Обыкновенные дифференциальные уранения

Преподаватель: Колотий Александр Дмитриевич

Литература:

1. Понтрягин Лев Семенович "Обыкновенные дифференциальные уравнения"
2. Петровский И. Г. "Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений"
3. Романко В. К. "Курс дифференциальных уравнений и вариационнгого исчисления"
4. Кортошов А. П., Рождественский Б. Л. "Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления"
5. Спепанов В. В. "Курс дифференциальных уравнений"

Дифференциальным уравнением называется соотношение, содержащее независимые переменные, искомые функции этих переменных и производные этих функций. Это нельзя считать определением.

Если неизвестные функции, входящие в уравнение зависят от одной переменной, то такое уравнение называют обыкновенных дифференциальным уравнением. Если же неизвестная функция зависит от нескольких переменных и содержит частные производные, то его называют дифференциальным уравнением с частными производными.

1 Введение

Определение. Обыкновенным дифференциальным уравнением n-ного порядка называется соотношение вида

$$F\left(x, y\left(x\right), \frac{dx}{dy}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \tag{1.1}$$

где F — известная функция своих аргументов, x — независимая переменная, $y\left(x\right)$ — неизвестная функция.

Определение. Наивысший порядок производной, входящей в уравнение называется порядком дифференциального уравнения.

Определение. Функция $y = \varphi\left(x\right)$ называется решением уравнения (1.1), если при подстановке ее в уравнение оно обращается в тождество, если не обращается, то не является решением.

Если дифференциальные уравнения разрешено относительно старшей производной, то-есть записано в виде:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y\left(x\right), \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) \tag{1.2}$$

то его называют дифференциальным уравнением в нормальной форме.

Наряду с одним дифференциальным уравнением будем рассматривать системы обыкновенных дифференциальных уравнений, например системы вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1\left(x, y_1\left(x\right), \dots, y_n\left(x\right)\right) \\ \dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n\left(x, y_1\left(x\right), \dots, y_n\left(x\right)\right) \end{cases} \tag{1.3}$$

$f_1 \dots f_n$ — известные функции своих аргументов,

x — независимая переменная,

$y_1\left(x\right) \dots y_n\left(x\right)$ — неизвестные функции своих аргументов.

Уравнение n-ого порядка (1.2) можно свести к эквивалентной системе.

Например, положим

$$y_1\left(x\right) = y\left(x\right), \quad y_2\left(x\right) = \frac{dy}{dx}, \quad \dots, \quad y_n\left(x\right) = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

Дифференцируя получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2\left(x\right) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_3\left(x\right) \\ \dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f\left(x, y_1\left(x\right) \dots y_n\left(x\right)\right) \end{cases} \tag{1.4}$$

Уравнение (1.2) и система (1.4) эквивалентны. В каком смысле: Если функция $y\left(x\right)$ является решением уравнения (1.2) то функции

$$y_1\left(x\right) = y\left(x\right), \quad y_2\left(x\right) = \frac{dy}{dx}, \quad \dots, \quad y_n\left(x\right) = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

будут решениями системы (1.4). Обратно, если $y_1 \dots y_n$ удовлетворяют системе (1.4), то функция $y_1\left(x\right)$ будет решением уравнения (1.2). Решением системы (1.3) являются функции $y_1\left(x\right) \dots y_n\left(x\right)$. Тогда решение системы (1.3) можно геометрически интерпретировать как кривую в $(n+1)$-мерном пространстве переменных $x, y_1 \dots y_n$, которую называют интегральной кривой.

Определение. Фазовое пространство — подпространство переменных $y_1 \dots y_n$.

Определение. Фазовая траектория — проекция интегральной кривой на фазовое пространство.

Пример.

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1\left(x, y_1, y_2\right) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2\left(x, y_1, y_2\right) \end{cases}$$

Решениями будут

$$y_1\left(x\right) = \varphi_1\left(x\right)$$
$$y_2\left(x\right) = \varphi_2\left(x\right)$$

Пример.

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Решением будет $y = x^2 + c$.

Дифференциальные уравнения имеют бесконечно много решений. Чтобы выделить единственное решение, нужно задавать дополнительные условия. Если дополнительные условия задаются в 1-ой точке, то они называются начальными условиями или условиями Коши. Если дополнительные условия задаются более чем в 1-ой точке, то они называются граничными или краевыми условиями. Дифференциальные уравнения вместе с начальными условиями называют задачей Коши или начальной задачей. Дифференциальные уравнения вместе с граничными условиями называют краевой задачей.

Для (1.2) начальные условия :

$$\begin{cases} y\left(x_0\right) & = y_{1,0} \\ \ldots \\ \dfrac{d^{n-1}y\left(x_0\right)}{dx^{n-1}} & = y_{n,0} \end{cases}$$

Для системы (1.4) начальные условия :

$$\begin{cases} y_1\left(x_0\right) & = y_{1,0} \\ y_n\left(x_0\right) & = y_{n,0} \end{cases}$$

Определение. Функция $y = \varphi\left(x, c_1, \ldots, c_n\right)$ где $c_1 \ldots c_n$ - произвольные постоянные, называется общим решением уравнения (1.1) или его общим интегралом, если при соответствующем выборе постоянных $c_1 \ldots c_n$ из него можно получить любое решение уравнения (1.1).

Пример.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1$$

Общее решение : $y = \dfrac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$.

2 Простейшие классы дифференциальных уравнений

2.1 Уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Уравнение с разделяющимися переменными — это уравнение вида:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)\, f_2(y) \tag{2.1}$$

$f_1,\ f_2$ — известные функции своих переменных,

$y(x)$ — искомая функция.

Решение Сначала находим решение уравнения $f_2(y) = 0$. Далее нам нужно найти другие решения: так как f_2 уже не обращается в 0, разделим на него:

$$\frac{1}{f_2(y)} \cdot \frac{dy}{dx} = f_1(x)$$

Проинтегрируем, получим:

$$\int \frac{1}{f_2(y)} \cdot \frac{dy}{dx} dx = \int f_1(x)\, dx$$

Приведем подобные:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)\, dx$$

2.2 Однородные уравнения

Определение. Однородным уравнением называется уравнения вида:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2.2}$$

Где f — это известная функция своего аргумента.

Решение Сделаем замену: $z = \dfrac{y}{x}$, тогда: $y = z \cdot x$. Продифференцируем: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx} \cdot x + z$.

Подставим в (2.2):

$$x \cdot \frac{dz}{dx} + z = f(z) \implies x\frac{dz}{dx} = f(z) - z$$

$$\left[\begin{array}{rcl} f(z) - z & = & 0 \\ \dfrac{dz}{dx} \cdot \dfrac{1}{f(z) - z} & = & \dfrac{1}{x} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{rcl} f(z) - z & = & 0 \\ \int \dfrac{dz}{dx} \cdot \dfrac{1}{f(z) - z} dx & = & \int \dfrac{1}{x} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{rcl} f(z) - z & = & 0 \\ \int \dfrac{dz}{f(z) - z} & = & \ln|x| \end{array}\right.$$

2.3 Линейные уравнения 1-го порядка

Определение. Линейным уравнением 1-го порядка называется уравнение вида:

$$\frac{dy}{dx} = a\left(x\right) y + b\left(x\right) \tag{2.3}$$

$$y\left(x_0\right) = y_0 \tag{2.4}$$

Где $a\left(x\right)$ и $b\left(x\right)$ — известные функции.

Если в этом уравнении $b\left(x\right) \equiv 0$ то уравнение называется линейным однородным, в противном случае — линейным неоднородным.

Теорема. *Пусть функции $a\left(x\right)$ и $b\left(x\right)$ определены и непрерывны на интервале $x \in (\alpha, \beta)$ тогда для любого $x_0 \in (\alpha, \beta)$ и любого $-\infty < y_0 < +\infty$ существует единственное решение задачи Коши (2.4), определенное на всем интервале (α, β).*

Доказательство. Рассмотрим линейное однородное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = a\left(x\right) y \tag{2.5}$$

И получим решение задачи Коши для этого уравнения. $y\left(x\right) \equiv 0$ — решение. Найдем другие решения.

Пусть в некоторой точке решение не равно нулю, тогда в силу непрерывности оно отлично от нуля и в некоторой ее окрестности.

Разделим на y:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = a\left(x\right)$$

Проинтегрируем:

$$\begin{aligned} \int\limits_{x_0}^{x} \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} dx &= \int\limits_{x_0}^{x} a\left(\xi\right) d\xi \\ \ln\left|y\right| \Big|_{x_0}^{x} &= \int\limits_{x_0}^{x} a\left(\xi\right) d\xi \\ \ln\left|y\left(x\right)\right| &= \ln\left|y_0\right| + \int\limits_{x_0}^{x} a\left(\xi\right) d\xi \end{aligned}$$

Тогда, так как $u = \ln e^u$ получаем:

$$y\left(x\right) = y_0 \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} a\left(\xi\right) d\xi\right) \tag{2.6}$$

(2.6) является решением задачи Коши (2.5,2.4). Единственность решения задачи (2.5,2.4) вытекает из способа получения (2.6).

$$y\left(x\right) = c \cdot \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} a\left(\xi\right) d\xi\right) \tag{2.7}$$

(2.7) — Общее решение уравнения (2.5). При $c = u(x_0)$ уравнение выглядит так:

$$y(x) \quad = \quad u(x_0) \cdot \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)\,d\xi\right)$$

Перейдем к неоднородному уравнению (2.3). Для нахождения решения неоднородного уравнения применим метод вариации произвольной постоянной, то-есть решения будим искать в виде:

$$y(x) = z(x) \cdot \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)\,d\xi\right) \tag{2.8}$$

где $z(x)$ — новая неизвестная функции.

Подставим (2.8) в (2.3):

$$z'(x) \cdot \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)\,d\xi\right) + z(x) \cdot \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)\,d\xi\right) \cdot a(x) =$$

$$= a(x) \cdot z(x) \cdot \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)\,d\xi\right) + b(x)$$

Тогда чтобы (2.8) было решением уравнения (2.3) необходимо и достаточно чтобы $z(x)$ было решением уравнения:

$$\frac{dz}{dx} \quad = \quad b(x) \cdot \exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)\,d\xi\right)$$

Заметим, что для того, чтобы (2.8) удовлетворяла условиям (2.4) необходимо чтобы $z(x_0) = y_0$. Проинтегрируем в проделах от x_0 до x и воспользуемся условием $z(x_0) = y_0$, получим:

$$z(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} b(\zeta) \cdot \exp\left(-\int\limits_{x_0}^{\zeta} a(\xi)\,d\xi\right) d\zeta$$

Подставим $z\left(x \ln|y_0| + \int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)\,d\xi\right)$ в (2.8), получим что решение задачи (2.3, 2.4) имеет вид:

$$y(x) \quad = \quad y_0 \cdot \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)\,d\xi\right) + \int\limits_{x_0}^{x} b(\zeta) \cdot \exp\left(-\int\limits_{x_0}^{\zeta} a(\xi)\,d\xi\right) d\zeta \tag{2.9}$$

То что это решение уравнения, проверяется непосредственной подстановкой.

Покажем что решение задачи (2.3, 2.4) единственное. Предположим противное: существует 2 решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a(x)\, y_1 + b(x) \\ y_1(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy_2}{dx} = a(x)\, y_2 + b(x) \\ y_2(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$u(x) = y_1 - y_2$$

Тогда вычтем из верхнего нижнее:

$$\frac{du}{dx} = a(x)\, u(x)$$

Вычтем по-другому, и получим:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = a(x)\, u(x) \\ u(x_0) = 0 \end{cases}$$

Получим что $u(x)$ является решением задачи Коши для однородного уравнения с 0-ым начальным условием.

У этой задачи Коши есть решение $u(x) \equiv 0$. Но так как по доказанному выше задача Коши для однородных уравнений имеет единственное решение, то кроме $u(x) \equiv 0$, других решений нету$\Longrightarrow y_1 \neq y_2$

Заметим что общее решение уравнения (2.3) имеет такой вид:

$$y(x) = c \cdot \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)\, d\xi\right) + \int\limits_{x_0}^{x} b(\zeta) \cdot \exp\left(-\int\limits_{x_0}^{\zeta} a(\xi)\, d\xi\right) d\zeta \tag{2.10}$$

□

Замечание. Общее решение неоднородного уравнения (2.3) есть сумма общего решения однородного(1-е слагаемое в (2.10)) и частного решения неоднородного(2-е слагаемое в (2.10)).

2.4 Уравнение в полных дифференциалах

Рассмотрим уравнение вида:

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0 \tag{2.11}$$

Определение. Если левая часть уравнения (2.11) есть полный дифференциал некоторой функции 2-х переменных $f(x, y)$, то уравнение (2.11) называется уравнением в полных дифференциалах.

Если $M\left(x,y\right),\ N\left(x,y\right),\ \dfrac{\delta M}{\delta y},\ \dfrac{\delta N}{\delta x}$ непрерывны, то из курса математического анализа известно что для того чтобы левая часть (2.11) была полным дифференциалом некоторой функции необходимо и достаточно выполнение условия:

$$\frac{\delta M}{\delta y} \equiv \frac{\delta N}{\delta x} \tag{2.12}$$

Может быть что уравнение (2.11) не является уравнением в полных дифференциалах, но после умножения на некоторую функцию оно становится уравнением в полных дифференциалах.

Решить уравнение: $xdy - ydx = 0$

$$M = -y, \quad N = x$$

$\dfrac{\delta M}{\delta y} = -1, \quad \dfrac{\delta N}{\delta x} = 1$ — значит оно не является уравнением в полных дифференциалах. Умножим его на $\dfrac{1}{x^2}$, полоучим:

$$\frac{1}{x}dy - \frac{y}{x^2}dx = 0$$

$-\dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{1}{x^2}$ — А тут все нормально.

Определение. Множитель, после умножения на который уравнение (2.11) становится уравнением в полных дифференциалах называется интегрирующим множителем.

