z\omega_x zx =
\end{aligned}
$$

$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} \left(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 \right) + 2I_{xy}\omega_x\omega_y + 2I_{yz}\omega_y\omega_z + 2I_{xz}\omega_x\omega_z$
Где:
$I_{xx} = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(y_i^2 + z_i^2\right) m_i$, $I_{yy} = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(x_i^2 + z_i^2\right) m_i$, $I_{zz} = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(x_i^2 + y_i^2\right) m_i$ — Осевые оменты инерции
$I_{xy} = -\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i m_i$, $I_{xy} = -\sum\limits_{i=1}^{n} x_i z_i m_i$, $I_{yz} = -\sum\limits_{i=1}^{n} y_i z_i m_i$ — Центробежные моменты инерции
$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yz} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$ — тензор инерции — матрица инерции

Тензор можно привести к каноническом у виду, тогда матрица примет вод такой вид: $I = \begin{pmatrix} I_{xx}^* & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy}^* & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz}^* \end{pmatrix}$

Тогда: $T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} \left(I_{xx}^*\omega_x^2 + I_{yy}^*\omega_y^2 + I_{zz}^*\omega_z^2 \right)$

$I_{xx}^* = I_1$; $I_{yy}^* = I_2$; $I_{zz}^* = I_3$ — Главные моменты инерции, а оси, относительно которых они вычислены, называются главными осями инерции. То что мы сделали с матрицей называется приведенгие к главным осям.

$I_{xx}^* = I_1$; $I_{yy}^* = I_2$; $I_{zz}^* = I_3$ — Характеристические числа матрицы $\begin{vmatrix} I_{xx} - I & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yz} & I_{yy} - I & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} - I \end{vmatrix} = 0$

В случае вращения относителдьно неподвижной оси и в случае качения по поверхности:
$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} I_{zz}\omega^2$
Только в случае качения будет еще и поступательтная

$T = \dfrac{Mv^2}{2} + \dfrac{I\omega^2}{2}$

Формула Штейнера: $J = J^* + a^2 M$. Она нудна для пересчета момента инерции при переходе от системы центра масс к другой системе, тоесть при смещении оси на a.

3.23.3 Момент импульса твердого тела

$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{R_c} \times \overrightarrow{J} + \overrightarrow{M_c}$

Момент импульса твердого тела ($\overrightarrow{M}$) = момент импульса поступательного движения ($\overrightarrow{R_c} \times \overrightarrow{J}$) + собственный механический момент ($\overrightarrow{M_c}$).

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M_c} &= \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{r_i'} \times \left(m_i \overrightarrow{v_i'}\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overrightarrow{r_i'} \times (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r_i'}) = \\
&= \left\{\overrightarrow{a} \times \left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right) = \overrightarrow{b}\,(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{c}) - \overrightarrow{c}\left(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}\right)\right\} = \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\overrightarrow{r_i'}^2 \overrightarrow{\omega} - \left(\overrightarrow{r_i'}; \overrightarrow{\omega}\right) \cdot \overrightarrow{r_i'}\right)
\end{aligned}$$

Возьмем покомпонентно:

$$\begin{aligned}
M_{C_x} &= \sum_{i=1}^{n} \left(m_i \left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right) \omega_x - \left(x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z\right) x\right) = \\
= - &\sum_{i=1}^{n} m_i \left(y_i^2 + z_i^2\right) - \sum_{i=1}^{n} m_i y_i x_i \omega_y - \sum_{i=1}^{n} m_i z_i x_i \omega_z = \\
&= \left\{\begin{array}{c} -\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \left(y_i^2 + z_i^2\right) = I_{xx} \\ -\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i x_i \omega_y = I_{xy} \\ -\sum\limits_{i=1}^{n} m_i z_i x_i \omega_z = I_{xz} \end{array}\right\}
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{M_{C_x}} = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$
$\overrightarrow{M_{C_y}} = I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z$
$\overrightarrow{M_{C_z}} = I_{xz}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$

$$\overrightarrow{M_c} = I \cdot \overrightarrow{\omega}$$

3.24 Уравнение движение твердого тела

Оно имеет 6 степеней свободы. Нужно 6 координат (6 уравнений, скалярных, или 2 векторных). Мы выбераем координаты полюса и углы Эйлера. Вместо полюса мы можем взять координаты цента масс.

$M\dfrac{d\overrightarrow{v_c}}{dt} = \overrightarrow{K}$, где $\overrightarrow{K} = \sum\limits_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i^{(e)}}$ — сумма всех внешних сил.

Но нам нужно еще задать вращение.

Для момента импульса незамкнутой системы: $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt} = \overrightarrow{N}$, где $\overrightarrow{N} = \sum\limits_{i=1}^{n} \overrightarrow{r_i} \times \overrightarrow{F_i^{(e)}}$

Вспомним что $\overrightarrow{M} = I\overrightarrow{\omega}$. I — константа, отвечающая за инерциальные свойства твердого тела.

$I\dfrac{d\overrightarrow{\omega}}{dt} = \overrightarrow{N}$

3.25 Элементы механики сплошной среды

3.25.1 Деформируемое твердое тело

3.25.1.1 Деформации и напряжения

Определение. Деформация — изменения формы и обьема твердого тела.

Определение. Деформация называется упругой, если после прекращения действия внешних сил тело принимает прежние размеры и форму.

Замечание. Упругой деформации не бываетя

Определение. Деформации, которые сохраняются в твердом теле называются пластическими.

Деформации — изгиб, кручение, сдвиг, кручение и так далее...
Как оказалось, при детальном изучении, любой вид деформации сводится к 2м — деформации растяжения и сжатия и деформация сдвига, все остальное это их комбинация.
Берем мы такие стержень, и растягиваем его в разные стороны двумя силами.
$\Delta l > 0$ — растяжение
$\Delta l < 0$ — сжатие
Рассматриваем не силы, а напряжения, возникающие внутри тела.
$\overrightarrow{\sigma} = \dfrac{\overrightarrow{F}}{s}$
Если сила направлена по нормали к поверхности, то напряжение называется нормальным. Если сила направлена по косательной к поверхности, то напряжение называется тангенциальным.
Количественнной мерой, характеризуюжая степень деформации называется относительная деформация.
В качестве $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l}$ — степень деформации.
При любом растедении и сжатие есть поперечная степень сжатия $\varepsilon' = \dfrac{\Delta d}{d}$, где d — диаметр сечения.
И между этими величинами есть соотношение, определяемое материалом.
Записывается оно так: $\varepsilon' = -\nu \cdot \varepsilon$, где $\nu \leq \dfrac{1}{2}$ — коофицент Пуассона
Если расматриватьт упругую деформацию, то есть соотношение между $\overrightarrow{\sigma} = \dfrac{\overrightarrow{F}}{s}$ и $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l}$.
Оно записывается так $\sigma = E \cdot \varepsilon$, где E — коэфицент пропорционольности, определяющийся свойствами материала, и называется модулем Юнга.
По сути $\sigma = E \cdot \varepsilon$ это закон Гука. Этому закону тела подчиняются до определенного предела, но у кажого тела этот предел разный.
Это примерный график. Это зависимость деформации от напряжения.

- до $\sigma_{\text{пр}}$ — область выполнения закона Гука
- до $\sigma_{\text{упр}}$ — предел упругости
- $[b; c]$ — область пластической деформации, остается остаточная деформация $[0; F]$.
  C — предел тякучасти
- $[d, E]$ — необратимые разружения
- $[d; +\infty]$ — предел расзушения. Дальше уже идет пунктир потому что дальше в результате воздействия сил тела может и не быть уже.

3.25.1.2 Напряжение и деформация при сдвиге Для того чтобы тело не вражалось мы прикладываем еще 2 силы дополнительно.

Чем можно характеризовать степень деформации? Ее можно охарактеризовать углом γ. В данном случае он равен $\gamma = \dfrac{\gamma}{2}$ — это деформация сдвига.
Между γ и τ существует определенное соотношение: $\tau = G \cdot \gamma$, где G — модуль сдвига.
Оказывается что $\nu,\ E,\ G$ — зависимые. Например $G = \dfrac{E}{2\,(1+\nu)}$.

Характер зависимости $\tau = G \cdot \gamma$ аналогичен характеру зависимости деформации от напряжения.

В твердом теле деформации в разных точках происходят в разных направлениях и определяются 21м коофицентом. В анизотропном случае хватает 6ти.

Напрядение, которое действует на этой плоскости можно связать с Тензором напрядения: $\Gamma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$,

где $\begin{matrix} \tau_{xy} = \tau_{yx} \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} \end{matrix}$.

$\overrightarrow{\sigma} = \Gamma \cdot \overrightarrow{n}$

Первый индекс — ось, в направлении которой действует напряжение. Второй — площадка, к каторой оно приложено.

Этот Тензор можно привети к деагональному виду.

Можно рассматривать еще и Тензор деформации.

Тензор деформации — $B_c = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$

3.25.1.3 Закон Гука в общем виде.

Выглядит оно так: $B_c = \frac{1+\nu}{E}\Gamma \frac{\nu\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right)}{E} I$, где I — едeничная матрица, $(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$ — называется 3σ — трисигма.

$\Gamma = \frac{E}{1+\nu}\left(B_c + \frac{\nu\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right)}{1-2\nu} I\right)$ — Обратная зависимость, которая здесь определяется.

3.25.2 Механика жидкости

А подразумевается механика газа, так как они похожи и местами совподают. Вместе все это это механика сплошной среды.

Определение. Несжимаемая жидкость — жидкость, плотность каторой во всех точках одинакова ине изменяется со временем.

В жидкости так как и в твердом теле под дейсмтвием внешних сил возникает внутренее усилие. Но они существенно отличаются. В жидкостяж по любому направлению они одинакомы, и направлены по нормали к поверхности. Они называется не напряжением, а давлением: $p = \frac{F}{S}$ (сила деленная на площадь). Это давление подчиняется закону Паская: *давление в любом месте покоющейся жидкости одинакого по всем направлениям и одинакого передается по всему обьему занятому покоящейся жидкостью.*

Рассмотрим несжимаемую жидкость и гидрастатическое давление.

$mg = \rho \cdot h \cdot S \cdot g$

$p = \frac{F}{S} = \rho \cdot g \cdot h$ — гидростатичесое давление

Закон Архимеда: *на тело, погруженного в жидкость действует выталкивающая сила, равная весу вытесненной этим телом жидкости.*

$F_A = g \cdot \rho_{ж} \cdot V_{т}$

Этот закон действует не толшько в жидкостях, но и в газе.

$p_1 = \rho g h,\ p_2 = \rho g h_2$

$F_1 = p_1 S,\ F_2 = p_2 S$

$F_A = F_2 - F_1 = \rho_{ж} g h_2 S - \rho_{ж} g h_1 S = g \rho_{ж} S \left(h_2 - h_1\right)$

Это все про покоющеюся жидкость. Щас поговорим и тячением жидкости.

Определение. Совокупность часниц движущейся жидкости называется потоком.

Графически движение жидкости изображается с помощью линий тока, которые проводятся так, что касательная к ним совподает по направлению с вектором скорости жидкости в соответствующих точках пространства.

Определение. Часть жидкости, ограниченномй линеями тока, называют трубкой тока.

Определение. Течеение жидкости называют стационарным, если форма и расположение линий тока, а так же значение скоростей в каждой ее точке, со временем не меняется.

3.26 Уравнение неразрывности

Рассмотрим некоторую трубку тока.

Рассмотрим 2 её сечения. Одно площадью S_1, а другую площадью S_2. Обьем жидкости меняться не должен в трубке. Входят они со скоростью v_1 и выходят со скоростью v_2. Возьмем Δt. Количество жидкости (обьем), которые входят в трубку тока равно:

$v_1 \cdot \Delta t \cdot S_1$— Входяшая жидкость

$v_2 \Delta t \cdot S_2$ — Выходящаая жидкость

$v_1 S_1 = v_2 S_2$ — уравнение неразрывности для станцианарной несжимаемой жидкости, получено приравниванием двух преведущих уравнений. Оно есть и для существует и для сжимаемой жидкости.

3.27 Основной закон динамики для частиц идеальной жидкости

Определение. Жидкость называется идеальной если силами внутреннего трения можно принебречь.

Выбераем маленький кубик внутри жидкости. Начало координат — точка M, движение которой мы будем рассматривать. Снизу есть давление P, сверху тоже давление $P+dP$. М для этого кубика составим уравнение движение. На кубик действует еще сила тяжестви. Будем считать что ρ — плотность жидкости в кубике.

$V = dx \cdot dy \cdot dz$ — Обьем куба

$m = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ — Масса куба

$$
\begin{aligned}
\frac{dv_z}{dt} \cdot m \cdot dx \cdot dy \cdot dz &= P \cdot dx \cdot dy - (P + dP) \cdot dx \cdot dy - \rho \cdot g \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \\
&= \left\{ P \cdot dx \cdot dy - (P + dP) \cdot dx \cdot dy = -\frac{dP \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{dz} \right\} = \\
&= \frac{dv_z}{dt} \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \\
&= -\frac{\partial P}{\partial z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz - \rho g dx dy dz =
\end{aligned}
$$

$\rho \frac{dv_z}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho \cdot g$ — получили во такое

Аналогично для x и y, с учетом того что по этим осям не действует сила тяжести:

$\rho \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial z}$

$\rho \frac{dv_y}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial z}$

Получим векторное соотнгошение:

$\rho \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = -\text{grad}P + \rho \overrightarrow{g}$ — Основной закон гидродинамики для идеальной жидкости, в которой мы не рассматриваем внутреннее трение.

3.28 Станционарный поток

Рассмотрим станционарный поток.

$v(S), \ P(S), \ \rho(S)$

$dS = v \cdot dt$

$dv = \frac{dv}{dS} \cdot dS$

$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dS}{dt} = \frac{dv}{dS} \cdot v = \frac{d}{dS} \left(\frac{v^2}{2} \right)$

$\text{grad}P \rightarrow \frac{dP}{dS}$

$\rho \overrightarrow{g} \rightarrow \rho \cdot g \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha - \frac{dh}{dS}$

$\rho \cdot \overrightarrow{g} \to \rho \cdot g \cdot \cos\alpha = -\rho \cdot g \cdot \dfrac{dh}{dS} = \dfrac{d\left(\rho g h\right)}{dS}$

Подставляем в уравнение движение.

$\dfrac{d}{dS}\left(\dfrac{\rho \cdot v^2}{2}\right) = -\dfrac{dP}{dS} - \dfrac{d\left(\rho \cdot g \cdot h\right)}{dS}$

$\dfrac{d}{dS}\left(\dfrac{\rho \cdot v^2}{2} + P + \rho \cdot g \cdot h\right) = 0$

$\dfrac{\rho \cdot v^2}{2} + P + \rho \cdot g \cdot h = const$ — Уравнение Бернулли

$\dfrac{\rho \cdot v^2}{2}$ — динамическое давление

P — некое внешнее давление

$\rho \cdot g \cdot h$ — гидростатическое двавление

Пример. Рассмотрим пример

$\dfrac{\rho \cdot v_1^2}{2} + P_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 = \dfrac{\rho \cdot v_2^2}{2} + P_2 + \rho \cdot g \cdot h_2$

$P_1 = P_2$

$S_1 >> S_2$

Тогда в силу уравнения неразрывности следует, что $v_1 << v_2$ и тогда величиной $\dfrac{v_1^2}{2}$ можно принебречь.

$\rho \cdot g \cdot h_1 = \rho \cdot g \cdot h_2 + \dfrac{\rho \cdot v_2^2}{2}$

$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot (h_1 - h_2)} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ — формула Торичелли

4 Дополнительно

4.1 Вопросы по механике

1. *(Сложность: 1).* Границы применимости классической механики. Основные разделы и обьекты изучения классической механики. Классические представления о пространстве и времени и их арифметизация.

2. *(Сложность: 1)* Способы задания движения точки. Путь, траэктория, перемещение. Кинематические элементы движения: скорость, ускорение.

3. *(Сложность: 2)* Естественный трехгранник, кривизна и радиус кривизны траэктории. Разложение ускорения по осям естественного трехгранника.

4. *(Сложность: 1)* Часные случаи движения точки: прямолинейное, круговое.

5. *(Сложность: 1)* Кинематика системы и абсолютно твердого тела. Степени свободы. Поступательное движение твердого тела.

6. *(Сложност: 2)* Вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Скорость и ускорение точек вращающегося тела.

7. *(Сложность: 2)* Описание пространственного положение твердого тела. Углы Эйлера. Инвариантность вектора угловой скорости. Мгновенная ось вращения (винтовая ось) твердого тела. Скорость и ускорение точек свободного твердого тела.

8. *(Сложность: 1)* Инерциальные системы отсчета. Первый закон Ньютона. Третий закон Ньютона. Принцип дальнодействия. Принцип относительности Галилея.

9. *(Сложность: 1)* Понятие о силе и массе. Второй закон Ньютона. Еденици измерения и размерности физических величин. Абсолютные системы едениц СИ, СГС.

10. *(Сложность: 1)* Примеры сил: сила тяжести и вес, силы трения, упругие силы. Несвободное движение, силы реакции связей.

11. *(Сложность: 1)* Понятие энергии. Работа и энергия. Работа силы. Мощность. Кинетическая энергия. Полная механическая энергия.

12. *(Сложность: 1)* Потенциальное поле сил. Силы консерватиыные и не консервативные. Примеры консервативны и не консервативных сил.

13. *(Сложность: 2)* Потенциальная энергия. Связь между потенциальной энергией и силой.

14. *(Сложность: 1)* Полная потенциальная энергия системы и классификация свободных механических систем. Первые интегралы уравнения движения и законы сохранения.

15. *(Сложность: 2)* Закон сохранения механической энергии и теорема об изменении кинетической эрнергии системы.

16. *(Сложность: 2)* Импульс материальной точки и силы. Закон сохранения импульса замкнутой системы. Импульс незамкнутой системы.

17. *(Сложность: 2)* Центр масс. Теорема о движении центра масс. Теорема Кенинга.

18. *(Сложность: 2)* Момент импульса материальной точки. Закон сохранения момента импульса. Собственный механический момент системы. Момент силы. Момент импульса незамкнутой системы.

19. *(Сложность: 2)* Одномерное движение. Равновесие системы в поле консервативных сил. Задача двух тел.

20. *(Сложность: 1)* Абсолютно неупругий удар, потери механической энерги, внутрення энергия. Абсолютно упругий удар.

21. *(Сложность: 2)* Теорема площадей. Момент импульса точки в поле центральных сил. Законы Кеплера. Закон всемирного тяготения.

22. *(Сложность: 2)* Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции (поступательные, центробежные, Кориолиса).

23. *(Сложность: 2)* Кинетическая энергия твердого тела. Тензор энерции. Формула Штайнера.

24. *(Сложность: 2)* Импульс и момент импульса твердого тела. Уравнение движения твердого тела.

25. *(Сложность: 1)* Напряжение и деформация при растяжении и сдвиге. Понятие о тензорах напряжений и деформаций.

26. *(Сложность: 1)* Основные понятие механической жидкости и газа: идеальная жидкость, несжимаемая жидкость, давление. Законы Паскаля и Архимеда. Уравнение неразрывности.

27. *(Сложность: 1)* Основной закон динамики для частиц идеальной жидкости.

28. *(Сложность: 2)* Стационарные течения. Уравнения Бернулли. Формула Торричелли.

Часть II
Термодинамика и молекулярная физика.

Введение

Определение. Термодинамика и молекулярная физика — разделы физики в которых изучаются макроскопические процессы в телах, связанные с огромным числом содержащихся в телах атомов и молекул.

Молекулярная физика основана на статистическом методе. Изучает: строение и свойства вещества исходя из молекулярно-кинетических представлений, основанных на том, что тела состоят из молекул, которые находятся в непрерывном, хаотическом движении.

Определение. Молекула — мельчайшая частица вещества, сохраняющая все его основные химические свойства.

Определение. Термодинамика — раздел физики изучающий общие свойства микроскопических тел, находящихся в состоянии термодинамического равновесия и процессы перехода между ними.

Термодинамика имеет дело с термодинамической системой. Главным в термодинамике является определение ее состояния. Состояние задается термодинамическими параметрами — совокупностью физических величин, характеризующих свойство термодинамической системы.
Параметры: давление (P), объем (V), температура (T). В некоторых случаях используют плотность (ρ) вместо объема.

Определение. Равновесное состояние — состояние при котором все параметры системы имеют определенные значения, остающиеся при неизменных внешних условиях постоянными сколь угодно долго.

Любой процесс перехода из одного состояния в другое, связан с нарушением равновесия системы.

Температура

Если 2 тела при соприкосновении не обмениваются энергией путем теплопередачи (находятся в состоянии термодинамического равновесия), то этим телам присваивается одинаковая температура. Если же обмен происходит, то тело, которое отдает энергию имеет температуру большую, чем то, которое принимает.
2 шкалы измерения:

- Цельсия — международная практическая шкала.

  0С — температура замерзания чистой воды.

  100С — температура кипения чистой воды.

- Кельвина

  1С = 1К

  Реферная точка — точка в которой пар, жидкость и тело воды находятся в равновесии (это происходит при очень низком давлении).

$$tC = T$$
$$T = tC + 273.15$$

5 Молекулярно кинетическая теория

Основывается на 3-х базовых положениях:

- Всякое тело в природе находящееся в твердом, жидком или газообразном состоянии состоит из огромного числа молекул, находящихся на некотором расстоянии друг от друга.
- Молекулы всех тел находятся в постоянном, непрерывном и беспорядочном движении (тепловое движение).

- Молекулы разных веществ по разному взаимодействуют между собой. Взаимодействие существенно зависит от типа молекул и расстояния между ними.

Любая молекула обладает кинетической энергией ($\varepsilon_{\text{кин}}$) и потенциальной ($u_{\text{пот}}$).

Молекулярный (атомный) вес вещества $[M]$ — отношение массы молекулы этого вещества к $\frac{1}{12}$ массы молекулы углерода C^{12}.

Определение. Кило-моль (в граммах — моль) — количество данного вещества, масса которого выраженная в килограммах численно равна молекулярному весу.

Определение. Молярная масса — масса 1 моль.

5.1 Закон Авогадро

Утверждение. Кмоли всех веществ содержат одно и то же число молекул.

Определение. Число Авогадро: $N_A = 6,023 \cdot 10^{26} \frac{1}{\text{Кмоль}}$.

В равных объемах газов при равных температурах и давлениях содержится равное число молекул. В частности Кмоль любого газа при нормальном давлении ($1.01 \cdot 10^5$Па) и нормальной температуре ($273.15K$) занимает объем $22,4\text{м}^3$.

Определение. Идеальный газ

- Собственный объем молекул газа много меньше объема занимаемого сосуда.
- Между молекулами газа отсутствуют силы взаимодействия. $u_{\text{вз}} = 0$.
- Столкновения молекул газа между собой и со стенками сосуда абсолютно упругие.