Известно что для любого уравнения (2.11) если M и N — гладкие, существует интегрирующий множитель, но нет способа, позволяющего находить его всегда, но в частных случаях, в частности, когда интегрирующий множитель зависит только от одной переменной x или y, его можно находить. Сейчас мы покажем это, и приведем условия, позволяющие определять интегрирующий множитель $\mu\left(x,y\right)$. Справедливы условия:

$$\frac{\delta}{\delta y}\left(M\left(x,y\right)\mu\left(x,y\right)\right) = \frac{\delta}{\delta x}\left(N\left(x,y\right)\mu\left(x,y\right)\right)$$

Откуда:

$$\frac{\delta M}{\delta y}\mu + M\frac{\delta \mu}{\delta y} = \frac{\delta N}{\delta x}\cdot\mu + N\frac{\delta \mu}{\delta x}$$

Разделим на μ:

$$\frac{M\dfrac{\delta \mu}{dy} - N\dfrac{\delta \mu}{\delta x}}{\mu} = \frac{\delta N}{\delta x} - \frac{\delta M}{\delta y}$$

Если интегрирующий множитель не зависит от x, а зависит только от y, то: $\dfrac{\delta \mu}{\delta x} = 0$ и

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\delta M}{\delta y} = \frac{\dfrac{\delta N}{\delta x} - \dfrac{\delta M}{\delta y}}{M} \tag{2.13}$$

Если наоборот то: $\dfrac{\delta M}{\delta y} = 0$ и

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\delta M}{\delta x} = \frac{\dfrac{\delta M}{\delta y} - \dfrac{\delta N}{\delta x}}{N} \tag{2.14}$$

Отсюда вытекают следующие условия: если правая часть (2.13) зависит только от y, то у уравнения (2.11) существует интегрирующий множитель, зависящий только от y и его легко найти. Если правая часть (2.14) зависит только от x, то существует интегрирующий множитель, зависящий от x и его также легко найти.

2.5 Лемма Гронуолла–Белмона

Лемма. *Пусть* $u(t)\,,\ \alpha(t)\,,\ c \geq 0$ *и функции* $u(t)\,,\ \alpha(t)$ *непрерывны на* $t \in [a, b]$ *и* $u(t)$ *удовлетворяет неравенству:*

$$u(t) \leq c + \left| \int\limits_{t_0}^{t} \alpha(\zeta)\, u(\zeta)\, d\zeta \right|,$$

тогда

$$u(t) \leq c \cdot \exp\left(\left| \int\limits_{t_0}^{t} \alpha(\zeta)\, d\zeta \right| \right).$$

Доказательство. Пусть $t > t_0$, тогда можно снять модули. Введем функцию

$$v(t) = \varepsilon + c + \int\limits_{t_0}^{t} \alpha(\zeta)\, u(\zeta)\, d\zeta, \quad \varepsilon > 0.$$

Очевидно что $v > 0,\ v(t) > u(t)$. Продифференцируем равенство, получим:

$$v'(t) = \alpha(t)\, u(t)$$

Так как $v(t) > u(t)$, то верно:

$$v'(t) \leq \alpha(t)\, v(t)$$

Отсюда: $\dfrac{v\prime}{v} \leq \alpha(t)$. Проинтегрируем:

$$\begin{aligned} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{v\prime}{v} d\zeta &\leq \int\limits_{t_0}^{t} \alpha(\zeta)\, d\zeta \\ \ln v\big|_{t_0}^{t} &\leq \int\limits_{t_0}^{t} \alpha(\zeta)\, d\zeta \\ v(t) &\leq v(t_0) \cdot \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \alpha(\zeta)\, d\zeta \right) \end{aligned}$$

Так как $u(t) < v(t)$ и $v(t_0) = \varepsilon + c$, то получаем:

$$u(t) < (c+\varepsilon) \cdot \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \alpha(\zeta)\, d\zeta\right)$$

Это неравенство справедливо для любого $\varepsilon > 0$.

Перейдем в этом неравенстве при $\varepsilon \longrightarrow 0$, получим:

$$u(t) \le c \cdot \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \alpha(\zeta)\, d\zeta\right).$$

В случае $t < t_0$ преподаватель предлагает нам провести доказательство самостоятельно... ☐

2.6 Теоремы существования

Рассмотрим задачу Коши:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{2.15}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{2.16}$$

Где f — известная функция своих аргументов, x — независимая переменная, $y(x)$— искомая функция.

Пусть функция $f(x,y)$ задана в некоторой области G переменных (x,y) пространства R^2.

Определение. Функция $f(x,y)$ удовлетворяет в области G условию Липшица по второму аргументу с константой L, если для любых $(x,y_1), (x,y_2) \in G$ справедлива оценка:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L\,|y_1 - y_2|.$$

Если функция $f(x,y)$ имеет ограниченную частную производную $\dfrac{\delta f}{\delta y}$ в области G, то она удовлетворяет условию Липшица в области G с константой $L \ge \sup\limits_{G}\left|\dfrac{\delta f}{\delta y}\right|$

Рассмотрим:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \left|\frac{\delta f(x,\xi)}{\delta y}\right| \cdot |y_1 - y_2| \le L\,|y_1 - y_2|$$

Класс функций, удовлетворяющих условию Липшица не шире дифференцируемых функций, но не любая непрерывная функция удовлетворяет условию Липшица.

Пример. $f(x,y) = |y|$ — удовлетворяет условию Липшица, но не является дифференцируемой в области, содержащей точки оси абсцисс.

Предположим, что функция $f(x,y)$ в уравнении (2.15) непрерывна. И пусть у задачи (2.15,2.16) существует решение $y(x)$. Тогда подставив, получим:

$$y\prime(\xi) = f(\xi, y(\xi)),$$

где ξ изменяется на коком-то интервале.

Так как $y(x)$ дифференцируема, то $y(x)$ — непрерывная функция, следовательно правая часть $y\prime(\xi) = f(\xi, y(\xi))$ — непрерывная функция по ξ. Тогда и левая часть — непрерывная функция. А значит можем проинтегрировать левую и правую часть в пределах от x_0 до x. Воспользовавшись условием (2.16) получим:

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi \tag{2.17}$$

Уравнения, в которых неизвестная функция входит под знак интеграла называют интегральными уравнениями.

Уравнение (2.17) и задача Коши (2.15,2.16) эквивалентны. Если функция — решение задачи (2.15,2.16), то она является решением (2.17). Справедливо и обратная: если некоторая непрерывная функция удовлетворяет уравнению (2.17), то она будет решением задачи (2.15,2.16). Поэтому можно доказывать какие-то утверждения не для задачи (2.15,2.16), а для уравнения (2.17).

Теорема (Пикара, о существовании и единственности). *Пусть в области G плоскости (x,y) функция $f(x,y)$ непрерывна по x и удовлетворяет условию Липшица по y в любой замкнутой ограниченной области $\overline{G_1} \subset G$. Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ найдется на оси Ox отрезок $[a,b]$, содержащий точку x_0 внутри, такой что на нем существует единственное решение задачи (2.15,2.16).*

Доказательство. Покажем что $f(x,y)$ непрерывна по совокупности переменных $x,\ y$:

$$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| = |f(x_1,y_1) - f(x_1,y_2) + f(x_1,y_2) - f(x_2,y_2)| \le$$
$$\le |f(x_1,y_1) - f(x_1,y_2)| + |f(x_1,y_2) - f(x_2,y_2)| \le K|y_1 - y_2| + \frac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon$$

Теорему будем доказывать для интегрального уравнения (2.17). В силу эквивалентности ее с задачей Коши (2.15,2.16).

Возьмем какую нибудь замкнутую область $\overline{G_1} \subset G$ и $(x_0, y_0) \in \overline{G_1}$. Тогда по теореме Вейерштрасса в силу непрерывности $f(x,y)$ функция f достигает наибольшего или наименьшего значения, или найдется такая $M = \sup\limits_{\overline{G_1}} |f(x,y)|$.

Через точку (x_0, y_0) проведем две прямые. Одну с угловым коэффициентом M (Это AB), а другую с угловым коэффициентом $-M$ (Это DE). Проведем две прямые $x = a$ и $x = b$, параллельные оси ординат, так, чтобы получить два равнобедренных треугольника ΔABC и ΔADE так, чтобы они целиком лежали в $\overline{G_1}$. Возьмем произвольную непрерывную функцию $\varphi_0(x)$, заданную на отрезке $[a,b]$ так, чтобы ее график не выходил за $\overline{G_1}$. И простроим функцию:

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_0(\xi))\, d\xi$$

$\varphi_1(x)$ - определена, непрерывна на $[a, b]$, $\varphi_1(x_0) = y_0$, график $\varphi_1(x)$ не покидает треугольников ΔABC и ΔADE, когда $x \in [a, b]$. (Тогда $|f| \leq M$, а тогда перенесем y_0 в левую часть:

$$|\varphi_1(x) - y_0| \leq M\,|x - x_0|\,,$$

ну а тогда график не покидает этих треугольников). Построим функцию:

$$\varphi_2(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_1(\xi))\, d\xi.$$

Заметим, что функция φ_2 тоже удовлетворяет свойствам φ_1. Продолжим этот процесс:

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi))\, d\xi \tag{2.18}$$

Процесс построения функций $\varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_n \ldots$ называется процессом последовательных приближений. Покажем, что на отрезке $[a, b]$ построенная последовательность функций сходится равномерно к непрерывному решению уравнения (2.17). Заметим, что:

$$\varphi_n(x) = \varphi_1(x) + (\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) + \ldots + (\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)) \tag{2.19}$$

Поэтому вместо доказательства сходимости последовательности $\{\varphi_n\}$ будем доказывать сходимость функционального ряда:

$$\varphi_n(x) = \varphi_1(x) + (\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) + \ldots + (\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)) + \ldots \tag{2.20}$$

Докажем равномерную сходимость ряда (2.20). Для этого оценим n-ый член ряда: $|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)|$. Выберем в качестве c такую постоянную, чтобы:

$$|\varphi_1(x)| < c, \quad |\varphi_2(x)| < c, \quad \forall x \in [a, b]$$

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| \leq 2c$$

$$\begin{aligned} |\varphi_3(x) - \varphi_2(x)| = \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_2(\xi))\, d\xi - \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_1(\xi))\, d\xi \leq \\ \leq \left| \int\limits_{x_0}^{x} |f(\xi, \varphi_2(\xi)) - f(\xi, \varphi_1(\xi))|\, d\xi \right| \leq \\ \leq \{\text{по условию Лишшица}\} \leq \left| \int\limits_{x_0}^{x} k\,|\varphi_2(\xi) - \varphi_1(\xi)|\, d\xi \right| \leq 2c \cdot k \cdot |x - x_0| \end{aligned}$$

$$|\varphi_4(x)-\varphi_3(x)| = \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi,\varphi_3(\xi))\,d\xi - \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi,\varphi_2(\xi))\,d\xi \leq$$

$$\leq \left|\int\limits_{x_0}^{x} |f(\xi,\varphi_3(\xi)) - f(\xi,\varphi_2(\xi))|\,d\xi\right| \leq$$

$$\leq \{\text{по условию Лишшица}\} \leq \left|\int\limits_{x_0}^{x} k\,|\varphi_3(\xi)-\varphi_2(\xi)|\,d\xi\right| \leq 2c\cdot k^2\cdot\frac{|x-x_0|^2}{2}$$

Пользуясь методом математической индукции:

$$|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)| = \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi,\varphi_n(\xi))\,d\xi - \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))\,d\xi \leq$$

$$\leq \left|\int\limits_{x_0}^{x} |f(\xi,\varphi_n(\xi)) - f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))|\,d\xi\right| \leq$$

$$\leq \{\text{по условию Лишшица}\} \leq \left|\int\limits_{x_0}^{x} k\,|\varphi_n(\xi)-\varphi_{n-1}(\xi)|\,d\xi\right| \leq 2c\cdot k^{n-1}\cdot\frac{|x-x_0|^{n-1}}{(n-1)!}$$

Значит:

$$|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)| \leq 2c\cdot k^{n-1}\cdot\frac{|x-x_0|^{n-1}}{(n-1)!} \tag{2.21}$$

$$|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)| \leq 2\cdot c\cdot k^{n-1}\cdot\frac{|b-a|^{n-1}}{(n-1)!}$$

Заметим, что числовой ряд, с n-ым членом $a_n = 2\cdot c\cdot k^{n-1}\cdot\dfrac{|b-a|^{n-1}}{(n-1)!}$ является сходящимся. А тогда функциональный ряд (2.20) сходится равномерно и его сумма $\varphi(x)$-непрерывна на $[a,b]$. График функции $\varphi(x)$ не покидает треугольников ΔABC и ΔADE (следует от того что каждый график φ_n не покидает их). Следовательно имеет смысл интеграл

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(\xi,\varphi(\xi))\,d\xi$$

Причем

$$\left|\int\limits_{x_0}^{x} f(\xi,\varphi(\xi))\,d\xi - \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi,\varphi_n(\xi))\,d\xi\right| \leq \left|\int\limits_{x_0}^{x} k\,|\varphi(\xi)-\varphi_n(\xi)|\,d\xi\right| < (2.18) < \varepsilon$$

Тогда получаем что

$$\varphi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi,\varphi(\xi))\,d\xi$$

Докажем единственность решения уравнения (2.17). Предположим противное, что существую два решения: одно $\varphi(x)$, а другое

$$\psi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, \psi(\xi))\, d\xi.$$

Нетрудно показать что график $\psi(x)$ так же не покидает треугольников ΔABC и ΔADE. Тогда найдется $x_1 \in [a, b]$ что $(x_1, \psi(x_1)) \in \overline{G_1}$, но не принадлежат треугольникам. Тогда $|\psi(x_1) - y_0| \leq M|x_0 - x|$ — противоречие, следовательно график находится в треугольниках, а значит:

$$|\psi(x) - \varphi(x)| \leq 0 + \left|\int\limits_{x_0}^{x} k\, |\psi(\xi) - \varphi(\xi)|\, d\xi\right| \leq \{\text{по лемме Грануолла-Белмона}\} \leq 0$$

для $x \in [a, b]$. Ну а тогда $\varphi(x) \equiv \psi(x)$. ☐

Замечание. При любом выборе $\varphi_0(x)$ последовательность функций, построенных по (2.18) будет сходится к одной и той же функции $\varphi(x)$.

Теорема (Пеано)**.** *Если функция $f(x, y)$ ограничена и непрерывна в области G, то через каждую точку $(x_0, y_0) \in G$ проходит по крайней мере одно решение задачи (2.15,2.16).*

Доказательство. Без доказательства. ☐

Пример. $\begin{cases} y\prime = y^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

$y_0 > 1$

$y = \dfrac{y_0}{1 - y_0 x}$

$x \in \left(0, \dfrac{1}{y_0}\right)$

Решение разрушается.

Теорема (О гладкости решений дифференциального уравнения)**.** *Если $f(x, y)$ имеет непрерывные производные по x и y до p-того порядка, то решение уравнения*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

имеет непрерывные производные по x до $(p + 1)$-го порядка.

Замечание. Под 0-ым порядком производной подразумевается сама функция.

Доказательство. Пусть $f(x, y)$ — некоторое решение уравнения 1. Тогда функция $y(x)$ имеет производную, следовательно, она непрерывна. И справедливо тождество

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)) \tag{2.22}$$

Тогда поскольку функция непрерывна , тогда и правая часть (2) будет непрерывна по x как суперпозиция непрерывных функций. Следовательно, и левая часть непрерывна. То есть, решение непрерывно-дифференцируемо.