Функция состояния: $F\left(P,\, V,\, T\right) = 0$

5.2 Опытные газовые законы

5.2.1 Закон Бойля–Мариота

Для данной массы газа при постоянной температуре произведение давления газа на его объем — величина постоянная.

$$P \cdot V = const$$

5.2.2 Законы Гей–Люссака

5.2.2.1 Первый закон Объем данной массы газа при постоянном давлении изменяется линейно с температурой.

$$V = V_0(1 + \alpha t)$$

5.2.2.2 Второй закон Давление данной массы газа при постоянном объеме меняется линейно с температурой:

$$P = P_0\left(1 + \alpha t\right)$$

где $\alpha = \dfrac{1}{273.15} = \dfrac{1}{T_0}$

Определение. Процесс протекающий при постоянном объеме называется изохорическим, соответствующий график — изохорой.

Определение. Процесс протекающий при постоянном давлении называется изобарическим, соответствующий график — изобарой.

Законы Бойля–Мариота и Гей–Люссака можно объединить, что сначала сделал Клайперон, а затем улучшил Менделеев.

5.2.3 Закон Менделеева – Клайперона (Закон состояния идеального газа)

Часто для изображение процессов термодинамики применяют PV–диаграмму.

$P_1V_1 = P'V_2$

Согласно закону Гей–Люссака, получим $\dfrac{P'}{T_1} = \dfrac{P_2}{T_2}$.

$\dfrac{P_1V_1}{T_1V_2} = \dfrac{P_2}{T_2}$

$\dfrac{P_1V_1}{T_1} = \dfrac{P_2V_2}{T_2}$

Получим закон Клайперона: $\dfrac{PV}{T} = B — B = const$

Закон справедлив для любого идеального газа, но для каждого газа константа своя.

V_m — молярный объем — объем одного моля. Так как количество молекул не меняется в одном моле, поэтому V_m должно быть одинаково для каждого газа.

Менделеев улучшил закон Клайперона, и получил $\dfrac{PV_m}{T} = R$ или $PV_m = RT$.

- ν — количество вещества
- $V_m = \dfrac{V}{\nu}$
- $\nu = \dfrac{m}{\mu}$, μ — молярная масса

Когда мы все это подставим, то получим:

$$\boxed{\mathrm{PV}=\frac{m}{\mu}\mathrm{RT}}$$

Где $R = const$

Так как у нас все газы занимают одно количество объема под один моль, то константа R одинаковая для всех газов. Мы можем ее вычислить:

$$P_0V_{m0} = RT_0$$

Откуда получим универсальную газовую постоянную:

$$R = \frac{P_0V_{m0}}{T_0} = \frac{1.01 \cdot 10^5 \cdot 22.4}{275.15} = 8.31 \cdot 10^3$$

$$[R] = \frac{\dfrac{\text{Ньютон}}{\text{метр}^2} \cdot \dfrac{\text{метр}^3}{\text{Кмоль}}}{\text{Кельвин}} = \frac{\text{Джоуль}}{\text{Кмоль} \cdot \text{Кельвин}}$$

5.3 Основное уравнение молекулярно–кинетической теории газа

Давление в сосуде — удары молекул о стенки сосуда. Ударения в идеальном газе — абсолютно упругие: энергия молекулы не меняется, а меняется импульс и скорость. Средняя (кинетическая) энергия в сосуде постоянна:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2}m_iv_i^2$$

Будем рассматривать через средние величины, сложим и разделим на число молекул. N — общее число молекул газа.

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{1}{2}\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_iv_i^2}{N}$$

В таких скобках будем обозначать среднее значение

$$= \frac{m}{2N}\sum_{i=1}^{N} v_i^2$$

- $\left\langle v^2 \right\rangle = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N} v_i^2}{N}$ — средний квадрат скорости

- $\sqrt{\langle v^2 \rangle} = v_{\text{ср кв}}$ — средне–квадратичная скорость

- $\langle v \rangle = \dfrac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{N} |v_i|$ — средняя скорость

Если сосуд не двигается, то $\langle \overrightarrow{v} \rangle = \overrightarrow{0}$. Заметим, что $\left\langle v^2 \right\rangle \geq \langle v \rangle^2$ при $T = 0\,K$.

Переходим к основному уравнению молекулярно–кинетической теории. Будем считать что молекулы двигаются только параллельно осям координат. Будем рассматривать изотропное пространство.

Значит $\dfrac{1}{3}N$ — количество молекул, двигающихся параллельно одной из осей, откуда $\dfrac{1}{6}N$ — двигаются в одну сторону параллельно одной оси.

- v — скорость молекулы

- mv — импульс

- $\Delta J' = (-mv) - mv = -2mv$ — импульс при столкновении молекулы

Импульс стенки возрастает на $2mv$.

- Δt — промежуток времени

- ΔS — площадь стенки

Молекулы, которые могут удариться о стенку находятся в объеме $v \cdot \Delta t \cdot \Delta S$.

Внесем еще одну величину, n — концентрация молекул, $n = \dfrac{N}{V}$ — число молекул в единице объема

- ΔN — число молекул, которые могут удариться о стенку

$$\Delta N = \frac{1}{6} v \cdot \Delta t \cdot \Delta S \cdot n$$

За время Δt стенка получает импульс $\Delta J = \dfrac{1}{6} \cdot v \cdot \Delta t \cdot \Delta S \cdot n \cdot 2 \cdot m \cdot v$

Вспомним механику: $\dfrac{dJ}{dt} = F$ — переходим к силе через дифференцирование

- $\dfrac{\Delta J}{\Delta t} = F$ — средняя сила, действующая на стенку ха время Δt

- $\Delta J = F \Delta t$ — средний импульс стенки

$$F = \frac{1}{3} \cdot v^2 \cdot n \cdot m \cdot \Delta S$$

От силы перейдем к давлению:

$$P = \frac{F}{\Delta S} = \frac{1}{3} \cdot v^2 \cdot m \cdot n = \frac{2}{3} \frac{\left\langle v^2 \right\rangle m}{2} n$$

- $\dfrac{\left\langle v^2 \right\rangle m}{2}$ — средняя энергия одной молекулы

Определение. Основное уравнение молекулярно–кинетической теории. (Только для одноатомного газа, или у газа, где отсутствует вращение)

$$\boxed{\mathrm{P} = \frac{2}{3} \mathrm{n} \langle \varepsilon \rangle}$$

Точный статистический вывод дает тот же самый результат.

Сделаем несколько преобразований:

$$PV = \frac{2}{3}nV\langle\varepsilon\rangle = \frac{2}{3}N\langle\epsilon\rangle = \frac{2}{3}E$$

E — полная энергия идеального газа

$PV = \dfrac{2}{3}E$ — на уровне общего состояния газа целиком

$\dfrac{m}{\mu}RN = \dfrac{2}{3}E$

$\nu RT = \dfrac{2}{3}E$ — по этой формуле измеряют температуру космоса

Для одного кило–моля мы получим такую формулу:

$$PV_m = \frac{2}{3}N_A\langle\varepsilon\rangle$$
$$TR = \frac{2}{3}N_A\langle\varepsilon\rangle$$

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{3}{2}kT$$

$k = \dfrac{R}{N_A} = 1.38\cdot10^{-23}\,\dfrac{\text{Дж}}{K}$ — постоянная Больцмана

Коэффициент $\frac{3}{2}$ характерен только для одноатомных молекул или для тех молекул, у которых отсутствует вращательное движение.

Подставим в основное уравнение:

$$P = n\cdot k\cdot T$$

Эта формула помогает перейти от газа к смеси газов.

n_i — концентрация i-ой компоненты газа

Пусть смесь состоит из смеси газов, s газов смешали, тогда: $n = \sum\limits_{i=1}^{s} n_i$

$$P = kT\sum_{i=1}^{s} n_i = \sum_{i=1}^{s} kTn_i$$

Средняя энергия для любого газа не зависит от типа молекул.

$P_i = n_ikT$ — парциальное давление — давление i-ой компоненты газа, при условии, что остальные компоненты отсутствуют. В результате получим закон Дальтона:

$$\boxed{\mathrm{P} = \sum_{i=1}^{s} P_i}$$

5.4 Распределение молекул газа по скоростям

$\dfrac{m\langle v^2\rangle}{2} = \dfrac{3}{2}kT$

$$v_{\text{ср кв}} = \sqrt{\langle v^2\rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Так как $k = \frac{R}{N_A}\quad N_A\cdot m = \mu$

$$= \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

Возьмем шкалу скоростей v

$\Delta N\left(v_i\right)$

$\left(v_i; v_i+\Delta v\right)$ — число молекул в диапазоне

$\rho\left(v_i\right)=\dfrac{\Delta N\left(v_i\right)}{\Delta v}$ — плотность распределение молекул по скорости

$f\left(v_i\right)=\dfrac{\Delta N\left(v_i\right)}{N\cdot\Delta v}$ — относительное распределение молекул газа по скорости — функция распределения. Откуда получим:

$$f\left(v\right)=\frac{1}{N}\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\Delta N\left(v\right)}{\Delta v}$$

$$\sum\Delta N(v)=\sum Nf(v)\Delta v=N\sum f(v)\Delta v=$$

Устремляя $\Delta v\to 0$:

$$=N\int\limits_0^\infty f(v)dv=1$$

При разных v:

- $v\to 0$:

$$f(v)\sim v^2$$

- $v\to\infty$

$$f(v)\sim e^{-\dfrac{mv^2}{2kt}}$$

- $v\in(0;\infty)$

$$f(v)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}v^2exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

Наиболее вероятная скорость:

$$v_{\text{вер}}=\sqrt{\frac{2kT}{m}}=\sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$$

Причем выполняется соотношение:

$$v_{\text{вер}}\leq\langle v\rangle\leq v_{\text{ср.кв.}}$$

Найдем $\langle v\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle v\rangle &= \frac{1}{N}\sum_i\Delta N(v_i)\cdot v_i\\ &= \sum_i f(v_i)\Delta v\cdot v_i\\ &= \int\limits_0^\infty f\left(v\right)\cdot vdv\\ &= \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\end{aligned}$$

Раз установившееся максвелловское распределение скоростей молекул в дальнейшем сохраняется, более того: в результате взаимодействия между молекулами, каким бы ни было исходное распределение скоростей молекул, в конце концов устанавливается максвелловское распределение.

5.5 Опыт Штерна

Были взяты два коаксиальных цилиндра. Внутри протянута вольфрамовая нить, на которую нанесено серебро. Подается напряжение на нить. Вольфрам метал тугоплавкий, в отличие от серебра, которое начинает испаряться. Цилиндры могут вращаться. Когда они не вращаются, то серебро осядет напротив прорези.

Пусть расстояние между цилиндрами равно l. начнем вращать циллиндры с угловой скоростью ω.

....

5.6 Барометрическая формула распределения Больцмана.

Сделаем следующие допущения:

1. Будем считать, что g не зависит от высоты.
2. Будем считать воздух идеальным газом (что в общем так и есть). При этом будем считать, что воздух состоит из одинаковых волекул, массой m и $\mu \approx 29 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$.
3. Будем считать, что температура с высотой не меняется: $t = const$.

Найдем силу тяжести, действующую на цилиндр воздуха:

$$F_{\text{т}} = m_0 g \cdot nS\Delta h$$

Т.к. $\sum \overrightarrow{F} = 0$, получим:

$$\begin{aligned} -m_0 g \cdot nS\Delta h + pS - (p + \Delta p)S = 0 \\ -m_0 g \cdot n\Delta h - \Delta p = 0 \end{aligned}$$

....

$$P = P_0 \cdot exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) = P_0 \cdot exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right)$$

Больцман предположил, что в любом потенциальном поле сил, это соотношение верно. Обозначим:

$$U\left(h\right) = mgh; \qquad p = nkT; \qquad P_0 = n_0 kT.$$

Тогда справедлива *формула Больцмана:*

$$\boxed{\text{n}{=}n_0{\cdot}\text{exp}\left(-\frac{U\left(h\right)}{kT}\right)}$$

5.7 Число столкновений и длина свободного пробега молекулы в газе.