Пусть $p = 1$, то-есть $f(x, y)$ имеет непрерывные производные по x и y. Тогда правая часть имеет непрерывную производную по x. Следовательно и левая часть имеет непрерывную производную. То-есть $y(x)$ дважды непрерывно-дифференцируема.

Продифференцируем правую часть:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \tag{2.23}$$

Применяя к этому тождеству те-же рассуждения, что и выше, докажем теорему, для $p = 2$. И так далее. □

2.7 Системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) \\ \ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) \end{cases} \tag{2.24}$$

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_1^{(0} \\ \ldots \\ y_n(x_0) = y_n^{(0)} \end{cases} \tag{2.25}$$

$f_1 \ldots f_n$ — известные функции своих аргументов,

x — независимая переменная,

$y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — искомые функции,

x_0 — начальная точка,

$y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ — заданные постоянные.

$y(x) = \left(\begin{smallmatrix} y_1(x) \\ \ldots \\ y_n(x) \end{smallmatrix}\right)$

Вектор-функцию $y(x)$ будем называть дифференцируемой в точке x_0 если в этой точке будет дифференцируемы функции $y_i(x_0)$, $i = \overline{1, n}$. И под производной функции будем понимать:

$$y'(x_0) = \begin{pmatrix} y_1'(x_0) \\ \ldots \\ y_n'(x_0) \end{pmatrix}.$$

Аналогично можно говорить об интеграле:

$$\int\limits_a^b y(x)\,dx = \begin{pmatrix} \int\limits_a^b y_1(x)\,dx \\ \ldots \\ \int\limits_a^b y_n(x)\,dx \end{pmatrix}.$$

Обозначим через

$$f\left(x,y\right) = \begin{pmatrix} f_1\left(x,y_1,\ldots,y_n\right) \\ \ldots \\ f_n\left(x,y_1,\ldots my_n\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1\left(x,y\right) \\ \ldots \\ f_n\left(x,y\right) \end{pmatrix}$$

Это — отображение некоторой области $G \in R_{n+1}$ в пространство R_n. Обозначим через $y^{(0)} = \begin{pmatrix} y_1^{(0)} \\ \cdots \\ y_n^{(0)} \end{pmatrix}$. Тогда задачу (3,4) в векторной форме можем записать так:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f\left(x,y\right) \\ y\left(x_0\right) = y^{(0)} \end{cases}$$

Рассмотрим n-мерное пространство векторов $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Норма — неотрицательно определенная функция, и обладающая свойствами:

1. $\|y \geq 0\|, \quad \|y\| = 0 \implies y = 0$
2. $\|c \cdot y\| = |c| \cdot \|y\|$
3. $\left\|y^{(1)} + y^{(2)}\right\| \leq \left\|y^{(1)}\right\| + \left\|y^{(2)}\right\|$.

Мы возьмем за норму: $\|y\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} y^{(n)}}$

Определение. Отображение f удовлетворяет условию Липшица с константой l по 2-му аргументу в области G переменных x и y если, $\forall\left(x,y_1\right),\ \left(x,y_2\right) \in G \subset R_{n+1}$ справедлива норма:

$$\left\|f\left(x,y^{(1)}\right) - f\left(x,y^{(2)}\right)\right\| \leq L \cdot \left\|y^{(1)} - y^{(2)}\right\|.$$

Теорема (Существования и единственности Пикара для систем)**.** *Пусть область G переменных $\left\{\left(x,y_1,\ldots,y_n\right)\right\}$ пространства R_{n+1} вектор-функция $f\left(x,y\right)$ непрерывна по x и удовлетворяют условию Липшица по 2-му аргументу y в любой замкнутой ограниченной области $\overline{G_1} \subset G$, тогда для любой точке $\left(x_0,y_0\right) \in G$ найдется отрезок $[a,b]$, содержащий x_0 внутри, что на нем существуют единственные решения задачи (2.24,2.25).*

Доказательство. Самостоятельно. Подсказка: Он аналогичен для теоремы Пикара для обычных уравнений.

1. хз

2. Доказательство непрерывности вод этого отображения.

3. Берем некоторую $\overline{G_1} \subset G$, такую что $\left(x_0,y^{(0)}\right) \in G_1$.
   $M = \max\limits_{\overline{G_1}} ||f\left(x,y\right)||$
   Вводим область

   $$\Delta = \left\{\left(x,y_1,\ldots,y_n\right) \mid \left|\left|y - y^{(0)}\right|\right| \leq M \cdot ||x - x_0||,\ x \in [a,b],\ x_0 \in (a,b)\right\} \in \overline{G_1}$$

   Это аналог тех равнобедренных треугольников.

4. Выбираем непрерывную вектор-функцию $\varphi_0(x)$, для которой точки $(x, \varphi(x)) \in \overline{G_1},\ x \in [a,b]$.

5. После этого аналогичным образом строим вектор функцию $\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(k)}, \ldots$.

   Они определены и непрерывны на $[a,b]$, каждая из нбих в точке x_0 принимает значение вектора y_0. И $\left(x, \varphi^{(k)}(x)\right) \subset \Delta,\ x \in [a,b]$

6. После этого мы строим ряд

   $$\varphi^{(1)}(x) + \left(\varphi^{(2)}(x) - \varphi^{(1)}(x)\right) + \ldots + \left(\varphi^{(n)}(x) - \varphi^{(n-1)}(x)\right) + \ldots$$

   И для этого ряда докажем оценку

   $$\left|\left|\varphi^{(k+1)}(x) - \varphi^{(k)}(x)\right|\right| \leq \frac{|x - x_0|^{k-1}}{(k-1)!} K^{k-1} \cdot 2 \cdot c$$

   и докажем, что она сходится у некоторой непрерывной функции $\varphi(x)$.

□

2.8 Линейные системы

Будем рассматривать линейные системы, разрешенные относительно производных:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{1,1}(x) \cdot y_1 + \ldots + a_{1,n}(x) \cdot y_n + f_1(x) \\ \ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n,1}(x) \cdot y_1 + \ldots + a_{n,n}(x) \cdot y_n + f_n(x) \end{cases}$$

$a_{i,j}(x), f_i(x), \quad i, j = \overline{1, n}$ — заданные непрерывные функции. В дальнейшем будем предполагать, что они замкнуты на интервале $x \in (\alpha, \beta)$. x — независимая переменная, $y_1(x) \ldots y_n(x)$ — неизвестные функции.

А так-же рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_1^{(0)} \\ \ldots \\ y_n(x_0) = y_n^{(0)} \end{cases}$$

Введем обозначения:

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \ldots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(x) & \ldots & a_{1,n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}(x) & \ldots & a_{n,n}(x) \end{pmatrix}$$

$$y^{(0)} = \begin{pmatrix} y_1^{(0)} \\ \ldots \\ y_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

Тогда векторная запись задачи Коши принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = A(x) \cdot y + f(x) \\ y(x_0) = y^{(0)} \end{cases}$$

……

Правая часть удовлетворяет условию Липшица по переменной y. А тогда теорема Пикара для (1,2) справедлива, но из теоремы Пикара будет вытекать, что найдется такой отрезок $[a, b] \subset (\alpha, \beta)\,,\ x_0 \in (a, b)$ и оно будет единственным.

Теорема (Теорема о существовании и единственности для линейных систем)**.** *Пусть $a_{i,j}(x)\,,\ f_i(x)\,,\ i, j = \overline{1, n}$ — определены и непрерывны на $x \in (\alpha, \beta)$. Тогда для любой точки $x_0 \in (\alpha, \beta)$ и для любого набора $-\infty < y_i^{(0)} < +\infty$ существует единственное решение задачи (1,2) определенное на всем интервале (α, β).*

Доказательство. Самостоятельно.. План.

1. $y(x) = y^{(0)} + \int\limits_{x_0}^{x} A(\xi) \cdot y(\xi)\, d\xi + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi$
2. Возьмем произвольный $[a_1, b_1] \subset (\alpha, \beta)\,,\ x_0 \in [a_1, b_1]$.

   И докажем что решение там определено.
3. Возьмем произвольную непрерывную функцию $\varphi^{(0)}(x)\,,\ x \in [a_1, b_1]$
4. И строем последовательность

$$\varphi^{(k+1)}(x) = y^{(0)} + \int\limits_{x_0}^{x} A(\xi)\, \varphi^{(k)}(\xi)\, d\xi + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\, f\xi$$

   и $\varphi^{(k)}(x_0) = y^{(0)}$.
5. Снова строем ряд

$$\varphi^{(1)}(x) + \left(\varphi^{(2)}(x) - \varphi^{(1)}(x)\right) + \ldots + \left(\varphi^{(k+1)}(x) - \varphi^{(k)}(x)\right) + \ldots$$

   И решаем его сходимость.
6.

$$\left|\left|\varphi^{(k+1)}(x) - \varphi^{(k)}(x)\right|\right| = \left|\left|\int\limits_{x_0}^{x} A(\xi) \left(\varphi^{(k)}(\xi) - \varphi^{(k+1)}(\xi)\right) d\xi\right|\right|$$

7. Найдется такая константа M, что $\max\limits_{i,j,x \in [a_1, b_1]} ||a_{i,j}(x)|| \leq M$
8.

$$\left|\left|\varphi^{(k+1)}(x) - \varphi^{(k)}(x)\right|\right| \leq \frac{|x - x_0|^{k-1}}{(k-1)!} M^{k-1} \cdot 2 \cdot c,\ \forall x \in [a_1, b_1]$$

   но ряд вод с таким членом сходится при любых x. $\Longrightarrow \forall x \in (\alpha, \beta)$.

□

Если в системе (1) $f(x) \equiv 0$, то система называется линейной-однородной, а противном случае она называется линейной-неоднородной.

2.9 Свойства решений линейных однородных систем

Будем рассматривать линейную однородную систему (3). И пусть имеется m решений системы (3).

$$y^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} y_1^{(1)}(x) \\ \vdots \\ y_n^{(1)}(x) \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad y^{(m)}(x) = \begin{pmatrix} y_1^{(n)}(x) \\ \vdots \\ y_n^{(n)}(x) \end{pmatrix}$$

Теорема (1, О свойствах решений линейных однородных систем)**.** *Линейная комбинация решений линейной однородной системы* $\sum\limits_{k=1}^{m} c_k y^{(k)}(x)$ *является так же решением этой системы.*

Доказательство. Пусть вектор функции $y^{(1)}(x), \ldots, y^{(m)}(x)$ — решение линейной однородной системы. $\dfrac{dy}{dx} = A(x)\, y$. Подставим в нее вектор функцию

$$y(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k y^{(k)}(x),$$

тогда в левой части получим:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{m} c_k y^{(k)}(x)\right) - A(x)\sum_{k=1}^{m} c_k y^{(k)}(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k \frac{dy^{(k)}}{dx} - \sum_{k=1}^{m} c_k A(x)\, y^{(k)}(x) =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} c_k \left(\frac{dy^{(k)}}{dx} - A(x)\, y^{(k)}\right)$$

Так как $y^{(k)}$ — решение , то $\left(\dfrac{dy^{(k)}}{dx} - A(x)\, y^{(k)}\right) = 0$, тогда и

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{m} c_k y^{(k)}(x)\right) - A(x)\sum_{k=1}^{m} c_k y^{(k)}(x) = 0.$$

□

Функции $y^{(1)}(x), \ldots, y^{(m)}(x)$ называются линейно зависимыми на интервале (α, β), если существуют постоянные $c_1, \ldots, c_m$, не все равные нулю, такие что:

$$c_1 y^{(1)}(x) + \ldots + c_m y^{(m)}(x) = 0, \quad \forall x \in (\alpha, \beta).$$

Если не удается найти такие $c_1, \ldots, c_m$, то систему функций называют линейно независимой.

Определение. Определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1^{(1)}(x) & \ldots & y_1^{(n)}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^{(1)}(X) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

называют определителем Вронского, построенным по функциям $y^{(1)}(x) \ldots y^{(n)}(x)$.

Теорема (2). *Если вектор функции $y^{(1)}(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ линейно зависимы, то определитель Вронского, построенный по этим функциям тождественно равен нулю.*

Доказательство. Вытекает из известной теоремы линейной алгебры: если столбцы определителя линейно зависимы, то определитель равен нулю. ☐

Теорема (3). *Пусть вектор функции $y^{(1)}(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ — решения линейной однородной дифференциальной системы (1). тогда если определеитель Вронского, составленный по этим вектор-функциям, равен нулю в некоторой точке x_0, то эти вектор функции линейно зависимы.*

Доказательство. Пусть определитель Вронского в точке x_0 равен нулю. Тогда столбцы определителя

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1^{(1)}(x) & \ldots & y_1^{(n)}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^{(1)}(X) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

линейно зависимы, это значит найдутся постоянные $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, не все равные нулю, что линейная комбинация столбцов определителя равна нулю.

$$\alpha_1 \cdot y^{(1)}(x_0) + \ldots + \alpha_n \cdot y^{(n)}(x_0) = 0$$

С помощью этих постоянных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ построим вектор функцию:

$$u(x) = \alpha_1 \cdot y^{(1)}(x) + \ldots + \alpha_n \cdot y^{(n)}(x)$$

По теореме (1) она будет решением системы (1). При этом $u(x_0) = 0$ в силу:

$$\alpha_1 \cdot y^{(1)}(x_0) + \ldots + \alpha_n \cdot y^{(n)}(x_0) = 0$$

Вектор функция тождественный ноль $y(x) \equiv 0$ удовлетворяет системе (1), и в точке x_0 он тоже равен нулю. Получилось что есть 2 вектор функции ($u(x)$ и $y(x)$), которые являются решениями и совпадают в точке x_0. Ну а тогда в силу теоремы единственности они совпадают.

$$u(x) = \alpha_1 \cdot y^{(1)}(x) + \ldots + \alpha_n \cdot y^{(n)}(x) \equiv 0$$

Это означает что решения $y^{(1)}(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ линейно зависимы. ☐

Следствие. Если определитель Вронсткого, построенный по решениям линейной однородной системы (1) обращается в ноль в некоторой точке, то он тождественно равен нулю.

Замечание. Если вектор-функции $y^{(1)}(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ не являются решениями линейной однородной дифференциальной системы (1) с непрерывными коэффициентами, то утверждение, аналогичное теореме (3), для них не верно.

Пример. $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ — Две вектор функции. Они линейно независимы:

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Это потому что эти вектор функции не являются решениями системы (1).

Определение. n линейно независимых решений линейной однородной системы (1) называется фундаментальной системой решений этой системы. n - размерность системы (1).

Теорема (4). *Фундаментальная система решений существует у каждой линейной однородной системы (1).*

Доказательство. Рассмотрим n единичных числовых векторов:

$$e^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

И построим n решений системы (1), а именно решений следующих задач Коши: $x_0 \in (\alpha, \beta)$

$$y^{(1)}(x) : \begin{cases} \dfrac{dy^{(1)}}{dx} = Ay^{(1)} \\ y^{(1)}(x_0) = e^{(1)} \end{cases}, \quad \dots, \quad y^{(n)}(x) : \begin{cases} \dfrac{dy^{(n)}}{dx} = Ay^{(n)} \\ y^{(n)}(x_0) = e^{(n)} \end{cases}$$

Такие решения существуют и определены на всем интервале (α, β). Заметим, что определитель Вронского, построенный по вектор функциям имеет вид:

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Следовательно эти вектор функции не могут быть линейно зависимыми. Ну а тогда они образуют фундаментальную систему решений. □

Теорема (5). *Общее решение линейной однородной системы (1) — это линейная комбинация с произвольными постоянными фундаментальной системы решений.*

Доказательство. Пусть вектор функции $y^{(1)}(x), \dots, y^{(n)}(x)$ образуют фундаментальную систему решений системы (1), то есть они линейно не зависимы. Пусть вектор функция $y(x)$ — некоторое решение системы (1). Покаждем что найдутся постоянные $c_1, \dots, c_m$, такие что эту вектор функцию можно предстовить в виде

$$y(x) = c_1 \cdot y^{(1)}(x) + \dots + c_n \cdot y^{(n)}(x)$$

Возьмем некоторую точку $x_0 \in (\alpha, \beta)$ и рассмотрим вектор функции $y^{(1)}(x), \dots, y^{(n)}(x)$ в этой точке:

$$\begin{pmatrix} y_1^{(1)}(x_0) \\ \vdots \\ y_n^{(1)}(x_0) \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} y_1^{(n)}(x_0) \\ \vdots \\ y_n^{(n)}(x_0) \end{pmatrix}$$

Тогда эти же числовые вектора будут линейно не зависимы. Следовательно, образуют базис в n-мерном пространстве.

Тогда $\begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ \vdots \\ y_n(x_0) \end{pmatrix}$ можно разложить по базису:

$$\begin{pmatrix} y_1^{(1)}(x_0) \\ \vdots \\ y_n^{(1)}(x_0) \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \begin{pmatrix} y_1^{(n)}(x_0) \\ \vdots \\ y_n^{(n)}(x_0) \end{pmatrix}$$

то есть найдутся $c_1, \ldots, c_n$, такие что будет справедливо равенство:

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ \vdots \\ y_n(x_0) \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} y_1^{(1)}(x_0) \\ \vdots \\ y_n^{(1)}(x_0) \end{pmatrix} + \ldots + c_n \cdot \begin{pmatrix} y_1^{(n)}(x_0) \\ \vdots \\ y_n^{(n)}(x_0) \end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

Используя эти постоянные построим вектор функцию:

$$u\left(x\right) = c_1 \cdot y^{(1)}\left(x\right) + \ldots + c_n \cdot y^{(n)}\left(x\right)$$

По теореме (1) она будет решением системы (1), и в точке x_0 в силу (2.26) будет совпадать с функцией $u\left(x_0\right) = y\left(x_0\right)$. Следовательно, в силу теоремы единственности, $u\left(x\right) \equiv y\left(x\right)$. Следовательно:

$$y\left(x\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot y^{(k)}\left(x\right).$$

□

Вывод. *Их всех этих теорем следует что множество решений системы (1) является n-мерным линейным пространством.*

Теорема (Лиувилля для линейных систем)**.** *Пусть вектор-функции $y^{(1)}\left(x\right), \ldots, y^{(n)}\left(x\right)$ — решение системы (1), а $W\left(x\right) = \begin{vmatrix} y_1^{(1)}(x) & \cdots & y_1^{(n)}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^{(1)}(X) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$ — определитель Вронского, построенный по этим решениям. Тогда он является решением следующего дифференциального уравнения:*

$$\frac{dW}{dx} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}\left(x\right) \cdot W\left(x\right).$$

($\sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,k}\left(x\right)$ — след матрицы A, то есть сумма диагональных элементов).

Доказательство. Определитель Вронского можно считать. n^2 переменных $y_i\left(j\right)$, каждая их которых зависит еще от x.

$$\frac{dW}{dx} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial y_i^{(j)}} \cdot \frac{dy_i^{(j)}}{dx}$$

Через $B_{i,j}$ обозначим алгебраическое дополнение элемента (i, j).

Замечание. Частная производная равна: $\frac{\partial W}{\partial y_i^{(j)}} = B_{i,j}$.

Доказательство. Разложим определитель Вронского по i-й строке:

$$W\left(x\right)=y_i^{(1)}\left(x\right)\cdot B_{i,1}+\ldots+y_i^{(j)}\left(x\right)\cdot B_{i,j}+\ldots+y_i^{(n)}\left(x\right)\cdot B_{i,n}$$

Тогда $y_i^{(j)}\left(x\right)$ не будет входить ни в одно из алгебраических дополнений $B_{i,1},\ldots B_{i,n}$ в силу вычеркивания i-й строки и j-го столбца, а входит он только в одно слагаемое $y_i^{(j)}\left(x\right)\cdot B_{i,j}$. Отсюда и следует равенство

$$\frac{\partial W}{\partial y_i^{(j)}}=B_{i,j}$$

$\square$

А значит:

$$\frac{dW}{dx}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial W}{\partial y_i^{(j)}}\cdot\frac{dy_i^{(j)}}{dx}=\sum_{i,j=1}^{n}B_{i,j}\cdot\frac{dy_i^{(j)}}{dx}=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(B_{i,j}\cdot\frac{dy_i^{(j)}}{dx}\right)\right)$$

При $i=1$, $\sum\limits_{j=1}^{n}B_{1,j}\cdot\dfrac{dy_1^{(j)}}{dx}$ — это разложение по 1-й строке определителя:

$$\begin{vmatrix}\frac{dy_1^{(1)}}{dx} & \frac{dy_1^{(2)}}{dx} & \ldots & \frac{dy_1^{(n)}}{dx}\\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \ldots & y_2^{(n)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \ldots & y_n^{(n)}\end{vmatrix}$$

При $i=2$ продифференцированная 2-я строка. Следовательно:

$$\frac{dW}{dx}=\begin{vmatrix}\dfrac{dy_1^{(1)}}{dx} & \dfrac{dy_1^{(2)}}{dx} & \ldots & \dfrac{dy_1^{(n)}}{dx}\\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \ldots & y_2^{(n)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \ldots & y_n^{(n)}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}dy_1^{(1)} & dy_1^{(2)} & \ldots & dy_1^{(n)}\\ \dfrac{y_2^{(1)}}{dx} & \dfrac{y_2^{(2)}}{dx} & \ldots & \dfrac{y_2^{(n)}}{dx}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \ldots & y_n^{(n)}\end{vmatrix}+\ldots+\begin{vmatrix}dy_1^{(1)} & dy_1^{(2)} & \ldots & dy_1^{(n)}\\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \ldots & y_2^{(n)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{y_n^{(1)}}{dx} & \dfrac{y_n^{(2)}}{dx} & \ldots & \dfrac{y_n^{(n)}}{dx}\end{vmatrix}$$

Так как $\frac{dy^{(k)}}{dx} = A \cdot y^{(k)}, \quad k = \overline{1,n}$, то $\frac{dy_i^{(k)}}{dx} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot y_j^{(k)}, \quad i,k = \overline{1,n}$.

$$\frac{dW}{dx} = \begin{vmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1,j} \cdot y_j^{(1)} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1,j} \cdot y_j^{(2)} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1,j} \cdot y_j^{(n)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \dots & y_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} dy_1^{(1)} & dy_1^{(2)} & \dots & dy_1^{(n)} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2,j} \cdot y_j^{(1)} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2,j} \cdot y_j^{(2)} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2,j} \cdot y_j^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} + \ldots +$$

$$+ \begin{vmatrix} dy_1^{(1)} & dy_1^{(2)} & \dots & dy_1^{(n)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \dots & y_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{n,j} \cdot y_j^{(1)} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{n,j} \cdot y_j^{(2)} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{n,j} \cdot y_j^{(n)} \end{vmatrix}$$

Из 1-й строки вычтем i-ю $(i = \overline{2,n})$ строку, умноженную на $a_{i,n}$. (Это для 1-го определителя, для остальных сделаем аналогично).

$$\frac{dW}{dx} = \begin{vmatrix} a_{1,1} \cdot y_j^{(1)} & a_{1,1} \cdot y_1^{(2)} & \dots & a_{1,1} \cdot y_1^{(n)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \dots & y_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} dy_1^{(1)} & dy_1^{(2)} & \dots & dy_1^{(n)} \\ a_{2,2} \cdot y_2^{(1)} & a_{2,2} \cdot y_2^{(2)} & \dots & a_{2,2} \cdot y_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} + \ldots +$$

$$+ \begin{vmatrix} dy_1^{(1)} & dy_1^{(2)} & \dots & dy_1^{(n)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \dots & y_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,n} \cdot y_n^{(1)} & a_{n,n} \cdot y_n^{(2)} & \dots & a_{n,n} \cdot y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

Теперь выносим из каждого определителя $a_{i,i}, \quad i = \overline{1,n}$:

$$\frac{dW}{dx} = a_{1,1} \cdot W(x) + a_{2,2} \cdot W(x) + \ldots + a_{n,n} \cdot W(x) = W(x) \cdot \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}(x)$$

$\square$

2.10 Фундаментальная матрица и ее свойства

Пусть вектор-функции $y^{(1)}(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ — решения системы (1). Составим матрицу из этих вектор функций, которую обозначим через:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1^{(1)}(x) & \ldots & y_1^{(n)}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^{(1)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) \end{pmatrix}$$

Под производной матрицы будем понимать по определению:

$$\frac{dY}{dx} = \begin{pmatrix} \dfrac{y_1^{(1)}(x)}{dx} & \ldots & \dfrac{y_1^{(n)}(x)}{dx} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{y_1^{(n)}(x)}{dx} & \ldots & \dfrac{y_n^{(n)}(x)}{dx} \end{pmatrix}$$

Где $\dfrac{dy^{(k)}}{dx} = A(x) \cdot y^{(k)}, \quad k = \overline{1,n}$. Тогда эти n^2 равенств можно объединить в матричное равенство:

$$\frac{dY}{dx} = A \cdot Y \tag{2.27}$$

Определение. Фундаментальной матрицей линейной однородной системы (1) будем называть решение уравнения (2.27), невырожденной хотя бы в 1-ой точке.

Столбцы фундаментальной матрицы образуют фундаментальную систему решений системы (1), и обратно. Поэтому нахождение фундаментальной матрицы аналогично нахождению фундаментальной системы решений.

Свойство 1. Пусть $Y(x)$ — фундаментальная матрица системы (1), а $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in R^n$. Тогда $y(x) = Y(x) \cdot c$ будет решением системы (2.27) и любое решение системы (1) можно представить в виде:

$$y(x) = Y(x) \cdot c \tag{2.28}$$

Доказательство. Пусть:

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1^{(1)}(x) & \ldots & y_1^{(n)}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 y_1^{(1)}(x) & \ldots & c_n y_1^{(n)}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 y_n^{(1)}(x) & \ldots & c_n y_n^{(n)}(x) \end{pmatrix}$$

По теореме 1 о свойствах решений однородных систем $y(x)$ — решение (1).

Пусть $y(x)$ — произвольное решение (1), где $x \in (\alpha, \beta)$. $Y(x)$ — фундаментальная матрица, определенная на (α, β). Построим $u(x) = Y(x) \cdot Y^{-1}(x_0) y(x_0)$ Тогда по доказанному выше: $u(x)$ — решение(1) и $u(x_0) = Y(x_0) Y^{-1}(x_0) y(x_0) = y(x_0)$ тогда в силу теоремы существования и единственности для линейных систем они совпадают: $y(x) = u(x)$. □

Свойство 2. Пусть $Y(x)$ — фундаментальная матрица системы(1), а C — невырожденная матрица с постоянными элементами, тогда $Y_2(x) = Y_1(x) \cdot C$ — фундаментальная матрица.

Т.к. Y_1— фундаментальная матрица, то $\dfrac{dY_1}{dx} = A(x)Y_1(x)$ умножая на C получим:

$$\frac{d}{dx}(Y_1C) =$$

$Y_2(x_0)$— невырожденная матрица, как произведение двух невырожденных
Свойство 3. Пусть $Y_1(x), Y_2(x)$ — фундаментальные матрицы, тогда найдется невырожденная матрица C такая что $Y_2(x) = Y_1(x)C$.

Доказательство. Возьмем $x_0 \in (\alpha, \beta)$ и построим $U(x) = Y_1(x) \cdot Y_1^{-1}(x_0) \cdot Y_2(x_0)$ Тогда U по доказанному выше — фундаментальная матрица системы 1 те будет решением матричного уравнения 4 и $U(x_0) = Y_2(x_0)$. Мы имеем 2 решения совпадающих в одной точке, тогда в силу теоремы существования и единственности для линейных систем: $Y_2(x) \equiv U(x)$. □

2.11 Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений.

Рассмотрим линейную неоднородную систему вида:

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x) \tag{2.29}$$

Пусть $\overrightarrow{\phi(x)}$ — некоторое решение системы (2.29).
Утверждение. Любое решение (2.29) может быть представлено в виде:

$$y\,(x) = V(x) + \phi(x) \tag{2.30}$$

Где $V(x)$ — решение соответствующей однородной системы и обратно любая вектор функция вида (2.30) будет решением системы (2.29)

Доказательство. Пусть $V(x)$ — некоторое решение линейной однородной системы , а $\phi(x)$ — некоторое решение линейной неоднородной системы. Покажем, что (2.30) является решением (2.29):

$$\frac{dy}{dx} - A(x)y = \frac{d}{dx}(V + \phi) - A(x)(V + \phi) =$$
$$= \frac{dV}{dx} + \frac{d\phi}{dx} - AV - A\phi = \underbrace{\left(\frac{dV}{dx} - AV\right)}_{0} + \frac{d\phi}{dx} - A\phi = f$$

Обратно покажем, что решение системы (2.29) можно представить в виде (2.30). Для этого возьмем $V(x) = y(x) - \phi(x)$. Покажем что V(x) — решение соответствующей однородной системы:

$$\frac{dV}{dx} - AV = \frac{d}{dx}(y - \phi) - A(y - \phi) = \frac{dy}{dx} - \frac{d\phi}{dx} - Ay + A\phi = \left(\frac{dy}{dx} - Ay\right) - \left(\frac{d\phi}{dx} - A\phi\right) \ldots.$$

Следствие: пусть $y_1(x) \ldots y_n(x)$ ..... тогда любое решение системы (2.29) можно представить в виде ... где c_k — соответствующим образом подобранные постоянные. Это следствие вытекает из утверждения и теоремы 5. □

Другими словами: общее решение — сумма частного решения линейного *неоднородного* и общего решения соответствующей линейной *однородной* системы.