Определение. Эффективный диаметр молекулы (d) — минимальное расстояние на которое сближаются центры молекул газа при столкновении.

Определение. Эффективным сечением молекулы называется величина равная

$$\sigma = \pi d^2$$

Определение. Длина свободного пробега (l_i) — расстояние меду двумя последовательными столкновениями молекулы.

Определение. Средняя длина свободного пробега молекулы:

$$\langle l \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} l_i$$

Найдем среднюю длину свободного пробега.

Возьмем два вектора скорости: $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$. Тогда: $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_{\text{отн}}}$. Выразим $\overrightarrow{v_{\text{отн}}} = \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}$. Используя теорему косинусов:

$$v_{\text{отн}}^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\Theta$$
$$\left\langle v_{\text{отн}}^2\right\rangle = \left\langle v_1^2\right\rangle + \left\langle v_2^2\right\rangle - 2\left\langle v_1v_2\cos\Theta\right\rangle = 2\left\langle v^2\right\rangle$$

Тогда:

$$v_{\text{ср.кв.отн}} = \sqrt{2}v_{\text{ср.кв}}$$

Будем считать количество столкновений за $t = 1$с. Тогда высота цилиндра:

$$h = v_{\text{ср.кв.отн.}} \cdot 1\text{с}$$

А объем цилиндра

$$V = \sigma \cdot h = \pi d^2 v_{cp.kv.otn}$$

Число столкновений:

$$K = n \cdot V = n\pi d^2 v_{cp.kv.otn}$$

Общая длинна расстояния, которая проходит молекула за одну секунду:

$$L = v_{cp.kv} \cdot 1sec$$

Средняя длина пробега молекулы:

$$\langle l\rangle = \frac{L}{K} = \frac{v_{\text{ср.кв.}}}{\pi n d^2 v_{\text{ср.кв.отн.}}} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi n d^2} = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma} = \frac{kt}{\sqrt{2}p\sigma} \tag{10}$$

Посчитаем эту величину:

- Нормальные условия
- $d \sim 10^{-10}$м
- Один моль газа.

Тогда:

$$n = \frac{N_A}{V_m} = \frac{6,02\cdot 10^{26}\frac{1}{\text{к моль}}}{22,4\frac{\text{м}^3}{\text{к моль}}} = 2,7\cdot 10^{25}\frac{1}{\text{м}^3}$$

Эта величина называется числом Лошмидта.

Тогда подставив его в (10):

$$\langle l\rangle \approx 2\cdot 10^{-7}\text{м}$$

....

$T = const$ значит: $\langle l\rangle\, P = const$.

Теперь зафиксируем давление: $P = const$, значит: $\langle l\rangle \sim T$, но не все так просто:

$$\langle l\rangle = \langle l_\infty\rangle \cdot \frac{T}{T+C}$$

где C — константа для данного газа.

$\langle l_\infty\rangle$— средняя длина пробега при $T \to \infty$.

5.8 Вакуум

L — размер сосуда.

Определение. Вакуум — состояние газа, при котором средняя длина свободного пробега соизмерима или больше характерного линейного размера сосуда.

Различают 3 случая:

1. $\langle l\rangle \le L$ — низкий вакуум
2. $\langle l\rangle > L$ — высокий вакуум
3. $\langle l\rangle \gg L$ — сверхвысокий вакуум

Газ в состоянии сверхвысокого вакуума называется ультра–разряженным.

Определение. Физический вакуум — когда вообще нету молекул.

5.9 Явления переноса в термодинамически неравновесных системах.

- Явление теплопроводности (перенос энергии).
- Явление диффузии (перенос массы).
- Явление вязкого трения (перенос импульса).

5.9.1 Явление вязкого трения.

u — скорость направленного движения. S — площадь соприкосновения слоев, η — коэффициент вязкости, $\frac{du}{dz}$ — ускорение вдоль оси z.

$$f = \eta \frac{du}{dz} \cdot S$$

....

$\Delta \overrightarrow{J_{\prime}^{\prime}} = N \cdot m \cdot \overrightarrow{U_1}$ — которые вышли из первого стоя

$\Delta \overrightarrow{J_{\prime}^{\prime\prime}} = N \cdot m \cdot \overrightarrow{U_2}$ — которые пришли.

Попасть в нижний слой могут те молекулы, которые расположены на расстоянии Δt.

$$N = \frac{1}{6} \langle v \rangle \Delta t \cdot S \cdot n$$

Таким образом мы можем посчитать, как изменился импульс первого слоя за Δt:

$$\begin{aligned} \Delta \overrightarrow{J_1} &= \Delta \overrightarrow{J_{\prime}^{\prime\prime}} - \Delta \overrightarrow{J_{\prime}^{\prime}} = \\ &= \frac{1}{6} \langle v \rangle \cdot m \cdot n \left(U_2 - U_1\right) \Delta t \cdot S \end{aligned}$$

Делим на Δt, получаем силу, и устремляем к нулю:

$$f_1 = \frac{1}{6} \langle v \rangle \cdot m \cdot n \left(U_2 - U_1\right) S$$

$U_1 = U\left(z + \langle l \rangle\right)$

$U_2 = U\left(z - \langle l \rangle\right)$

Раз длинна свободного пробега маленькая, то мы можем применить формулу Тейлора (из мат анализа):

$$U_1 = U\left(z + \langle l \rangle\right) = u\left(z\right) + \frac{du\left(z\right)}{dz} \langle l \rangle + \frac{d^2 u\left(z\right)}{dz} \frac{\langle l \rangle^2}{2!} + \ldots =$$

Так как $\langle l \rangle$очень мало, то ограничимся всего лишь 2-мя слагаемыми:

$$= u\left(z\right) - \frac{du}{dz} \langle l \rangle$$

Откуда: $f_1 = -\frac{1}{6} mn \langle v \rangle 2 \frac{du}{dz} \langle l \rangle S$

Учитывая что это f — сила взаимодействия между слоями на площадке S, то ее знак можно опустить:

$$f = \frac{1}{3} mn \langle v \rangle \langle l \rangle \frac{du}{dz} S$$

Сравним с полученной экспериментально: $f = \nu \frac{du}{dz} S$, $\nu = mn \langle v \rangle \langle l \rangle$

$$\nu = \frac{1}{3} mn \sqrt{\frac{8kT}{3m}} \frac{1}{\sqrt{2} \sigma n} \sim \frac{\sqrt{T}\sqrt{m}}{\sigma}$$

Коэффициент вязкости не зависит от концентрации молекул, и таким образом и от давления.

5.10 Теплопроводность газов

Определение. Теплопроводность — это перенос энергии.

Опытным путем было установлено, то что за единицу времени через площадку проходит $q = -\dfrac{dT}{dz}S$ количество тепла. Тогда: $Q = q \cdot t$ — тепло, прошедшее через площадку за время t.

λ — коэффициент теплопроводности. $[\lambda] = \dfrac{\text{Дж}}{\text{К} \times \text{М} \times \text{с}}$.

Попробуем объяснить эту формулу основываясь на молекулярно–кинетической теории.

$\langle \varepsilon_1 \rangle = \dfrac{3}{2} \cdot k \cdot T_1$ — энергия 1-го слоя

$\langle \varepsilon_2 \rangle = \dfrac{3}{2} \cdot k \cdot T_2$ — энергия 2-го слоя

$$\Delta N = \frac{1}{6} \cdot \langle v \rangle \cdot \Delta t \cdot S \cdot n$$

Количество молекул перешедших из 1-го слоя во 2-й и обратно одинаково. Посчитаем энергию:

$$\begin{aligned}\Delta E &= -\Delta N \langle \varepsilon_1 \rangle + \Delta N \langle \varepsilon_2 \rangle \\ &= \frac{1}{6} \langle v \rangle n \left(\langle \varepsilon_2 \rangle - \langle \varepsilon_1 \rangle \right) \Delta t S\end{aligned}$$

Тогда количество тепла:

$$\begin{aligned}q = \frac{\Delta E}{\Delta t} &= \frac{1}{6} \langle v \rangle n \left(\langle \varepsilon_2 \rangle - \langle \varepsilon_1 \rangle \right) S \\ &= \frac{1}{6} \langle v \rangle n \frac{3}{2} k \left(T_2 - T_1 \right) S\end{aligned}$$

$T(z)$

....

Выразим T_1 и T_2:

$T_1 = T(z + \langle l \rangle) \approx T(z) + \dfrac{dT}{dz} \cdot \langle l \rangle$

$T_2 = T(z - \langle l \rangle) \approx T(z) - \dfrac{dT}{dz} \cdot \langle l \rangle$

Подставим:

$$q = -\frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle n \frac{3}{2} k \frac{dT}{dz} S$$

Сопоставляем с полученной экспериментально и убеждаемся что все правильно.

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1}{3} n \langle v \rangle \langle l \rangle \frac{3}{2} k = \\ &= \frac{1}{3} n \langle v \rangle \langle l \rangle \frac{3}{2} k \frac{mN_A}{mN_A} = \\ &= \left\{ \begin{array}{c} kN_A = R \\ n \cdot m = \rho \\ mN_A = \mu \end{array} \right\} = \frac{1}{3} \rho \frac{3R}{2\mu} \langle v \rangle \langle l \rangle\end{aligned}$$

$c_v = \dfrac{3}{2} \dfrac{R}{\mu}$ — удельная теплоемкость. $\dfrac{3}{2}$ — зависит от количества атомов в молекул (это для одноатомных).

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1}{3} mn \langle v \rangle \langle l \rangle c_v \\ &= c_v \nu \\ &= \frac{1}{3} n \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \frac{1}{\sqrt{2} \sigma n} \frac{3}{2} k \sim \frac{\sqrt{T}}{\sigma \sqrt{m}}\end{aligned}$$

5.11 Диффузия газов

Будем считать что давление и концентрация молекул по объему одна и та же. Пусть смесь состоит только из 2х газов.

$n_1' + n_1'' = n_2' + n_2'' = n$ Это явление диффузии.

$K' = -D\dfrac{dn'}{dz}S$ — формула была получена экспериментально.

- K — количество молекул, проходящие через площадку S в единицу времени.
- D — коэффициент диффузии.

Попробуем эту формулу получить основываясь на молекулярно кинетической теории.

$\Delta N = \dfrac{1}{6}\left\langle v\right\rangle \Delta t n S$

$\Delta N' = -\Delta N_1' + \Delta N_2' = \dfrac{1}{6}\left\langle v\right\rangle (n_2 - n_1)\,\Delta t S$

Накую величину изменилось количество молекул где то там...

$$K = \frac{\Delta N'}{\Delta t} = \frac{1}{6}\left\langle v\right\rangle (n_2' - n_1')\,S$$

По Тейлору: $n'(z)$

$n_1' = n'(z + \left\langle l\right\rangle) \approx n'(z) + \dfrac{dn'}{dz}\left\langle l\right\rangle$

$n_1' = n'(z - \left\langle l\right\rangle) \approx n'(z) - \dfrac{dn}{dz}\left\langle l\right\rangle$

Так как $\left\langle l\right\rangle$ маленькое, пренебрегаем степенями большими

$$K' = -\frac{1}{3}\left\langle v\right\rangle \left\langle l\right\rangle \frac{dn'}{dz}S$$

$$D = \frac{1}{3}\left\langle v\right\rangle \left\langle l\right\rangle$$

$$\nu = \rho \cdot D$$

$$D = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}\frac{1}{\sigma n\sqrt{2}} \sim \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{m}n\sigma}$$

$$K'' = -D\frac{dn''}{dz}S$$

$$M' = -D\frac{d\rho'}{dz}S$$

$$q = -\lambda \cdot grad\,T \cdot S = -\lambda \cdot \iint\limits_S (grad\,T,\, \overrightarrow{n})\,dS$$

6 Первое начало термодинамики

$$U_{\text{вн}} = E_{\text{кин}} + E_{\text{вд}}$$

$$U = E_{\text{кин}} \text{ — в газах}$$
$$U = E_{\text{кин}} = N\frac{3}{2}kT = \nu\frac{3}{2}RT$$

Рассмотрим, если газ получает некоторую энергию извне, в виде температуры.

Q

U

A

Условимся, что если газ получает тепло, то $Q > 0$, если отдает, то $Q < 0$.

Точно также условимся с работой. Если газ совершает работу над внешними телами, то это робота положительная, а если совершается над газом, то эта робота отрицательная.

$\Delta U = Q$ — изменение внутренней энергии

Если газ в это время будет совершать работу, то его энергия будет уменьшаться.

$\Delta U = Q - A$

Тепло, поступающее в газ идет на изменение его внутренней энергии и на совершение газом работы над внешними телами.

6.1 Теплоемкость газа. (Одноатомного и многоатомного газа)

Определение. Теплоемкостью какого либо тела, называется величина, равная количеству тепла, которое необходимо сообщить телу, чтобы поднять его температуру на 1 градус.

Если мы поднимаем температуру какого то тела на ΔT, а температура тела повышается на ΔQ, то теплоемкостью можно называть $C_T = \dfrac{\Delta Q}{\Delta T} = \left[\dfrac{\text{Джоуль}}{\text{Кельвин}}\right]$.

Определение. Теплоемкость единицы массы вещества называется удельной теплоемкостью. Обозначается: c. В системе СИ:

$$[c] = \frac{\text{Джоуль}}{\text{Кельвин} \times \text{Килограмм}}$$

Определение. Теплоемкость одного киломоля вещества называется молярной теплоемкостью. Обозначается C.

$$[C] = \frac{\text{Джоуль}}{\text{Кельвин} \times \text{Киломоль}}$$

Причем

$$c = \frac{C}{\mu}$$

Рассмотрим такую ситуацию: будем нагревать газ в замкнутом объеме ($V = const$). Газ не расширяется и не совершает работу ($A = 0$), и тогда вся энергия пойдет на увеличение температуры. $Q = \Delta U$. Мы уже знаем что $U = \dfrac{3}{2} \cdot R \cdot T$ для одного моля.

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T$$

Согласно этому примеру, если мы берем $\nu = 1\,\text{КМоль}$, то

$$C_V = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T}$$

Теперь, если мы возьмем ситуацию, что объем изменяется (Нагрев при постоянном давлении) ($P = const$). $Q = \Delta U + A$ То выполняется равенство:

$$C_P = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} + \frac{A}{\Delta T} = C_V + \frac{A}{\Delta T} > C_V$$

Вывод. *При разных условиях теплоемкость газов разная.*

При движении поршня на Δh, работа равна:

$$A = F\Delta h = P \cdot S \cdot \Delta h = P\Delta V$$

$C_P = C_V + \dfrac{P\Delta V}{\Delta T}$
Пусть было: $PV_1 = RT_1$. Потом мы нагрели получилось: $PV_2 = RT_2$
В итоге получим: $P\Delta V = R\Delta T$
Подставим: $C_P = C_V + \dfrac{P\Delta V}{\Delta T} = C_V + \dfrac{R\Delta T}{\Delta T} = C_V + R$ получим формулу Майера.

$$\boxed{C_P = C_V + \text{R}}$$

Универсальная газовая постоянная R численно равна работе расширения одного киломоля идеального газа при его нагревании на один градус в условиях постоянного давления.

Берем $\nu = 1\,$КМоль, $\Delta U = \dfrac{3}{2}R\Delta T$, то тогда $C_V = \dfrac{3}{2}R$

Если мы берем $C_V = \dfrac{Q}{\Delta T}$ и если C_V зависит от температуры, то тогда устремляем $\Delta T \to \infty$. И придем к формуле

$$C_V = \frac{du}{dT}$$

При некоторых условиях коэффициент $\dfrac{3}{2}$ будет меняться, даже для одного и того же газа.

$C_V = \dfrac{3}{2}R$ — такой теплоемкостью обладают газы He, Ne, $Ar, \ldots$. (Восьмой столбец таблицы Менделеева) У них все электроны заполнены. Их называют благородными газами.

$He,\ Ne,\ Ar, \ldots$	$C_V = \dfrac{3}{2}R = 12,5 \cdot 10^3 \dfrac{\text{Джоуль}}{\text{КМоль} \times \text{Кельвин}}$
$N_2,\ O_2$	$C_V = \dfrac{5}{2}R = 20,8 \cdot 10^3 \dfrac{\text{Джоуль}}{\text{КМоль} \times \text{Кельвин}}$
$NH_3,\ CH_4$	$C_V = \dfrac{6}{2}R = 25,0 \cdot 10^3 \dfrac{\text{Джоуль}}{\text{КМоль} \times \text{Кельвин}}$

Таблица 1: Теплоемкости некоторых газов

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2}kT = \frac{m\left\langle v^2 \right\rangle}{2}$$

Так как: $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$

$$= \frac{m\left\langle v_x^2 \right\rangle}{2} + \frac{m\left\langle v_y^2 \right\rangle}{2} + \frac{m\left\langle v_z^2 \right\rangle}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}kT + \frac{1}{2}kT + \frac{1}{2}kT$$

Для одноатомного газа (He, Ne): $\langle \varepsilon \rangle = \dfrac{3}{2}kT$.

Больцман предположил, что на любую степень свободы приходится $\dfrac{1}{2}kT$.

$T_{\text{вр}} = \dfrac{I \cdot \omega^2}{2}$
$\langle \varepsilon_{\text{вр}} \rangle = \dfrac{I \cdot \left\langle \omega^2 \right\rangle}{2}$
Будем рассматривать молекулу многоатомного газа. При хаотическом движении любое поступательное движение может перейти во вращательное и наоборот.

N_2, O_2 — 5 степеней свободы. Тогда $\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle + \langle \varepsilon_{\text{вр}} \rangle = 3\left(\dfrac{1}{2}kT\right) + 2\left(\dfrac{1}{2}kT\right) = \dfrac{5}{2}kT$

Теперь если перейдем во внутреннюю энергию газов, то $U = \frac{5}{2}RT$,

$$C_V = \frac{5}{2}R \approx 20,8 \cdot 10^3 \frac{\text{Джоуль}}{\text{КМоль} \times \text{Кельвин}}$$

NH_3, CH_4, H_2O — 6 степеней свободы. Для них:

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle + \langle \varepsilon_{\text{вр}} \rangle = 3\left(\frac{1}{2}kT\right) + 3\left(\frac{1}{2}kT\right) = \frac{6}{2}kT = 3kT$$

Если посчитать, то всё сходится. Но есть некоторые исключения. Дело в том, что некоторые газы, например CO_2, имеют линейную структуру, и у него 5 степеней свободы.

Почему это так? Все таки молекула, это не твердое тело. При очень низких температурах у них нету вращательного движения, и говорят, что молекула вымерзает. То есть если

$$\widetilde{\varepsilon_{\text{вр}}} > \frac{1}{2}kT + \frac{1}{2}kT$$

Примерно при $T = 100\,K$ и меньше вымерзают вращательные степени свободы.

С ростом температуры у отдельных молекул начинает проявляться колебательная степень свободы, связанная с движением атомов в молекуле. В этом движении участвуют два вида энергии: энергия движения атомов и потенциальная энергия связи в атомах.

$$\langle \varepsilon_{\text{кол}} \rangle = \langle \varepsilon_{AT} \rangle + \langle U_{AT} \rangle = \frac{1}{2}kT + \frac{1}{2}kT = kT$$

$kT > \tilde{\varepsilon}_{\text{кол}}$. На нее приходится $\frac{2}{2}kT$. По отдельности на каждый вид энергии.

На 2500K молекулы распадаются, и вся энергия идет на распад молекул на атомы.

$\tilde{\varepsilon}_{\text{св}} \approx kT$ — 2500 K

$\varepsilon_{\text{эл}} \approx kT$ — примерно 3000 K

После 3000 электроны покидают молекулы газа, и он превращается в плазму.

6.2 Процессы и циклы с газами

$$PV = \nu RT$$

Если я знаю значения P и V, то можно найти T:

$$T = \frac{1}{\nu R}PV$$

Рассмотрим PV диаграмму.

Какие же энергетические преобразования происходят еще.

При постоянном давлении $A = p \cdot \Delta V$

$$A = \int\limits_{v_1}^{v_2} P\left(V\right) \cdot dV$$

1. Изохарический процесс.
   $V = const \Rightarrow A = 0$
   $Q = \Delta U$
   $C_V = \frac{i}{2}R$, где i— число степеней свободы молекул.
   $V = 0$
2. Изобарический процесс
   $P = const \Rightarrow A = P \cdot \Delta V$
   $Q = \Delta U + A$
   $C_P = \frac{i+2}{2}R$
   $V = P\left(V_2 - V_1\right)$

3. Изотермический процесс
   $T = const$
   $PV = const$
   $P_1V_1 = P_2V_2$
   $\Delta U = 0$
   $Q = A$
   $\delta A = P\left(V\right)dV$
   $A_{12} = \int\limits_{V_1}^{V_2} P\left(V\right)dV$
   $PV = \nu RT$
   $P\left(V\right) = \dfrac{\nu RT}{V}$
   $\int\limits_{V_1}^{V_2} \dfrac{\nu RT}{V}dV = \nu RT\int\limits_{V_1}^{V_2} \dfrac{dV}{V} = \nu RT\ln\dfrac{V_2}{V_1}$
   $A = \nu RT\ln\dfrac{V_2}{V_1}$
   $C_T = \dfrac{Q}{\Delta T} = \infty$
4. Адиоботический процесс
   Процесс, протекающий без теплообмена с внешней средой. Система должна быть теплоизолирована.
   $Q = 0$
   $0 = A + \Delta U$
   $\Delta U = -A$
   $C_Q = 0$
   $\delta A = PdV$; $dU = -\delta A$; $\nu = 1$ КМоль
   $U = \dfrac{3}{2}RT\nu$; $U = \dfrac{i}{2}RT\nu$; $C_V = \dfrac{i}{2}R$
   $dU = C_VdT$
   $DdV + C_VdT = 0$
   $PV = RT$
   $\begin{cases} PdV + C_VdT = 0 \\ PdV + VdP - RdT = 0 \end{cases}$
   Первое домножим на R, второе на C_V и складываем:
   $RPdV + C_VPdV + C_VVdP = 0$
   $\left(R + C_V\right)PdV + C_VVdP = 0$
   Тогда по формуле Майера:

   $$\gamma PdV + VdP = 0$$

   Решая это уравнение получим:

   $$\begin{aligned} P &= B\cdot V^{-\gamma};\quad B = const \\ P\cdot V^{\gamma} &= const \end{aligned} \tag{11}$$

   Уравнение (11) называют уравнением Адиабата, где:

   $$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{R + C_V}{C_V} = \frac{R + \frac{i}{2}R}{\frac{i}{2}R} = \frac{i+2}{i} > 1$$

Адиабата круче изотермы.

Определение. Процессы, протекающие при постоянной теплоемкости называются политропными.