2.12 Метод вариации произвольных постоянных для систем

Пусть известно общее решение соответствующей *однородной* системы.

$$y(x_0) = y^{(0)} \tag{2.31}$$

Покажем как найти решение задачи Коши (2.29, 2.31).

$Y(x)$ — фундаментальная матрица ...

$y(x) = Y(x)c$ — ....

Тогда решение неоднородной системы (2.29) будем искать в виде:

$$y(x) = Y(x) \cdot c(x) \tag{2.32}$$

Где $c(x)$ — неизвестная вектор–функция. Подставим (2.32) в (2.29):

$$\frac{dY}{dx}c(x) + Y(x)\frac{dc}{dx} = A(x)Y(x)c(x) + f(x)$$

остается

$$Y(x)\frac{dc}{dx} = f(x)$$

Умножим слева на обратную фундаментальную матрицу:

$$\frac{dc}{dx} = Y^{-1}(x)f(x)$$

Проинтегрируем:

$$c(x) - c(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} Y^{-1}(s)f(s)ds$$

$c(x_0)$ выберем так, чтобы выполнялось условие (2.31):

$$c(x_0) = Y^{-1}(x_0) \cdot y^{(0)}$$

Подставим в (2.32) и получим, что решение задачи (2.29, 2.31):

$$y(x) = Y(x)Y^{-1}(x_0)y^{(0)} + Y(x)\int\limits_{x_0}^{x} Y^{-1}(s)f(s)ds$$

Обозначим матрицу Коши как: $C(x,\, s) = Y(x) \cdot Y^{-1}(s)$

$$y(x) = C(x, x_0)y^{(0)} + \int\limits_{x_0}^{x} C(x, s)f(s)ds \tag{2.33}$$

Первое слагаемое в (2.33) — решение соотв однородной системы удовлетворяет условию (2.31). Второе слагаемое в (2.33) — решение неоднородной системы (2.29), удовлетворяет нулевому начальному условию. Тогда общее решение системы (2.29) имеет вид:

$$y(x) = Y(x)c + \int\limits_{x_0}^{x} C(c, s)f(s)ds \tag{2.34}$$

Где c — вектор с произвольными постоянными компонентами.

3 Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка.

Рассмотрим уравнения вида:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y + f(x) \tag{3.1}$$

.....

если $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется линейным однородным, иначе неоднородным.

...

Введем обозначения $Y(x) = \begin{pmatrix} y_0(x) \\ \ldots \\ y_{n-1}(x) \end{pmatrix}$

$F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$

$A(x) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

Будем рассматривать уравнения n-ого порядка:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = a_{n-1}\left(x\right)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1\left(x\right)\frac{dy}{dx} + a_0\left(x\right)y + f\left(x\right) \tag{3.2}$$

И задачу Коши:

$$\begin{cases} y\left(x_0\right) = y_{0,0} \\ \dfrac{dy}{dx}\left(x_0\right) = y_{1,0} \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\left(x_0\right) = y_{n-1,0} \end{cases} \tag{3.3}$$

Тогда справедлива теорема существования и единственности решения задачи Коши для линейного уравнения n-ого порядка.

Пусть $a_i\left(x\right), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad f\left(x\right)$ определены и непрерывны на $x \in (\alpha; \beta)$, тогда:

$$\forall x_0 \in (\alpha; \beta) \quad -\infty < y_{i,0}, +\infty, \quad i = \overline{0, n-1}$$

существует единственное решение задачи $(3.2{,}3.3)$, определенное на всем интервале $(\alpha; \beta)$. Эта теорема является следствием из соответствующей теоремы существования и единственности для линейных систем.

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dx} = A\left(x\right)Y\left(x\right) + F\left(x\right) \\ Y\left(x_0\right) = y^{(0)} \end{cases}$$

$$y^{(0)} = \left(\begin{array}{c} y_{0,0} \\ \vdots \\ y_{n-1,0} \end{array} \right)$$

$$Y\left(x\right) = \left(\begin{array}{c} y_0\left(x\right) \\ \vdots \\ y_{n-1}\left(x\right) \end{array} \right)$$

$A\left(x\right)$ - соответствующая матрица

3.1 Свойства решений линейных однородных дифференциальных уравнения n-ого порядка

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = a_{n-1}\left(x\right)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1\left(x\right)\frac{dy}{dx} + a_0\left(x\right)y + f\left(x\right) \tag{3.4}$$

Функции $a_i, \quad i = \overline{1, n-1}$ определены и непрерывны на интервале $x \in (\alpha; \beta)$

Теорема (1). *Пусть функции $y_1\left(x\right), \ldots, y_m\left(x\right)$ — решения уравнения (3.4), тогда их линейная комбинация*

$$y\left(x\right) = c_1 y_1\left(x\right) + \ldots + c_m y_m\left(x\right), \quad c_i = const, \quad i = \overline{1, m}$$

также будет решением уравнения (3.4).

Доказательство. $y = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k y_k\left(x\right)$

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\sum_{k=1}^{m} c_k y_k\left(x\right)\right) - a_{n-1}\left(x\right)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\sum_{k=1}^{m} c_k y_k\left(x\right)\right) - \ldots - a_0\sum_{k=1}^{m} c_k y_k\left(x\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} c_k \frac{d^n y_k}{dx^n} - \sum_{k=1}^{m} c_k a_{n-1}\frac{d^{n-1}y_k}{dx^{n-1}} - \ldots - \sum_{k=1}^{m} c_k a_0 y_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} c_k \left(\frac{d^n y_k}{dx^n} - a_{n-1}\frac{d^{n-1}y_k}{dx^{n-1}} - \ldots - a_0 y_k\right) = 0$$

□

Определение. Функции $y_1\left(x\right), \ldots, y_m\left(x\right)$ называются линейно зависимыми на интервале $(a; b)$, если существуют постоянные $c_1, \ldots, c_m$, не все равные нулю, что линейная комбинация тождественно равна нулю для всех x из $(a; b)$

Определение. Определителем Вронского, составленным по функциям $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ называется определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_m(x) \\ \dfrac{dy_1}{dx} & \ldots & \dfrac{dy_m}{dx} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}} & \ldots & \dfrac{d^{m-1}y_m}{dx^{m-1}} \end{vmatrix}$$

Теорема (2)**.** *Если функции $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ линейно зависимы, то определитель Вронского составленный по этим функциям тождественно равен нулю.*

Доказательство. Пусть функции $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ линейно зависимы, тогда найдутся постоянные $c_1, \ldots, c_m$, не все равные нулю, что

$$c_1 y_1(x) + \ldots + c_m y_m(x) \equiv 0$$

Продифференцируем это $n-1$ раз, получим:

$$c_1 \frac{d^k y_1}{dx^k} + \ldots + c_m \frac{d^k y}{dx^k} \equiv 0$$

А тогда столбцы определителя Вронского, построенного по этим функциям при каждом x будут линейно зависимыми, ну а тогда по известной теореме алгебры определитель тождественно равен нулю. □

Теорема (3)**.** *Если функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — решения однородного уравнения (3.4) и определитель Вронского, составленный по этим функциям $W(x_0) = 0$ в точке $x_0 \in (\alpha; \beta)$, то функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — линейно зависимы.*

Доказательство. Из того что определитель Вронского в точке x_0 равен нулю следует что его столбцы линейно зависимы. А поэтому найдутся постоянные $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, не все равные нулю, что линейная комбинация:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}y_1(x_0)}{dx^{n-1}} \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{pmatrix} y_n(x) \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}y_n(x_0)}{dx^{n-1}} \end{pmatrix} = 0 \tag{3.5}$$

Затем с помощью этих постоянных построим функцию:

$$y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x)$$

Так как y_i — решения, то в силу теоремы 1, $y(x)$ будет решением уравнения (3.4). И в силу (3.5)

$$\begin{cases} y(x_0) = 0 \\ \dfrac{dy(x_0)}{dx} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}y(x_0)}{dx^{n-1}} = 0 \end{cases}$$

Тогда мы имеем 2 функции $u(x) \equiv 0$ и $y(x)$, которые удовлетворяют уравнению (3.4) и нулевым начальным условиям. А тогда в силу существования и единственности они совпадают. Это означает что решения $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — линейно зависимы. ☐

Следствие. Если определитель Вронского, составленный по решениям линейного однородного уравнения (3.4) обращается в ноль в некоторой точке из интервала $(\alpha; \beta)$, то он тождественно равен нулю на этом интервале.

Доказательство. Очевидно. ☐

Замечание. Если функции $y_1(x), \ldots y_n(x)$ не являются решениями уравнения (3.4) с непрерывными коэффициентами, то утверждение, аналогичные выше сформулированным (теорема 3 и следствия) для них в общем случае не верны.

Определение. Совокупность n линейно независимых решений линейного однородного уравнения (3.4) называется фундаментальной системой решений этого уравнения.

Теорема (3)**.** *Фундаментальная система решений существует для любого линейного однородного уравнения (3.4).*

Доказательство. Построим n решений уравнения (41), как решения следующих задач Коши. Возьмем $x_0 \in (\alpha; \beta)$.

$$y_1(x): \begin{cases} (3.4) \\ y_1(x_0) = 1 \\ \dfrac{dy_1(x_0)}{dx} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}y_1(x_0)}{dx^{n-1}} = 0 \end{cases} \qquad y_2(x): \begin{cases} (3.4) \\ y_2(x_0) = 0 \\ \dfrac{dy_2(x)}{dx} = 1 \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}y_2(x)}{dx^{n-1}} = 0 \end{cases} \qquad \ldots \qquad y_n(x): \begin{cases} (3.4) \\ y_n(x_0) = 0 \\ \dfrac{dy_n(x)}{dx} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}y_n(x)}{dx^{n-1}} = 1 \end{cases}$$

Составим определитель Вронского по этим функциям:

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Следовательно построенные решения $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ не могут быть линейно зависимы, тогда они образуют фундаментальную систему решений. ☐

Теорема (5)**.** *Общее решение линейного однородного уравнения (3.4) есть линейная комбинация с произвольными постоянными фундаментальной системы решений.*

Доказательство. Пусть функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (3.4). Составим по ним определитель Вронского. Возьмем $x_0 \in (\alpha; \beta)$ и рассмотрим составленный определитель Вронского в этой точке:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & \ldots & y_m(x_0) \\ \dfrac{dy_1(x_0)}{dx} & \ldots & \dfrac{dy_n(x_0)}{dx} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}y_1(x_0)}{dx^{n-1}} & \ldots & \dfrac{d^{n-1}y_m(x_0)}{dx^{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0$$

Столбцы этого определителя:

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ \dfrac{dy_1(x_0)}{dx} \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}y_1(x_0)}{dx^{n-1}} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{pmatrix} y_m(x_0) \\ \dfrac{dy_n(x_0)}{dx} \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}y_m(x_0)}{dx^{n-1}} \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

линейно не зависимы, а тогда такие вектора (3.6) образуют базис в $\mathbb{R}^n$.

Пусть функция $y(x)$ — какое то решение уравнения (3.4). Покажем, что его можно представить в виде линейной комбинации функций, образующих фундаментальную систему решений. Для этого рассмотрим вектор

$$\begin{pmatrix} y(x_0) \\ \dfrac{dy(x_0)}{dx} \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}y(x_0)}{dx^{n-1}} \end{pmatrix}$$

и разложим его по базису (3.6), что будет верно равенство:

$$\begin{pmatrix} y(x_0) \\ \dfrac{dy(x_0)}{dx} \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}y(x_0)}{dx^{n-1}} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ \dfrac{dy_1(x_0)}{dx} \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}y_1(x_0)}{dx^{n-1}} \end{pmatrix} + \ldots + c_n \begin{pmatrix} y_m(x_0) \\ \dfrac{dy_n(x_0)}{dx} \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}y_m(x_0)}{dx^{n-1}} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

С помощью постоянных построим $u(x) = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x)$. По теореме 1 она будет решением уравнения (3.4) и в силу (3.7):

$$\begin{cases} u(x_0) = y(x_0) \\ \dfrac{du(x_0)}{dx} = \dfrac{dy(x_0)}{dx} \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}u(x_0)}{dx^{n-1}} = \dfrac{d^{n-1}y(x_0)}{dx^{n-1}} \end{cases}$$

Таким образом есть 2 решения, удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям, следовательно эти функции совпадают тождественно в силу теоремы существовании и единственности. □

Теорема (Лиувилля). *Пусть функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — какое то решение уравнения (3.4), тогда определитель Вронского, составленный по этим функциям будет решением следующего дифференциального уравнения.*

$$\frac{dW}{dx} = a_{n-1}(x)\, W$$

Где $a_{n-1}(x)$ — коэффициент от $n-1$ производной уравнения типа (3.4).

Доказательство. Является следствием из теоремы Лиувилля для систем. Действительно, есть $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — решения (3.4), тогда вектор–функция:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ \dfrac{dy_1(x)}{dx} \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}y_1(x)}{dx^{n-1}} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{pmatrix} y_m(x) \\ \dfrac{dy_n(x)}{dx} \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}y_m(x)}{dx^{n-1}} \end{pmatrix}$$

будут решениями соответствующей эквивалентной линейной однородной системы вида:

$$\frac{dY}{dx} = A(x)\,Y$$

Где $A(x)$ имеет вид $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \end{pmatrix}$. Заметим что на главной диагонали может быть только один ненулевой элемент $A_{n,n}(x) = a_{n-1}$. Следовательно след матрицы A равен $a_{n-1}(x)$, а тогда определитель Вронского, построенный по функциям:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ \dfrac{dy_1(x)}{dx} \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}y_1(x)}{dx^{n-1}} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{pmatrix} y_m(x) \\ \dfrac{dy_n(x)}{dx} \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}y_m(x)}{dx^{n-1}} \end{pmatrix}$$

совпадает с определителем Вронского, построенным по функциям $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ и в силу теоремы Лиувилля для систем является решением вод этого уравнения. ☐

3.2 Понижение порядка линейного однородного уравнения

Пусть $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ — линейно независимые решения уравнения (3.4). Покажем, как можно понизить порядок $(m < n)$ на m , то есть свести его к уравнению $(n-m)$-ого порядка. Очевидно что $y_1(x)$ — тождественно не равна нулю. Тогда

$$\exists x_0 \in (\alpha;\beta) \;\; y_1(x) \neq 0$$

В силу непрерывности $y_1(x) \neq 0$ в U_{x_0}.