$Q = 0$
$C = cosnt$
$PV^n = const$
$n = \dfrac{C_p - C}{C - C_V}$

- Если $C = 0$, то процесс адиабатический.
- Если $C = C_P$, то $n = 0$, следовательно процесс изобарический.
- Если $C = \infty$, то $n = 1$, следовательно процесс изотермический.
- Если $C = C_V$, то $n = \infty$, следовательно

6.3 Циклы в газах.

Определение. Замкнутым циклом (круговым процессом) называется процесс, при котором система пройдя через ряд состояний возвращается в исходное.

При подсчете работы находится: $A_{123} > 0$ и $A_{341} < 0$, причем $A_{341} = -A_{143}$, а значит:

$$A = A_{123} - A_{143} = A_{123} + A_{341} = \oint\limits_{12341} P\left(V\right) dV$$

$\Delta U = 0$, а тогда $Q = A$ и $Q = Q_1 - Q_2$.

Определение. Периодически действующий двигатель, совершающий работу за счет поступающего извне тепла называется тепловой машиной.

Определение. Цикл, идущий по часовой стрелке называется прямым циклом.

Замечание. Любая тепловая машина работает по прямому циклу.

Определение. Машина, работающая на обратном цикле, называется холодильной машиной.

Тепловая машина характеризуется коэффициентом полезного действия:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

6.4 Процесс теплообмена

Приаедем в соприкосновение 2 тела с разной температурой.
$T_1 \xrightarrow{Q} T_2$
Попробуем обратить процесс.
Возьмем газ между телами.

1. $T_1 < T_2$

   $T = const$

   $T_2 \xrightarrow{Q}$газ

2. Адиобатический

   $Q = 0$

   Поднимаем температуру гназа чуть больше T_2 или T растет и становится больше чем T_1.

3. $T = const$

   газ $\xrightarrow{Q} T_1$

Обратите внимание, что газ нагрелся.

Есть 2 способа исправить:

1. Отдать излишнее тепло во внешнею среду, но тогда там будут изменения.
2. Адиобатически вернуть в тоже состояние, но тогда получится замкнутый цикл, и тогда над газом совершили работу, а работа то из внешней среды, и тогда во внешней среде произошли изменения.

6.5 Изотермическое расширение или сжатие газа.

Чисто изотермический процесс обратим.
Все тепло, поступающее в газ, идет в работу.
$\delta Q = \delta A$
$\delta Q' = \delta A'$
$\delta Q' = -\delta Q$
$\delta A' = -\delta A$

6.6 Адиобатическое расширение или сжатие

Оно тоже обратимо.
Если $Q = 0$, то $dU = -\delta A$.
Нужно проводить этот процесс бесконечно быстро, чтобы не успевало тепло уходить.

Утверждение. Реальные тепловые процессы всегда необратимы.

7 Второе начало термодинамики

Определение. Невозможны такие процессы, *единственным* результатом которых являлось бы переход тепла от тела менее нагретого, к телу, более нагретому.

Замечание. Иначе бы можно было бы ставить чайник на лед, и он закипел бы.

Определение. Невозможны такие процессы, *единственным* результатом которых было бы отнятие некоторого тепла у произвольного тела и превращения этого тепла полностью в работу.

или

Определение. Невозможен вечный двигатель 2го рода

7.1 Цикл Карно

Карно — Французский инженер
Он решил создать обратимую тепловую машину. (Из 2х по идее обратимых циклов)
В этом цикле 4 этапа.

1.

   $T_1 = T$ — const

   Изотермическое расширение.

   Нагреватель отдает некоторое тепло газу.

2. Адиоботическое расширение

   $Q = 0$

   $T_1 \to T_2$ $(T_1 < T_2)$

3. Изотермическое сжатие

   Газ отдаче тепло Q_2 холодильнику. (Чаще всего холодильник это окружающая среда)

4. Адиоботическое сжатие

   $Q = 0$

   Возвращаем всю систему в исходное состояние.

В этом цикле совершается работа.

$A = Q_1 - Q_2$

Q_2 — это тепло, которое берет холодильник (просто если это тепло, которое отдал газ, то это слагаемое должно быть со знаком минус)

Теорема. *Две различные обратимые тепловые машины, работающие с одними и теми же нагревателем и холодильником имеют одинаковое КПД.*

Доказательство. $Q_{1M},\ Q_{2m},\ A_M,\ \eta_M$

$Q_{1N},\ Q_{2N},\ A_N,\ \eta_N$

$Q_{1?}$ — тепло, которое забрали у нагревателя.

$Q_{2?}$ — тепло, которое отдали холодильнику.

$A_?$ — работа

$\eta_?$ — КПД

$Q_{1M} = Q_{1N} = Q_1$ — выбрали такое цикл, когда

Докажем от противного: пусть $\eta_M > \eta_N$

$$\frac{Q_1 - Q_{2M}}{Q_1} > \frac{Q_1 - Q_{2N}}{Q_1}$$

$$Q_{2M} < Q_{2N}$$

$$A_M > A_N$$

Заставим эту машину работать по обратному циклу. (над ней совершается работа A_N,и отдается тепло нагревателю Q_1

Так как $A_M > A_N$, то мы можем взять часть работы от M и отдать N. (Работу, которую нужно совершить над N заберем у M)

У машины M останется часть работы, которое можно использовать. ($A = A_M - A_N$)

Рассмотрим единую тепловую машину ($M - N$)

Она забирает у холодильника тепло $Q_2 = Q_{N2} - Q_{M2}$

Получается нагреватель стоит ради мебели, а работа совершалась. То есть машина забрала тепло у холодильника и полностью превратила его в работу, что невозможно в силу 2го начала термодинамики.

Предположение неверно, следовательно $\eta_M \leq \eta_N$.

Аналогично можно доказать, что $\eta_M < \eta_N$ тоже неверное, следовательно остается их приравнять. □

Пусть H — необратимая машина, а O — обратимая машина. Они работают с одним и теми же холодильником и нагревателем, различие только в том, что одна обратимая, а другая нет. Аналогично можно показать, что неравенство $\eta_H > \eta_O$, следовательно $\eta_H \leq \eta_O$, но мы не можем опровергнуть $\eta_H < \eta_O$.

Как сделать из обратимой машины необратимую, присыпать песочку, добавить трение. И тогда КПД обратимой машины будет меньше чем необратимой.

$\dfrac{Q_1 - Q_2}{Q} = \eta$ — так вычисляется КПД. Но для обратимой машины можно по другому по идее.

$$Q_1 = A_1 = \nu RT \ln\frac{V_2}{V_1}$$

$$Q_2 = A_2 = \nu RT \ln\frac{V_3}{V_4}$$

Так как минус в формуле КПД поставлен явно, то $\ln\dfrac{V_3}{V_4}$, а не $\ln\dfrac{V_4}{V_3}$.

$$\eta = \frac{T_1 \ln\dfrac{V_2}{V_1} - T_2 \ln\dfrac{V_3}{V_4}}{T_1 \ln\dfrac{V_2}{V_1}}$$

$P_2 V_2^\gamma = P_3 V_3^\gamma$
$P_2 V_2 = \nu R T_2$
$P_3 V_3 = \nu R T_2$
Выражаем P_2 и P_3, и подставляем:

$$\frac{\nu R T_1 V_2^\gamma}{V_2} = \frac{\nu R T_2 V_3^\gamma}{V_3}$$

Откуда получаем уравнение адиобаты, связывающее объем и температуру.

$$T_1 \cdot V_2^{\gamma-1} = T_2 \cdot V_3^{\gamma-1}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

Аналогично из процесса 4-1 получаем $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\gamma-1}$

$$\frac{V_4}{V_1} = \frac{V_3}{V_2}$$

Следовательно, $\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1}$.

$\eta_O = \frac{T_1 - T_2}{T_2}$ — так вычисляется КПД для обратимых машин.

Замечание. Обратимая тепловая машина называется идеальной тепловой машиной иногда.

7.2 Приведенное количество тепла. Неравенство Клаузиуса.

Кпд:
$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$ — действует для всех машин
$\frac{T_1 - T_2}{T_1}$ — действует только для обратимых

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

$$1 - \frac{Q_2}{Q_1} \leq 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

$$\frac{Q_2}{T_2} \geq \frac{Q_1}{T_1}$$

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$$

Если рассматривать только газ и рассматривать что газ отдает тепло со знаком минус, то если брать это неравенство по отношению к одному телу, то мы получим $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$.

Если газ контактирует не с двумя, а с N телами, то можно записать $\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$ — это неравенство Клаудиуса.

$\frac{Q}{T}$ — эту дробь Клаузиус называл приведенным количеством тепла.

7.3 Процессы обратимые и необратимые

Определение. Обратимым процессом называется такой процесс, который может быть проведен в обратном направлении таким образом, что система будет проходить через те-же состояния что и в прямом ходе, но в обратном порядке.

Утверждение. Чисто механический процесс всегда обратим.

Для обратимости процесса необходимо

$$\begin{array}{cc} \delta A & \delta Q \\ \delta A' & \delta Q' \end{array} \quad \text{Причем:} \quad \begin{array}{l} \delta A = -\delta A' \\ \delta Q = -\delta Q' \end{array}$$

Проблема (Вопрос об обратимости процесса)**.** Нельзя ли при помощи каких либо процессов или механизмов добиться того, чтобы участвовавшие в них тела можно было вернуть в исходное состояние без того, чтобы в окружающей среде возникли какие либо другие изменения.

7.3.1 Расширение газа в пустоту

Процесс связанный с расширением газа в пустоту не обратим.

7.4 Границы применения второго начала термодинамики

Определение. Количество микросостояний W, соответствующих данному макросостоянию носит название термодинамической вероятностью.

Представить количественно эту величину не очень то возможно.
Эта величина позволяет характеризовать степень беспорядка в системе.
Чем эта величина больше, тем больше беспорядка.
Пусть есть система в которой есть W_1 и W_2, тогда общая характеристика системы $W = W_1 \cdot W_2$.

$$S = k \cdot \ln W$$

S — Энтропия
k — Постоянная Больцмана
$S = k \cdot \ln W = k \cdot \ln W_1 + k \cdot \ln W_2 = S_1 + S_2$
$W_{\text{Мех}} = 1$ — Термодинамическая вероятность механической системы
$S_{\text{Мех}} = 0$
W пропорциональна V^N, где N — количество молекул, или $W = b \cdot V^N$

$$S = k \cdot N \cdot \ln V + B,\ \ B = k \cdot \ln b$$

$$\Delta S = S_2 - S_1 = kN \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Рассмотрим газ в объеме V. Увеличим объем к $2V$. $\Delta S = kN \ln 2$

$$Q = A = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\begin{aligned} \Delta S &= kN \ln \frac{V_2}{V_1} = \\ &= kN_A \nu \ln \frac{V_2}{V_1} = \\ &= \nu R \ln \frac{V_2}{V_1} \end{aligned}$$

$\frac{Q}{T} = \Delta S$ — Эта формула только для обратимых процессов.
$T_1 > T_2,\ Q$ переходит от T_1 к T_2, но температура не меняется
Так как в рамках 1го тела у нас процесс изотермический, то мы можем записать:

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S_2 = \\ &= -\frac{Q}{T_1} + \frac{Q}{T_2} = \\ &= Q\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) > 0 \end{aligned}$$

Если $T_1 \simeq T_2$, то $\Delta S = 0$.

В адиобатическом:

$$\Delta S = \Delta S_{\text{газа}} + \Delta S_{\text{мех}} = \left\{ \begin{array}{c} \Delta S_{\text{мех}} = 0 \\ \Delta S_{\text{газа}} = 0 \end{array} \right\} = 0$$

В итоге мы приходим к еще 1ой математической формулировки второго начала термодинамики:

$$\Delta S \geq 0$$

Определение. При всех процессах, протекающих в макроскопической (термодинамической) системе, система не может самопроизвольно переходить из более вероятного состояния в менее вероятное состояние, тоесть энтропия системы не убывает.