Решения будем искать в виде $y(x) = y_1(x)\,z(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Подставим $y(x) = y_1(x)\,z(x)$ в (3.4), получим:

$$\frac{d^n z}{dx^n} = \tilde{a}_{n-1}(x)\,\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \ldots + \tilde{a}_1\frac{dz}{dx} + \tilde{a}_0 z$$

Где $\tilde{a}_i$ — функции, которые выражаются через $a_i,\; y_1(x)$. Так как $y_1(x)$ решение уравнения (3.4), то $z(x) \equiv 1$, будет решением уравнения:

$$\frac{d^n z}{dx^n} = \tilde{a}_{n-1}(x)\,\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \ldots + \tilde{a}_1\frac{dz}{dx} + \tilde{a}_0 z$$

Подставим в него $z(x) \equiv 1$, получим $\overset{\sim}{a_0} \equiv 0$.

$$z_i(x) = \frac{y_{i+1}(x)}{y_1(x)}, \quad i = \overline{1, m-1}$$

Пусть $u(x) = \dfrac{dz}{dx}$, тогда:

$$\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} = \overset{\sim}{a_{n-1}}(x)\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \ldots + \overset{\sim}{a_1}(x)\, u$$

Тогда функции $u_i = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y_{i+1}}{y_1}\right)$, $i = \overline{1, m-1}$ будут решениями этого уравнения и они будут линейно независимые. Тогда:

$$\sum_{i=1}^{m-1} c_i \frac{d}{dx}\left(\frac{y_{i+1}}{y_1}\right) \equiv 0$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{y_{i+1}}{y_1}\right) \equiv C$$

Получили противоречие, значит функции линейно независимы.

и так далее получим уравнения $(n-m)$-го порядка.

3.3 Метод вариации произвольных постоянных для линейных уравнений n-ного порядка

Будем рассматривать уравнение:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y + f(x) \tag{3.8}$$

Будем предполагать что общее решение однородного уравнения известно. Поставим в соответствие уравнению (3.8) эквивалентную систему:

$$\begin{cases} y_0 = y \\ y_1 = \dfrac{dy}{dx} \\ \vdots \\ y_{n-1} = \dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_0}{dx} = y_1 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_2 \\ \vdots \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = a_{n-1}y_{n-1} + \ldots + a_1 y_1 + a_0 y_0 + f(x) \end{cases}$$

Пусть функции $z_1(x), \ldots, z_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения (1). Тогда вектор–функции:

$$\begin{pmatrix} z_1(x) \\ \dfrac{dz_1(x)}{dx} \\ \dfrac{d^2 z_1(x)}{dx^2} \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}z_1(x)}{dx^{n-1}} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} z_n(x) \\ \dfrac{dz_n(x)}{dx} \\ \dfrac{d^2 z_n(x)}{dx^2} \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}z_n(x)}{dx^{n-1}} \end{pmatrix}$$

будут образовывать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы. Применим метод вариации произвольных постоянных для поиска частных решений системы (2). Решение будем искать в виде:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = c_1(x) \cdot \begin{pmatrix} z_1(x) \\ \dfrac{dz_1(x)}{dx} \\ \dfrac{d^2 z_1(x)}{dx^2} \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1} z_1(x)}{dx^{n-1}} \end{pmatrix} + \ldots + c_n(x) \cdot \begin{pmatrix} z_n(x) \\ \dfrac{dz_n(x)}{dx} \\ \dfrac{d^2 z_n(x)}{dx^2} \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1} z_n(x)}{dx^{n-1}} \end{pmatrix}$$

Где $c_1(x), \ldots, c_n(x)$ — неизвестные функции. Тогда:

$$\begin{cases} y_0(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(x)\, z_k(x) \\ y_1(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(x)\, \dfrac{dz_k(x)}{dx} \\ \vdots \\ y_{n-1}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(x)\, \dfrac{d^{n-1} z_k(x)}{dx^{n-1}} \end{cases}$$

Значит:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\prime(x)\, z_k(x) + \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \dfrac{dz_k(x)}{dx} = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(x)\, \dfrac{dz_k(x)}{dx} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\prime \dfrac{dz_k(x)}{dx} + \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \dfrac{d^2 z_k(x)}{dx^2} = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \dfrac{d^2 z_k(x)}{dx^2} \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k\prime(x) \frac{d^{n-1} z_k(x)}{dx^{n-1}} + \sum_{k=1}^{n} c_k(x)\, \frac{d^n z_k(X)}{dx^n} = \\ \qquad\qquad = a_{n-1} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k(x)\, \frac{d^{n-1} z_k(x)}{dx^{n-1}} + \ldots + a_0 \sum_{k=1}^{n} c_k(x)\, z_k(x) + f(x) \end{cases}$$

Тогда:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k(x) \left(\frac{d^n z_k(x)}{dx^n} - a_{n-1} \frac{d^{n-1} z_k(x)}{dx^{n-1}} - \ldots - a_0 z_k(x) \right) =$$

$$= \left| \forall k \quad \left(\frac{d^n z_k(x)}{dx^n} - a_{n-1} \frac{d^{n-1} z_k(x)}{dx^{n-1}} - \ldots - a_0 z_k(x) \right) = 0 \right| = 0$$

Следовательно:

$$\begin{cases} c_1\prime(x)\, z_1(x) + \ldots + c_n\prime(x)\, z_n(x) = 0 \\ c_1\prime(x)\, \dfrac{dz_1(x)}{dx} + \ldots + c_n\prime(x)\, \dfrac{dz_n(x)}{dx} = 0 \\ \vdots \\ c_1\prime(x)\, \dfrac{d^{n-2}z_1(x)}{dx^{n-2}} + \ldots + c_n\prime(x)\, \dfrac{d^{n-2}z_n(x)}{dx^{n-2}} = 0 \\ c_1\prime(x)\, \dfrac{d^{n-1}z_1(x)}{dx^{n-1}} + \ldots + c_n\prime(x)\, \dfrac{d^{n-1}z_n(x)}{dx^{n-1}} = f(x) \end{cases}$$

Это является линейной алгебраической системой относительно $c_1\prime(x), \ldots, c_n\prime(x)$. Решения можно найти всегда. Очевидно, что функция

$$y_0(x) = c_1(x) \cdot z_1(x) + \ldots + c_n(x)\, z_n(x)$$

будет решением уравнения (3.8). Это и есть частное решение уравнения (3.8).

3.4 Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим следующие линейные однородные уравнения:

$$L(x) \equiv \frac{d^n y}{dx^n} - \left(a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y \right) = 0 \tag{3.9}$$

Где $a_i = const,\ i = \overline{0, n-1}$.

Будем искать решение уравнения (3.9) в виде $y(x) = e^{\lambda x}$, где λ — неизвестная постоянная. Подставим $e^{\lambda x}$ в левую часть, заметим:

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(e^{\lambda x}\right) = \lambda^k e^{\lambda x}$$

А тогда:

$$L\left(e^{\lambda x}\right) = e^{\lambda x}\left(\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \ldots - a_1\lambda - a_0\right) = 0$$

Тогда, чтобы функция $e^{\lambda x}$ была решением (3.9) необходимо и достаточно, чтобы λ была корнем уравнения:

$$P(\lambda) \equiv \lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \ldots - a_1\lambda - a_0 = 0$$

Этот многочлен называют характеристическим многочленом уравнения (3.9), а нули многочлена называют характеристическими числами уравнения (3.9).

Пусть все характеристические числа различные, то есть уравнение (5) имеет n различных нулей (корней, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$). Тогда функции $e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ будут решениями уравнения (3.9). Они линейно не зависимы. Покажем это, составив определитель Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1} & \ldots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \ldots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \ldots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x} \cdot e^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

Следовательно общее решение уравнения (3.9) будет равняться:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + \ldots + c_n e^{\lambda_n x}$$

Где $c_1, \ldots, c_n$ — произвольные постоянные.

Пусть a_i в уравнении (3.9) вещественные постоянные, а характеристические числа по прежнему различны, но среди них есть как вещественные, так и комплексные.

Пусть $\lambda = a + bi$ — комплексное характеристическое число уравнения (3.9), тогда $\overline{\lambda} = a - bi$ тоже будет характеристическим числом. Функция $e^{(a+bi)x}$ будет решением уравнения (3.9). Тогда его вещественная и мнимая части также будут решением уравнения (3.9).

Покажем это: Пусть $y(x) = u(x) + iv(x)$ тогда $L(u + iv) = 0$, следовательно $L(u) + iL(v) = 0$ откуда

$$e^{(a+bi)x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$$

$\Longrightarrow e^{ax}\cos bx,\ e^{ax}\sin bx$ — Эти функции линейно не зависимы (Предположим что они линейно зависимы, тогда $\forall x\ c_1 e^{ax}\cos bx + c_2 e^{ax}\sin bx = 0$, в часности для $x = 0$, $\Longrightarrow c_1 = 0,\ c_1 = 0 \Longrightarrow$ противоречие)) Сопряженное характеристичесное число дает такое решение:

$e^{(a-bi)x} = e^{ax}(\cos bx - i \sin bx)$

$e^{ax}\cos bx,\ -e^{ax}\sin bx$

То есть вещественная часть совпадает с вещественной частью ..., а мнимой получается умножением на -1 соответствующей мнимой части.

То есть, комплексно сопряженное характеристическое число, не порождает новых линейно независимых, с уже построенными решениями уравнения (3.9).

Тогда каждому вещественному характеристическому числу λ_k поставим в соответствие $e^{\lambda_k x}$, а каждой паре комплексно сопряженных характеристических чисел $a \pm bi$ поставим в соответствие 2 решения:

$$e^{ax}\cos bx, \quad e^{ax}\sin bx$$

В результате получим n решений уравнения (3.9). Они будут линейно не зависимыми. Так как предполагаем противное, и заменяя:

$$\cos bx = \frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2}, \quad \sin bx = \frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i}$$

мы получим, что будут линейно зависимы функции $e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ при различных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, что противоречит показанному выше. Ну а тогда линейная комбинация с произвольными постоянными, построенных решений будет общим решением уравнения (3.9).

Лемма (О линейной независимости функций вида $x^k e^{\lambda_j x}$)**.** *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ попарно различные вещественные или комплексные числа. Тогда функции*

$$\begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_1 x}, & \ldots, & x^{n_1} e^{\lambda_1 x} \\ e^{\lambda_2 x}, & xe^{\lambda_2 x}, & \ldots, & x^{n_2} e^{\lambda_2 x} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{\lambda_m x}, & xe^{\lambda_m x}, & \ldots, & x^{n_m} e^{\lambda_m x} \end{array}$$

где $n_1 \ldots n_m$ — неотрицательные целые постоянные, линейно независимые $(-\infty; +\infty)$.

Доказательство. Предположим противное: что эти функции линейно зависимы. Тогда найдутся постоянные, не все равные нулю, что их линейная комбинация тождественно равна нулю:

$$\begin{multlined}\alpha_0^{(1)}e^{\lambda_1 x}+\alpha_1^{(1)}xe^{\lambda_1 x}+\ldots+\alpha_{n_1}^{(1)}x^{n_1}e^{\lambda_1 x}+\\ +\alpha_0^{(2)}e^{\lambda_2 x}+\alpha_1^{(2)}xe^{\lambda_2 x}+\ldots+\alpha_{n_2}^{(2)}x^{n_2}e^{\lambda_2 x}+\ldots+\\ +\alpha_0^{(m)}e^{\lambda_m x}+\alpha_1^{(m)}xe^{\lambda_m x}+\ldots+\alpha_{n_m}^{(m)}x^{n_m}e^{\lambda_m x}\equiv 0\end{multlined}$$

Причем, есть хотябы один $\alpha_j^{(k)}\neq 0$. Значит:

$$\sum_{k=1}^{m}P_{n_k}\left(x\right)e^{\lambda_k x}\equiv 0 \tag{3.10}$$

Где $P_{n_k}\left(x\right)$ — многочлен по x степени k, причем хотя бы один из этих многочленов отличен от тождественного нуля. Без ограничения общности будем считать, что многочлен $P_{n_k}\left(x\right)$ тождественно не равен нулю. Умножим (3.10) на $e^{-\lambda_1 x}$, получим:

$$P_{n_1}\left(x\right)+\sum_{k=2}^{m}P_{n_k}\left(x\right)e^{\left(\lambda_k-\lambda_1\right)x}=0,\quad \lambda_k-\lambda_1\neq 0,\quad k=\overline{2,m}$$

Продифференцируем это тождество (n_1+1) раз. После дифференцирования получим:

$$\sum_{k=2}^{m}P_{n_k}^{(1)}\left(x\right)e^{\left(\lambda_k-\lambda_1\right)x}\equiv 0$$

причем $P_{n_k}^{(1)}\left(x\right)\equiv 0$. Умножим тождество (8) на $e^{\left(\lambda_1-\lambda_2\right)x}$, получим:

$$P_{n_2}^{(1)}\left(x\right)+\sum_{k=3}^{m}P_{n_k}^{(1)}\left(x\right)e^{\left(\lambda_k-\lambda_2\right)x}\equiv 0$$

Продифференцируем это тождество (n_2+1) раз, тогда получим:

$$\sum_{k=3}^{m}P_{n_k}^{(2)}\left(x\right)e^{\left(\lambda_k-\lambda_2\right)x}\equiv 0$$

и так далее. В итоге получим:

$$P_{n_m}^{(m-1)}\left(x\right)e^{\left(\lambda_m-\lambda_{m-1}\right)x}\equiv 0$$

причем $P_{n_m}^{(m-1)}\left(x\right)$ отличен от тождественного нуля. Следовательно, получим противоречие, которое и доказывает лемму, то есть линейную независимость функций. ☐

3.5 Случай кратных характеристических чисел

Мы рассматриваем линейное уравнение с постоянными коофицентами

$$L\left(y\right)=\frac{d^n y}{dx^n}-a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}-\ldots-a_1\frac{dy}{dx}-a_0 y,\ a_i=const,\ i=\overline{0,n-1} \tag{3.11}$$

Этому уравнению мы ставим с соответствие

$$P\left(\lambda\right)=\lambda^{n}-a_{n-1}\lambda^{n-1}-\ldots-a_{1}\lambda-a_{0}=0 \tag{3.12}$$

Пусть λ_1 будет k-кратным характеристическим числом. $\Longrightarrow$ λ_1 является корнем не только самого многочлена (5), но и корнем всех его производных по λ до $(k-1)$-го порядка.

$$P\left(\lambda_{1}\right)=\frac{dP\left(\lambda_{1}\right)}{d\lambda}=\ldots=\frac{d^{k-1}P\left(\lambda_{1}\right)}{d\lambda^{k-1}} \tag{3.13}$$

Где $\dfrac{d^{k}P\left(\lambda_{1}\right)}{d\lambda^{k}}\neq 0$

$$L\left(e^{\lambda x}\right)\equiv P\left(\lambda\right)e^{\lambda x} \tag{3.14}$$

Продифференцируем это тождество m раз по λ.

$$\frac{\partial^{m}}{\partial\lambda^{m}}\left(L\left(e^{\lambda x}\right)\right)\equiv\frac{\partial^{m}}{\partial\lambda^{m}}\left(P\left(\lambda\right)e^{\lambda x}\right)$$
$$\frac{\partial^{m}}{\partial\lambda^{m}}\left(L\left(e^{\lambda x}\right)\right)=L\left(\frac{\partial^{m}}{\partial\lambda^{m}}e^{\lambda x}\right)=L\left(x^{m}e^{\lambda x}\right)$$

Воспользуемся формулой Лейбница по дифференцированию произведения.