Это определение носит вероятностный характер.

Определение. Наиболее вероянтой изменение энтропии системы является ее возрастание.

Ограничения:

1. Степени свободы

2. В сосуд поместим газ. Температуры у сосуда и газа разные.

   За короткое время $U >> E_{\text{вз}}$

   Системы, у которых выполнено условие $U >> E_{\text{вз}}$называются почти изолированными.

   $E_{\text{вз}}$ — Энергия взаимодействия. U — Внутренняя энергия газа

   Но если мы оставим этот сосут на долгое время

   Для открытых (как наша вселенная) системы этот закон несправедлив.

В 1906 Нернст занимался с квантовой электродинамикой.

Теорема (Как бы третье начало термодинамики)**.** *При стремлении температуры в абсолютному нулю энтропия любого тела так же стремится к нулю.*

$S = \int\limits_0^T \frac{dQ}{T} = \int\limits_0^T \frac{C\left(T\right)dT}{T}$ *, где* $C\left(T\right)$ *— теплоемкость.*

7.5 Реальные газы

В среднем размер одной простой молекулы равен $d \sim 10^{-10}$. $\lambda \sim 10^{-7}$ На земле это так.

$U_{\text{вз}} = 0$ — так как молекулы находятся на очень большом расстоянии

r — расстояние между центрами молекул

d — эффективный диаметр молекул

$r >> d$ $(r > 10^d) \Longrightarrow U_{\text{вз}} = 0$

А когда $r \sim 2 - 3d$, то тогда возникают силы притяжения (энергетической природы)

А если $r \leq d$ то возникают очень большие силы отталкивания.

Принято считать, что если тебя с кому нить тянет, то это силы отрицательные, если отталкивает, то силы положительные (с точке зрения физики).

$\overrightarrow{F} = -\text{grad}U$

$\overrightarrow{F} = -\frac{\partial u}{\partial r}$

$U_{\text{вз}}\left(\infty\right) = 0$

$du = -Fdr$

При сближении молекул энергия понижается.

U_{min} — глубина потенциальной ямы

$kT << |U_{min}|$ — твердое состояние вещества

$kT >> |U_{min}|$ — газообразное состояние вещества

$kT \approx |U_{min}|$ — жидкое состояние вещества

Если ν — 1 Киломоль, то $PV = RT \Longrightarrow \frac{PV}{RT} = 1$

Стали смотреть, что происходит с давлением, и оказалось:

Часть внешнего давления уходит на энергию притяжение между молекулами (этим обуславливается убывание). А в водороде такие силы очень малы. Поэтому пользоваться этой формулах при больших давлениях и/или малых температурах невозможно (будет большая погрешность, так как газ не идеальный).

Поэтому нужно учитывать U_{min}. Тогда для каждого газа будет своя формула (потому что разная формула молекул и не только это).

Выделим Менделеева. Он рассматривал поверхностное натяжение (границу между жидкостью и газом этой жидкости). Он брал закрытый сосуд. В нее помещал некоторое количество воды. Нагревал. Когда он это делал, начинался переход молекул из жидкого состояния в газообразное, повышается давление и граница будет смешаться в сторону газа (вверх, за счет линейного расширения газа), если воды много, а если воды мало, то граница между газом и жидкостью начинает ползти вниз. Ему захотелось найти ту границу, когда эта планка будет стоять на месте. Путём опытов, что он ее нашел такое состояние, когда граница не двигается.

Оказывается граница пропадает при определенной температуре (для каждой жидкости и давления своя). Он назвал эту температуру температурой *абсолютного кипения.*

А если сделать обратный эксперимент (не нагревать а остужать), то жидкость конденсируется в капельки и опадает.

7.6 Реальные изотермы углекислого газа

Эндрюс исследовал с углекислым газом. И построил его изотермы.

Чем выше изотерма, там при большей температуре она проведена.

Если говорить про большие температуры : они практически совпадают с гиперболой ($PV = const$).

Давление насыщенного пара - когда ты повышаешь объем, а давление не меняется (оно зависит от температуры).

При некоторой температуре невозможно добиться увеличением объема переход жидкости в газообразное состояние.

Пунктирная кривая ограничивает линию перевода от газа в жидкость, и ее так и называют — *пограничной кривой.*

То что выше критической изотермы мы будет называть *газом.* Ниже критической изотермы и правее пограничной кривой будем называть *жидкостью.* То что ниже критической изотермы и правее пограничной кривой назовем *паром.* А внутри пограничной кривой назовем *насыщенным паром.*

7.7 Уравнение состояние реального газа

$$F(\beta, V, T) = 0$$

На самом деле сложно его записать из за того, что силы взаимодействия разные в разных газах. Но есть хорошие приближения. Одно из них было получено Голландским ученым *Ван дер Ваальс*-ом. Что он сделал? Он взял уравнение Менделеева-Клаперона. Он учел, что $U_{\text{вз}} \neq 0$, но при этом учтены только силы притяжения, а силы отталкивания заменены жесткой границей. Возникает понятие *недопустимого объема* — когда молекула не может попасть в какую то точку (она занята другой молекулой). И еще одна поправка на внутреннее давление (давление уменьшается).

1. Поправка на *недопустимый объем*

   D — диаметр молекулы

   Центры молекул не могут находится на расстоянии, меньше чем диаметр этой молекулы.

   Объем этого места (объём шара) $\frac{4}{3}\pi d^3$.

   Но в газе очень много молекул.

   Сколько различных пар мы можем составить? Ответ: $C_N^2 = \frac{N(N-1)}{2} \approx \frac{N^2}{2}$

   $\frac{4}{3}\pi d^3 \frac{N^2}{2}$ — получим такую формулу — недопустимый объем для всех молекул

   Тут мы считаем для всех молекул.

   b — недопустимый объем так обозначается

$b = \dfrac{N}{6} \cdot 4\pi d^3 = 4N\dfrac{\pi d^3}{6}$

$\dfrac{\pi d^3}{6}$ — объем одной молекулы

Уравнение Менделеева-Клаперона с этой поправкой будет выглядит так: $P\left(V-b\right)=\nu RT$

$b = 4N_A\dfrac{\pi d^3}{6} \sim \nu$

2. Стенка, о которую бьются молекулы (они определяют давление)

   О стенку могут биться только те молекулы, которые находятся на расстоянии длинна свободного пробега.

   $\langle l \rangle$ — длинна свободного пробега

   n — концентрация молекул

   Учитывая силы притяжения, получается что на эти молекулы (внутри этого слоя, между стенкой и длинной свободного пробега от стенку) действуют только молекулы соседнего слоя.

   P' — внутреннее давление (уменьшает давление, которое газ оказывается на стенку)

   $P' \sim n^2 = \left(\dfrac{N}{V}\right)^2$

   Введем коэффициент пропорциональности: $P' = \alpha\dfrac{N^2}{V^2} = \dfrac{a^2}{V^2}$

   $a \sim \nu$

   Внесем еще и эту поправку: $P = \dfrac{\nu RT}{V-b} - P'$

$$\boxed{\left(P + \frac{a^2}{V^2}\right) \cdot (V-b) = \nu \mathrm{RT}}$$

Это уравнение *Ван дер Вальса.*
Запишем это уравнение в форме $F\left(\beta, V, T\right) = 0$.
$PV^3 - \left(Pb + \nu RT\right)V^2 + a^2V - a^2b = 0$
Если рассматривать его относительно V — это многочлен 3й степени. Корней у него максимум 3 корня.
Построим график этой функции. Назовём его изотермой *Ван дер Вальса.*
При высокой температуре $\dfrac{a^2}{v^2} << RT$, и тогда мы можем пренебречь $\dfrac{a^2}{v^2}$.
В этом случае мы получим гиперболу, просто смещенную чуть чуть.
Если сравнивать реальные изотермы и график *Ван дер Вальса* участком v_1v_2, то они там различаются.
Но не всё плохо для него все таки.
CDE — нереальный участок
Поэтому корень D — физически не реален.
v_1 — объем жидкости
v_2 — объем газа
Участки BC и EF — физически получаемы (осуществимы), но они соответствуют неустойчивому состоянию вещества.
BC — соответствует состоянию перегретой жидкости.
Кипение возникает вокруг центров кипения (неоднородности в среде жидкости).
Участок EF называется пресыщенного (переохлажденного) пара (формально переохлажденного газа).
Кристаллизация, так же как и кипение, возникает около неоднородности в среде.
При некоторых опытах получается что точка C опускается ниже нуля. Давление отрицательно. Такое в принципе возможно. Это когда жидкость не давит на стенки сосуда, а наоборот, пытается их втянуть.

7.8 Явления смачивания

Мы рассмотрели жидколсть и ее границу с газом. Но у нее в условиях земли есть еще одна граница — с твердым телом. Жидкость с твердым телом активно взаимодействует.

Энергия взаимодействия с молекулами жидкости —$U^{\text{ж}}_{min}$

Энергия взаимодействия с твердым телом — $U^{\text{тв}}_{min}$

1. $|U^{\text{ж}}_{min}|>|U^{\text{тв}}_{min}|$ — рассмотрим такой вариант ($U^{\text{ж}}_{min} < U^{\text{тв}}_{min} < 0$)

   Если у нас имеется вод такое соотношение, то молекула жидкости будет стремится йити в нутрь жидкости.

   $U_{\text{гр}} \approx 6 \cdot U^{\text{ж}}_{min} + 6 \cdot U^{\text{тв}}_{min}$ — полная энергия молекул на границе

   $U_{\text{вн}} \approx 12 \cdot U^{\text{ж}}_{min}$ — полная энегрия молекулы внутри жидкости

   Когда мы рассматриваем переход молекулы жидкости из нутри на границу, то изменяется ее потенциальная энергия.

   $\Delta U = U_{\text{гр}} - U_{\text{вн}} = 6\left(U^{\text{тв}}_{min} - U^{\text{ж}}_{min}\right) > 0$ — изменения энергии молекулы жидкости, еслои она переходит из жидкости на ее границу с твердым телом.

   В этом случае жидкость хочет уменьшить площадь соприкосновения с твердым телом, и горорят, что в этом случае жидкость не смачивает твержое тело.

2. $|U^{\text{ж}}_{min}|>|U^{\text{тв}}_{min}|$ ($\Delta U < 0$)

   Жидкость хочет увеличить площадь соприкосновения с твердым телом, и говорят, что жидкость смачивает твердое тело.

Когда жидкость находитвся в земных условиях, на нее действует сила тяжести, и у нее есть еще свободная поверхность, на которую действует сила поверхностного натяжения.

Эти 3 силы и определяют жидкость на земле.

1. Когда жидкость не смачивает твердое тело

   Характеристикой степени смачивания является угол, между сосудом и свободной поверхностью жидкости. Его и называют краевым углом. Когда жидкость не смачавает твердое тело, он лежит в пределах $\frac{\pi}{2} < \Theta < \pi$

2. Когда жидкость смачивает

   В этом случае $0 < \Theta < \frac{\pi}{2}$

Ртуть и стекло — $\Theta \approx \pi$ — пример почти абсольтного несмачивания

Стекло и вода — $\Theta \approx 0$ — пример почти абсольтного смачивания

7.9 Капилярные явления

Если мы берем большой обьем жидкости, то краевую границу сложно увидить. Но когда мы берем тонкий сисуд, то ее можно исследовать. Явления, происходящие в тонких сосудах называются капилярными явлениями.