Пусть будет 2 функции $u\left(\lambda\right),\ v\left(\lambda\right)$. Тогда

$$\frac{d^{m}\left(u\left(\lambda\right)v\left(\lambda\right)\right)}{d\lambda^{m}}=\sum_{j=0}^{m}C_{m}^{j}\frac{d^{j}u}{d\lambda^{j}}\cdot\frac{d^{m-j}v}{d\lambda^{m-j}}$$

При этом $C_{m}^{0}=1$ и нулевая производная от функции — это сама функция.

$$\frac{\partial^{m}\left(P\left(\lambda\right)e^{\lambda x}\right)}{\partial\lambda^{m}}=\sum_{j=0}^{m}C_{m}^{j}\frac{d^{j}P\left(\lambda\right)}{d\lambda^{j}}\cdot x^{m-j}e^{\lambda x}$$

$$L\left(x^{m}e^{\lambda x}\right)\equiv\sum_{j=0}^{m}C_{m}^{j}\frac{d^{j}P\left(\lambda\right)}{d\lambda^{j}}\cdot x^{m-j}e^{\lambda x} \tag{3.15}$$

Рассмотрим тождество (3.15) при $\lambda=\lambda_1$, тогда в силу (3.13) получим, что $L\left(x^{m}e^{\lambda_{1}x}\right)=0$ при $m=0,1,\ldots,k-1$. Тогда выражения $e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x},\ldots,x^{k-1}e^{\lambda_1 x}$ являются решениями уравнения (4). В силу Леммы они линейно не зависимы. Тогда ставя в соответствии каждому характеристическому числу такого вида получим n решений уравнения (4). По лемме они линейно независимы. То есть образуют фундаментальную систему решений. А общим решением будет линейная комбинация решений системы с произвольными постоянными.

Пусть коэффициенты уравнения (4) a_i — вещественные, $i=\overline{0,n-1}$, тогда общее решение нужно стоить вещественное, но корни могут быть также комплексными. Пусть $\lambda=a+bi,\ b\neq 0$ — k–кратное характеристическое число уравнения (4). Тогда $\overline{\lambda}=a-bi$ — комплексно–сопряженное тоже будет k–кратным характеристическим числом. В силу показанного выше, функции

$$e^{(a+bi)x},\quad xe^{(a+bi)x},\quad \ldots,\quad x^{k-1}e^{(a+bi)x}$$

будут решениями уравнения (4). Их вещественные и мнимые части

$$\begin{array}{llll} e^{ax}\cos bx, & xe^{ax}\cos bx, & \ldots, & x^{k-1}e^{ax}\cos bx \\ e^{ax}\sin bx, & xe^{ax}\sin bx, & \ldots, & x^{k-1}e^{ax}\sin bx \end{array} \tag{3.16}$$

будут решениями уравнения (4). Функции (3.16) линейно не зависимы (доказывается от противного, предполагая противное, и заменяя $\cos bx = \dfrac{e^{iibx} + e^{-ibx}}{2}$ и $\sin bx = \dfrac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2}$ в (3.16) мы получили бы, что были бы линейно зависимыми функции $x^l e^{\lambda_j x}$, что является противоречием). Комплексно–сопряженное характеристическое число $a-bi$ не порождает новых, линейно независимых с (3.16) решений уравнения (4). Тогда паре комплексно сопряженных чисел мы поставим в соответствии $2k$ вещественных решений. В случае уравнения (4) с вещественными коэффициентами фундаментальная система решений строится следующим образом: каждому простому вещественному характеристическому числу λ_1 ставим в соответствие решение $e^{\lambda_1 x}$. Каждому k–кратному вещественному характеристическому числу ставим в соответствие k решений. Каждой паре простых характеристических чисел $a \pm bi$ ставим в соответствие 2 решения вида $e^{ax}\cos bx$, $a^{ax}\sin bx$, а каждой паре k–кратных комплексно–сопряженных характеристических чисел $a \pm bi$ ставим в соответствие $2k$ решений вида (3.16). В результате получаем n вещественных решений уравнения (4). Они линейно независимы (доказывается от противного). Мы показали как построить общие решения уравнения с постоянными коэффициентами.

3.6 Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$L(y) \equiv \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} - a_n y = f(x), \quad a_i = cosnt, \quad i = \overline{1,n} \tag{3.17}$$

$$P(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{3.18}$$

Чтобы построить общее решение уравнения нужно найти его частное решение. В случае произвольной правой части $L(x)$, частное решение неоднородного уравнения можно находить методом вариации произвольных постоянных (смотри случай уравнений с переменными коэффициентами). Когда $f(x)$ является суммой и/или произведением многочленов, экспонент, синусов и косинусов, то частные решения неоднородного уравнения можно находить методом неопределенных коэффициентов. Покажем этот метод.

Заметим, что если правая часть (3.17) $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, а $y_1(x)$ — решение уравнения $L(y_1) = f_1$, а $y_2: \quad L(y_2) = f_2$, то $y_1(x) + y_2(x)$ будет решением уравнения (3.17) $y_1(x) + y_2(x) : \quad f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Необходимость такого разбиения будет вытекать из последующих рассуждений.

Пусть $f(x)$ в уравнении (3.17) имеет вид:

$$f(x) = P_m(x)\, e^{\alpha x}$$

где $P_m(x)$ — многочлен степени m с вещественными и комплексными коэффициентами:

$$P_m(x) = p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_{m-1}x + p_m$$

а α — вещественна я или комплексная постоянная.

1. Пусть α не является корнем характеристического многочлена, то есть:

   $$P(\alpha) \neq 0 \tag{3.19}$$

   Тогда частное решение уравнения (3.17) можно найти в виде:

   $$y_1(x) = Q_m(x) e^{\alpha x} \tag{3.20}$$

   Где $Q_m(x)$ — многочлен степени m вида:

   $$Q_m(x) = q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \ldots + q_{m-1} x + q_m$$

   с неизвестными коэффициентами, которые находятся подстановкой (3.20) в (3.17) и приравнивая коэффициентов при одинаковых степенях x. Покажем что q_i находятся однозначно и что частное решение вида (3.20) существует.

   Когда α не является корнем характеристического многочлена, то этот случай называется не-резонансным, обратный случай называется резонансным.

   Подставим (3.20) в (3.17):

   $$L\left(Q_m(x) e^{\alpha x}\right) = L\left(\left(q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \ldots + q_m\right) e^{\alpha x}\right) = \\ = q_0 L\left(x^m e^{\alpha x}\right) + q_1 L\left(x^{m-1} e^{\alpha x}\right) + \ldots + q_m L\left(e^{\alpha x}\right)$$

   Воспользуемся равенствами (3.14,3.15).

   $$L\left(Q_m(x) e^{\alpha x}\right) = q_0 \sum_{j=0}^{m} C_m^j \frac{d^j P(\alpha)}{d\lambda^j} \cdot x^{m-j} e^{\alpha x} + \\ + q_1 \sum_{j=0}^{m-1} C_{m-1}^j \frac{d^j P(\alpha)}{d\lambda^j} \cdot x^{m-1-j} e^{\alpha x} + \ldots + q_m P(\alpha) e^{\alpha x} = \\ = \left(p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_m\right) e^{\alpha x}$$

   Сократим на $e^{\alpha x}$ и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

   $$\begin{aligned} x^m : &\quad q_0 P(\alpha) = p_0 \\ x^{m-1} : &\quad q_0 C_m^1 \frac{dP(\alpha)}{d\lambda} + q_1 P(\alpha) = p_1 \\ &\vdots \\ x^0 : &\quad q_0 C_m^m \frac{d^m P(\alpha)}{d\lambda^m} + q_1 C_{m-1}^{m-1} \frac{d^{m-1} P(\alpha)}{d\lambda^{m-1}} + \ldots + q_m P(\alpha) = P_m \end{aligned} \tag{3.21}$$

   В силу (3.19) из (3.17) уравнения q_0 находится однозначно. Найденное q_0 подставим в (3.18) уравнение, и найдем q_1. И так далее, из последнего найдем q_m.

2. Резонансный случай. Пусть α является k кратным корнем характеристического многочлена.

   $$P(\alpha) = \frac{dP(\alpha)}{d\lambda} = \ldots = \frac{d^{k-1} P(\alpha)}{d\lambda^{k-1}} = 0, \ \frac{d^k P(\alpha)}{d\lambda^k} \neq 0 \tag{3.22}$$

Тогда частное решение уравнения (3.17) $y_1(x)$ существует в виде:

$$y_1(x) = x^k Q_m(x) e^{\alpha x} \tag{3.23}$$

где $Q_m(x) = \sum\limits_{s=0}^{m} q_s x^{m-s}$ — многочлен степени m с неизвестными коэффициентами, которые находятся подстановкой (3.23) в (3.17) и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях x. Покажем что q_s существует. Для этого подставим (3.23) в (3.17) получим:

$$L\left(e^{\alpha x}\right) = P(\alpha) e^{\alpha x} \text{ и} L\left(x^m e^{\alpha x}\right) = \sum_{j=0}^{m} C_m^j \frac{d^j P(\alpha)}{d\lambda} x^{m-j} e^{\alpha x} \tag{3.24}$$

$$L\left(x^k Q_m(x) e^{\alpha x}\right) = L\left(\sum_{s=0}^{m} q_s x^{m+k-s} e^{\alpha x}\right) =$$

Так как оператор линейный

$$= \sum_{s=0}^{m} q_s L\left(m^{m+k-s} e^{\alpha x}\right) =$$

По равенствам 3.24

$$= \sum_{s=0}^{m} q_s \sum_{j=0}^{m+k-s} C_{m+k-s}^j \frac{d^j P(\alpha)}{d\lambda^j} \cdot x^{m+k-s-j} e^{\alpha x} =$$

В силу 3.22

$$= \sum_{s=0}^{m} q_s \sum_{j=k}^{m+k-s} C_{m+k-s}^j \frac{d^j P(\alpha)}{d\lambda^j} \cdot x^{m+k-s-j} e^{\alpha x} =$$

Заменим переменную по которой производится суммирование $\substack{l=j-k \\ j=l+k}$

$$= \sum_{s=0}^{m} q_s \sum_{l=0}^{m-s} C_{m+k-s}^{l+k} \frac{d^{l+k} P(\alpha)}{d\lambda^{l+k}} x^{m-s-l} e^{\alpha x} =$$

$$= \sum_{s=0}^{m} P_s x^{m-s} e^{\alpha x}$$

Сократим на $e^{\alpha x}$ и приравняем коэффициенты при равных степенях x.

$$\begin{cases} x^m: & q_0 C^k_{k+m} \dfrac{d^k P(\alpha)}{d\lambda^k} = P_0 \\ x^{m-1}: & q_0 C^{k+1}_{m+k} \dfrac{d^{k+1} P(\alpha)}{d\lambda^{k+1}} + q_1 C^k_{m+k+1} \dfrac{d^k P(\alpha)}{d\lambda^k} = P_1 \\ & \vdots \\ x^0: & \displaystyle\sum_{s=0}^{m} q_s C^{k+m-s}_{m+k-s} \dfrac{d^{m+k-s} P(\alpha)}{d\lambda^{m+k-s}} = \\ & \qquad = \displaystyle\sum_{s=0}^{m-1} q_s C^{k+m-s}_{m+k-s} \dfrac{d^{m+k-s} P(\alpha)}{d\lambda^{m+k-s}} + q_m C^k_k \dfrac{d^k P(\alpha)}{d\lambda^k} = P_m \end{cases} \tag{3.25}$$

В силу (3.22) из 1-го уравнения системы (3.25) q_0 находится однозначно, из второго q_1 однозначно, и так далее, из последнего q_m однозначно.

3.7 Случай вещественных коэффициентов

Пусть коэффициенты уравнения (1) a_k — вещественные, $k = \overline{1,n}$, а правая часть имеет вид:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P^{(1)}_m(x)\cos\beta x + P^{(2)}_m(x)\sin\beta x\right)$$

где $P^{(1)}_m(x)$ и $P^{(2)}_m(x)$ — многочлены степени m с вещественными коэффициентами, а α и β — вещественные постоянные. Покажем что в этом случае частное решение уравнения (1) существует в виде:

$$y_1(x) = x^k e^{\alpha x}\left(Q^{(1)}_m(x)\cos\beta x + Q^{(1)}_m(x)\sin\beta x\right)$$

Где $Q^{(1)}_m(x)$ и $Q^{(2)}_m(x)$ — многочлены степени m с неизвестными коэффициентами, которые находятся подстановкой (10) в (1) и приравниванием коэффициентов при подобных слагаемых. k — число, равное нулю, если $\alpha \pm \beta i$ не является корнем характеристического многочлена, если $\alpha \pm \beta i$ — корень характеристического многочлена, то число k равно его кратности.

Преобразуем правую часть:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\alpha x}\left(P^{(1)}_m(x)\cos\beta x + P^{(2)}_m(x)\sin\beta x\right) = \\ &= e^{\alpha x}\left(P^{(1)}_m(x)\frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} + P^{(2)}_m \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}\right) = \\ &= e^{(\alpha+\beta i)x}\frac{P^{(1)}_m(x) - iP^{(2)}_m(x)}{2} + e^{(\alpha+\beta i)x}\frac{P^{(1)}_m(x) + iP^{(2)}_m(x)}{2} \end{aligned}$$

Заметим что правая часть $f(x)$ является суммой двух комплексно–сопряженных слагаемых.