Возьмем ускй сосуд. Пусть у нас жидкость не смачивает твержое тело. На поверхности образуется некое подобие шара. Сделаем срез на некоторой высоте. Радиус шара — R. Радиус среза окружности — r. Сила поверхностного натяжения направлена по касательной к жидкости, причем нужно учесть, что, если разложить на координатам, то y должен по идее быть меньше нуля, так как молекула жидкости хочет уйти в нуьрь жидкости. Обозначим ее ΔF.

$F = \sum \Delta F$

Разложим на составляющие вектора силы — одни направлены к стенке ($\Delta F_{\perp}$), а другие направлениы во внутрь жидкости ($\Delta F_{\parallel}$). Угол между $\Delta F_{\perp}$ и ΔF назовем β.

$\Delta F_{\perp} = \Delta F \cos\beta$

$\Delta F_{\parallel} = \Delta F \sin\beta$

$$\left|\overrightarrow{F}\right| = \underbrace{\sum \Delta\overrightarrow{F_{\perp}}}_{\substack{\parallel \\ 0}} + \sum \Delta\overrightarrow{F_{\parallel}} = \sin\beta \sum |\Delta F|$$

Как мы можем узнать β — $\sin\beta = \dfrac{r}{R}$

В преведущей лекции мы рассматривали — $\Delta F = \alpha\Delta l$

$\sin\beta\sum|\Delta F| = \dfrac{r}{R}\sum|\Delta F| = \dfrac{r}{R}\sum\alpha\Delta l = \dfrac{r}{R}\alpha 2\pi r = \dfrac{2\cdot\alpha\cdot\pi}{R}r^2\pi$

$$F = \frac{2\cdot\alpha\cdot\pi}{R}r^2\pi$$

Перейдем к давлению $P = \dfrac{F}{S} = \dfrac{2\cdot\alpha}{R}$ — избыточное давление (увеличивает атмосферное давление).

Если жидкость смачивает твердое тело, то избыточное давление уменьшает атмосферное давление. ПРи этом $P = -\dfrac{2\alpha}{P}$.

Чтобы не разделять эти 2 случая, то в первом случае $R > 0$, а во втором $R < 0$. И тогда $R = \dfrac{2\alpha}{R}$ выполняется для обоих случаев.

В общем случае, когдаэто не окружность, и какой нить эллипс, то справедлива формула— $P = \alpha\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)$.

Пример. Вереж сольшой сосуд с жтдкостью. Опускаем капиряр туда. Жидкость не смачавает стенки капиляра. Уровень жидкости в капиляре меньше уровля жидкости в сосуде на h. Найдем h. Посчитаем давление. $P_1 = P_2$ (1 — давление внутри капиляра, а 2 — давление в сосуде).

$P_1 = P_{\text{атм}} + P$

$P_2 = P_{\text{атм}} + P_{\text{гидр}}$

$P = P_{\text{гидр}} = \rho g h$

$\dfrac{2\alpha}{R} = \rho g h$

Слоедовательно, мы можем найти h — $h = \dfrac{2\alpha}{R\rho g}$

Тут неочерь удобно использовать R. ЧТо у нас еще есть? У нас есть уголΘ.

$r = R\cdot\sin\left(\Theta - \dfrac{\pi}{2}\right) = -R\cos\Theta$

Получим, что $R = -\dfrac{r}{\cos\Theta}$

Подставим: $h = -\dfrac{2\alpha\cos\Theta}{r\rho g}$.

Возникает вопрос: какого там есть минус?

Так как $\cos\Theta < 0$ то вс норм получается.

Для ситуации, когда жидкость смачивает твердое тело, то тогда в сосуде жидкость выше, чем в сосуде, и тогда принято считать, что $h < 0$. И для такой ситуации $h = \dfrac{2\alpha\cos\Theta}{2\rho g}$.

Так что в общем случае

$$h = \frac{2\alpha\cos\Theta}{r\rho g}$$

$h < 0$ — жидкость не смачивает капилляр

$h > 0$ — жидкость смачивает капилляр

Возьмем кирпич. Силикатный (Белый, без дырок). В нем есть капиляры диаметром примерно 10^{-6}. В этом случае $h \approx 30$ метров. 9й этаж ппц!

7.10 Явление переноса. Вязкость жидкости.

В газе все явления перенос связаны с хаотическим движением молекул. В жидкости впринципе тоже это тесть, но в отличие от газа это перемещение идет на очень маленькое рассмояние, во вторых у молекулы есть время оседлой жизни, так что они там не всегда прыгают. Явление вязкости обусловлено другими причинами, чем в газе (С точки зрения физики это вообще разные явления). Большуюроль играют силы межмолекулярного сцепления. Физически явления разные, но формула одна и та-же.

В газе это сила внутренено трения (Она так называется, но по сути в газах нету трения). Так эе она называется и в жидкости. $F = -\eta\cdot\dfrac{dv}{dx}\cdot S$

$F = -\eta\cdot\operatorname{grad}\left(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{n}\right)\cdot S$

Если говорить о дифузии. Она там и там одним и тем же обусловлена (только в жидкости она идет медленнее). $J = -D \cdot \frac{dn}{dx} \cdot S$

Если сравнивать коэффициент дифузии в жидкостях и в газе. В газе он выше ($D_{\text{г}} >> D_{\text{ж}}$). А коэфициент вязкости в жидкости больше ($\eta_{\text{г}} << \eta_{\text{ж}}$)

$\eta_{\text{г}} \sim D_{\text{г}}$

$\eta_{\text{ж}} \sim D_{\text{ж}}$

Когда мы рассматрриваем движение твердых тел в жидеости. Оно обусдловлено трением о жидкость и еще чем то. В часности, если рассмотреть шарик (есть формулда Стокса (Сила, действующая на гар радиуса R движущейся в жидкости при малых скоростях v))

$F = 6 \cdot \pi \cdot r \cdot \eta \cdot v$

Эта формула верна и для газа.

8 Строение и свойства твердых тел.

Строение их отличается от жидкостей. После нагрузки они могут вернуться сами в исходное состояние. Сначала рассмотрим процесс плавления.

Есть некоторая температура плавления. Всё тепло расходуется на превращение твердого тела в жидкость, то есть на разрыв связи в кристаллах.

Чтобы начался процесс кристаллизации, температура должна упасть немного ниже температуры плавления. Это нужно чтобы возникли центры кристаллизации. На сколько меньше нужно опуститься — это зависит от самого вещества. У металлов это доли градусов, а у другим материалов может доходить до 100 градусов. При этом при переохлажденной жидкости могут возникнуть так называемые *аморфные* тела (Жидкость, приобретшая свойства твердого тела). Пример аморфного тела — стекло.

Если рассматривать структуру кристаллического твердого тела. В нем могу возникать за счет хаотического движения (в некоторый момент времени, очень редко) атом может выскочить за решетку. На его месте возникла дырка. Он переходит в более неустойчевое состояние и он начал путешествовать по кристаллу. Но на место дырки тоже перескакивают атомы, и получается что дырки тоже путешествуют по телу.

Разница в структуре аморфных и твердых тел:

У кристалических твердых тел структура кристала повторяется на больших расстояния (Это называется *дальним порядком*).

У аморфных твердых тел есть только *ближний порядок.* (Кароче структура вроде бы повторяется, но очень коряво).

При кристализации металлов образуется огромное количество центтров кристализации. Так что металл — это огромное количество маленьких кристаликов.

Особенннро ярко это проявляется при наращивании кристалов. (Скорость роста кристала по одному направлению больше, чем по другому направлению). Нарастить крупный кристалл это усскуство. И еще концентрацию молекул в растворе.

Типы кристалических решеток (Они разничаются по геометрии, их более 200 видов, причем у одного и того же вещества могут быть разные кристалические решетки) (Классификация по типу связи):

1. Ионные.

   Решетки различных солей. (Для HCl атомы просто черезуются в кубической решетке). Здесь поимо дырок еще может быть такие дефекты: 2 одинаковых стоя. Или вместо одних атомов стоят другие.

2. Атомные решетки.

   .В узла стоят атомы (ядра или часть ядер) одних и тех же веществ, и между ними существует ковалентная связь. Особо это характерно для элементов четвертой группы. (Алмаз)

3. Молекулярные решетки.

   В узлах решетки стоят молекулы. Связи очень слабые и они появляются при очень низких температурах. Проявляется в охлажденных газах. Еще она есть в органических молекулах.

4. Мелалические решетки.

   В узлах стоят положительно заряженные атомы. А меж-атомном пространстве (межузловом пространстве) находятся свободные электроны (большое их количество), которые как раз и сдерживают эту решетку (как клей (невздумайте нюхать)). При изменении температуры происходит перестройка кристалической решетки.

9 Тепловое движение в твердых телах

$\varepsilon(T) = \varepsilon^{\text{кин}} + \varepsilon^{\text{потенц}} = kT$ — энергия теплового движения.
Уровень энергии молекулы: $E = U_{min} + \varepsilon(T)$.
$r = \dfrac{r_1 + r_2}{2},\ r(\varepsilon(T)) > r_0$

Если говорить о теплоемкости, если в узлах стоят атомы, то $C \approx 3 \cdot R$. Почему? Потому что $\dfrac{1}{2}kT$ на 1ну степень свободы. Так что тут возбуждаются все 6 (точнее 3 (на каждую ось)) степеней свободы (при неочень больших тоемпературах). Так как решетки разные, то общей формулы для всех веществ нету.
Δl — удлинение
l — длиннпа образца
$\dfrac{r - r_0}{r_0} = \dfrac{\Delta l}{l} = \alpha T$ — коэффициент линейнного расширения твердого тела.

10 Деффекты кристалической решетки

τ — время оседной жизни
U_0 — энергия, необходимая на вытаскивание из решетки
$\tau = \tau_0 e^{\dfrac{U_0}{kT}}$
Деффекты (В структуре кристалла):

1. Дырки и молекулы-путешественницы.
2. Еще вместо одгого элемента встает другой. Иногда это хорошо (редко), но в большенстве случаев неок.
3. Плохие деффекты: одним из самых нехороших деффектов — *дислокации*. Это когда пропадает ряд. Это потеря прочности.

11 Механические свойства твердых тел.

$f = -grad\,U$
$f = -\dfrac{dv}{dr}$
$f(r_0) = 0$

Если мы рассмотрим скорость изменения силы в зависимости отт растояния ($\dfrac{\Delta f}{\Delta r}$). Так вод если уисримить $\Delta r \to 0$, то получим $\dfrac{df}{dr}$. И вод как раз коэффициент упругости определяется этой величиной.

$$\frac{df}{dr}_{r=r_0} = k$$

$f(r) = \underbrace{f(r_0)}_{\substack{\parallel \\ 0}} + f\prime(r_0)\,\Delta r = -k\Delta r$ — закон Гука для одной молекулы.

$F_{\text{упругости}} = S \cdot n_0 \cdot f = -k\Delta r n_0 S = -\underbrace{k r_0 n_0}_{\substack{\parallel \\ E}} \dfrac{\Delta l}{l}$

Мы переходим от молекул до реальных тразмеров.
E — модуль Юнга.

$\sigma = E\varepsilon$ — этот закон соблюдается в случаях, ктогда в $f(r) = \underbrace{f(r_0)}_{\substack{\| \\ 0}} + f\prime(r_0)\,\Delta r$ мы пренебрегаем одним слагаемым.

$\left(\sigma = \dfrac{F}{S};\ \varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l}\right)$

ε — относительная деформация

Исходя из теории моджно вычислить критическое значение σ, значение, при котором материал теоритически не разорвется. Но проблема в том, что на практике не получается нифига. Все дело в том, что в кристалле нарушена кристалическая решетка.