Так как коэффициенты уравнения (1) вещественные, то в случае комплексно сопряженных правых частей решения так же будут комплексно сопряженными. По доказанному выше, уравнение (1) для первого слагаемого правой части будет иметь решения вида:

$$y_1(x) = x^k e^{(\alpha+\beta i)x}\left(\frac{Q^{(1)}_m(x) - iQ^{(2)}_m(x)}{2}\right)$$

Следовательно, $\overline{y_1}$ будет решением уравнения (1), с правой частью, равной второму слагаемому, а тогда $y_1\left(x\right)+\overline{y_1}\left(x\right)$ будет решением уравнения (1) с правой частью $f\left(x\right)$. Преобразуем эту сумму:

$$\begin{aligned}
&y_1\left(x\right)+\overline{y_1}\left(x\right)+x^k e^{(\alpha-\beta i)x}\frac{Q_m^{(1)}\left(x\right)+iQ_m^{(2)}\left(x\right)}{2}=\\
&\quad=x^k e^{\alpha x}\left(\cos\beta x+i\sin\beta x\right)\frac{Q_m^{(1)}\left(x\right)-iQ_m^{(2)}\left(x\right)}{2}+\\
&\qquad\qquad+x^k e^{\alpha x}\left(\cos\beta x-i\sin\beta x\right)\frac{Q_m^{(1)}\left(x\right)+iQ_m^{(2)}\left(x\right)}{2}=\\
&\qquad\qquad\qquad=x^k e^{\alpha x}\left(Q_m^{(1)}\left(x\right)\cos\beta x+Q_m^{(2)}\left(x\right)\sin\beta x\right)
\end{aligned}$$

Мы показали что решение уравнения (1) в виде (10) существует.

3.8 Свойства нулей линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка.

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка вида:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a_1\left(x\right)\frac{dy}{dx}+a_2\left(x\right)y=0 \tag{3.26}$$

Будем предполагать что коэффициенты a_1 и a_2 заданы на некотором промежутке $I\subset\mathbb{R}$. $a_2\left(x\right)$ — непрерывная функция на I, а $a_1\left(x\right)$ — непрерывно дифференцируема на I. Нас будут интересовать решения этого уравнения, отличные от тождественного нуля. Точка x_0, в которой решение уравнения обращается в ноль, будем называть нулем нетривиального решения. Нас будут интересовать свойства нулей решений уравнения (1). Заменой переменных в уравнении (1) можно убрать слагаемое с первой производной, покажем это:

$y\left(x\right)=u\left(x\right)z\left(x\right)$, где $z\left(x\right)$ — новая неизвестная функция, а $u\left(x\right)$ выберем из условия, чтобы в новом уравнении не было первой производной.

$$u''z+zu'z'+uz''+a_1\left(u'z+uz'\right)+a_2uz=0$$

$$uz''+\left(2u'+a_1u\right)z'+z\left(u''+a_1u'+a_2u\right)=0$$

В качестве u возьмем решение уравнения:

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dx}&=-\frac{a_1}{2}u\\
\int\limits_{x_0}^{x}\frac{du}{u}&=-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{a_1}{2}dx\\
\ln|u|&=\ln c-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{a_1\left(\xi\right)}{2}d\xi\\
u\left(x\right)&=\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{a_1\left(\xi\right)}{2}d\xi\right)
\end{aligned}$$

$$z\prime\prime + qz = 0 \tag{3.27}$$

$q\left(x\right) = a_2 - \dfrac{a_1^2}{2} - \dfrac{a_1^1}{2} + \dfrac{a^2}{4} = a_2 - \dfrac{a_1^2}{4} - \dfrac{a_1^1}{2}$ — неизвестная заданная непрерывная функция на $x \in I$.

Так как нули у функции $y\left(x\right)$ и $z\left(x\right)$ одинаковые, то в дальнейшем будем рассматривать вида (2).

Лемма (1)**.** *Всякий $x_0 \in I$ любого нетривиального решения уравнения (2) является простым, то есть если $z\left(x_0\right) = 0$, то $z\prime\left(x_0\right) \neq 0$.*

Доказательство. Предположим, что x_0 — кратный ноль решения уравнения (2), то есть $z\left(x_0\right) = z\prime\left(x\right) = 0$. Тогда в силу теоремы о существовании и единственности, будет следовать, что $z\left(x\right) \equiv 0$. А это противоречит условиям. ☐

Лемма (2)**.** *Нули любого нетривиального решения уравнения (2) не имеют конечной предельной точки на множестве I.*

Доказательство. Допустим противное: пусть существует последовательность $x_1, x_2, \ldots$ предел которой $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} x_k = x_0$ и $z\left(x_k\right) = 0$. Тогда в силу непрерывной дифференцируемости $z\left(x\right)$ получаем:

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} z\left(x_k\right) = z\left(x_0\right) = 0$$

$$z\prime\left(x_0\right) = \lim_{k \longrightarrow +\infty} \frac{z\left(x_k\right) - z\left(x_0\right)}{x_k - x_0} = 0$$

В силу теоремы существования и единственности, следует что $z\left(x\right) \equiv 0$. ☐

Следствие 1. Любое нетривиальное решение уравнения (2) имеет на каждом ограниченном промежутке $[\alpha; \beta] \subset I$ конечное число нулей.

Доказательство. Допустим противное: на $[\alpha; \beta] \subset I$ существует $x_1, x_2, \ldots$ такие что $z\left(x_k\right) = 0$. Тогда в силу теоремы Больцано–Вейерштрасса найдется сходящаяся подпоследовательность подпоследовательность $x_n, x_{n_2}, \ldots \longrightarrow x_0 \in [\alpha; \beta]$, что противоречит *Лемме 2.* ☐

Теорема (Сравнение Штурма)**.**

$$y\prime\prime + q\left(x\right) = 0 \tag{3.28}$$

$$z\prime\prime + Q\left(x\right) z = 0 \tag{3.29}$$

$q\left(x\right)$, $Q\left(x\right)$ непрерывны на промежутке $x \in I$.

Пусть $q\left(x\right) \leq Q\left(x\right)$ когда $x \in I$. И пусть $y\left(x\right)$ какое то нетривиальное решение уравнения (3.28), а $z\left(x\right)$ какое то нетривиальное решение уравнения (3.29). Если x_1 и x_2 принадлежащие I — последовательные нули $y\left(x\right)$ $\left(y\left(x_1\right) = y\left(x_2\right) = 0\right)$. Тогда найдется $x_0 \in \left(x_1, x_2\right)$, в котором $z\left(x_0\right) = 0$, либо $z\left(x_1\right) = z\left(x_2\right) = 0$.

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 — последовательные нули решения y. Тогда, поскольку они последовательные, внутри $y\left(x\right)$ не обращается в 0 (знакопостоянная). Без ограничения общности будем считать, что $\forall x\in\left(x_1;x_2\right)\ \ y\left(x\right)>0$.

$$y\prime\left(x_1\right)=\lim_{x\longrightarrow x_1+0}\frac{y\left(x\right)-y\left(x_1\right)}{x-x_1}\geq 0$$
$$y\prime\left(x_2\right)=\lim_{x\longrightarrow x_2-0}\frac{y\left(x\right)-y\left(x_2\right)}{x-x_2}\leq 0$$

Но в силу *Леммы (1)* $y\prime\left(x_1\right)\neq 0$ и $y\prime\left(x_2\right)\neq 0$, следовательно мы показали, что $y\prime\left(x_1\right)>0$, а $y\prime\left(x_2\right)<0$. Умножим уравнение (3.28) на z, а уравнение (3.29) на y, и вычтем одно из другого:

$$y\prime\prime z-yz\prime\prime=\left(Q\left(x\right)-q\left(x\right)\right)yz$$
$$\left(y\prime z-yz\prime\right)\prime=\left(Q\left(x\right)-q\left(x\right)\right)yz$$

Проинтегрируем:

$$\left(y\prime z-yz\prime\right)|_{x_1}^{x_2}=\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(Q\left(x\right)-q\left(x\right)\right)y\left(x\right)z\left(x\right)dx$$

$$y\prime\left(x_2\right)z\left(x_2\right)-y\prime\left(x_1\right)z\left(x_1\right)=\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(Q\left(x\right)-q\left(x\right)\right)y\left(x\right)z\left(x\right)dx \tag{3.30}$$

Предположим противное, что утверждение теоремы не верно, это значит, что нету нулей у функции z внутри. И на $\left(x_1;x_2\right)$ — функция знако-постоянна. Снова без ограничения общности можно считать, что $z\left(x\right)>0$. Если это не так, то мы рассмотрим функцию $-z\left(x\right)$ вместо $z(x)$, которая будет больше нуля, сохраняя нули z.

Пусть теорема не верна, тогда возможен один из следующих случаев:

1. $z\left(x\right)>0,\ \forall x\in\left[x_1;x_2\right]$
2. $z\left(x\right)>0,\ \forall x\in\left(x_1;x_2\right],\ z\left(x_1\right)=0$
3. $z\left(x\right)>0,\ \forall x\in\left[x_1;x_2\right),\ z\left(x_2\right)=0$

В каждом из этих случаев левая часть выражения (3.30) отрицательная (строго меньше нуля), а правая часть в равенстве (3.30) больше либо равна нулю. Это противоречие, следовательно, теорема Штурма доказана. □

Замечание (1). Если $z\left(x_1\right)=z\left(x_2\right)=0$ и $z\left(x\right)\neq 0$ когда $x\in\left(x_1;x_2\right)$,то для $x\in\left[x_1;x_2\right]$ $q\left(x\right)\equiv Q\left(x\right)$ и $y\left(x\right)=cz\left(x\right)$. Так как $q\left(x\right)\equiv Q\left(x\right)$ то $y\left(x\right)$ и $z\left(x\right)$ являются решением одного и того же дифференциального уравнения. Следовательно эти функции линейно зависимы.

Замечание (2). Если $\exists\widetilde{x}\in\left(x_1;x_2\right)\ \ q\left(\widetilde{x}\right)<Q\left(\widetilde{x}\right)$, то всегда существует точка $x_0\in\left(x_1;x_2\right)$, в которой $z\left(x_0\right)=0$.

Следствие (1). Если в уравнении (3.28) $q\left(x\right)\leq 0$ на I, то всякое нетривиальное решение уравнения (3.28) имеет не более одного нуля.

Доказательство. В случае $q(x) < 0$ если решение уравнения $y(x)$ имеющее 2 нуля $y(x_1) = y(x_2) = 0$. Тогда рассмотрим уравнение (3.29) вида $z\prime\prime + 0 \cdot z = 0$ и любое решение этого уравнения должно иметь на промежутке $[x_1; x_2]$ хотя бы один ноль. Это противоречит тому, что у этого уравнения есть решение $z \equiv 1$. ☐

Следствие (2). Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — два линейно независимых решения уравнения (3.28). Если x_1 и x_2 — последовательные нули функции y_1, то $y_2(x)$ имеет на интервале $[x_1; x_2]$ в точности один ноль. То есть нули $y_1(x)$ и $y_2(x)$ чередуются.

Доказательство. Покажем что $y_1(x)$ и $y_2(x)$ не имеют общих нулей. Построенный определитель Вронского по функциям y_1 и y_2 равен нулю ($W = 0$). Следовательно решение y_2 будет иметь ноль внутри $[x_1; x_2]$, причем он будет единственным. Допустим противное: что их 2. Если $\widetilde{x} \in (x_1; x_2)$ $y_2(x_0) = 0$ и $y_2(\widetilde{x}) = 0$ причем $\widetilde{x} > x_0$. Тогда в силу теоремы Штурма, $y_1(x)$ должно иметь хотя бы один ноль на промежутке $[x_0; \widetilde{x}]$, а это противоречит тому, что x_1 и x_2 — последовательные нули. ☐

Следствие (3). Если некоторое нетривиальное решение уравнения (3.28) имеет бесконечное число нулей то любое нетривиальное решение уравнения (3.28) будет иметь бесконечное число нулей.

Доказательство. Следует из *следствия (2).* ☐

Следствие (4). $0 < m \leq q(x) \leq M < +\infty$, $m < M$. Тогда расстояние между соседними нулями любого нетривиального решения уравнения (3.28): $\dfrac{\pi}{\sqrt{M}} \leq J_{x,x_2} \leq \dfrac{\pi}{\sqrt{m}}$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение вида:

$$U(x) + mu = 0 \tag{3.31}$$

Найдем его решение $\lambda^2 + m = 0$. $\lambda = \pm i\sqrt{m}$.

$$u(x) = c_1 \cos\sqrt{m}x + c_2 \sin\sqrt{m}x$$

Нетрудно видеть, что $u(x) = \sin(\varphi + \sqrt{m}x)$ при любом постоянном φ является решением уравнения (3.31). Тогда нулями этого решения будут $\varphi + \sqrt{m}x = \pi k$, то есть нули $x_k = \dfrac{\pi k}{\sqrt{m}} - \dfrac{\varphi}{\sqrt{m}}$. Тогда расстояние между двумя соседними решениями будет $|x_{k+1} - x_k| = \dfrac{\pi}{\sqrt{m}}$. Предположим противное, что доказываемое следствие не верно. Это значит что найдется решение $y(x)$ уравнения (3.28) и $\overline{x_1}$ и $\overline{x_2}$ — соседние нули этого решения, так что $|\overline{x_1} - \overline{x_2}| > \dfrac{\pi}{\sqrt{m}}$. Следовательно найдутся 2 числа $\hat{x_1}$ и $\hat{x_2}$ принадлежащие $(\overline{x_1}; \overline{x_2})$.А тогда φ можно подобрать так, чтобы $\hat{x_1}$ и $\hat{x_2}$ были бы нулями $\sin(\varphi + \sqrt{m}x)$. А тогда, в силу теоремы Штурма, так как $q(x) \geq m$ на интервале $[\hat{x_1}; \hat{x_2}]$ должен найтись хотя бы один ноль решения, а это противоречит тому, что $\overline{x_1}$ и $\overline{x_2}$ последовательные нули. Следовательно предположение не верно.

Аналогично доказывается и левое неравенство. Для этого рассмотрим уравнение:

$$z\prime\prime + Mz = 0$$

У него есть решение $z = \sin\left(\varphi + \sqrt{M}x\right)$, нулями которого являются $x_k = \frac{\pi k}{\sqrt{M}} - \frac{\varphi}{\sqrt{M}}$. А расстояние между соседними нулями $|x_{k+1} - x_k| = \frac{\pi}{\sqrt{M}}$. Предположим противное: что существует решение уравнения (3.28), для которого $\overline{x_1}$ и $\overline{x_2}$ являются последовательными нулями, расстояние между которыми меньше чем $|\overline{x_1} - \overline{x_2}| < \frac{\pi}{\sqrt{M}}$. А тогда найдутся $\hat{x_1}$ и $\hat{x_2}$, расстояние между которыми равняется в точности $|\hat{x_1} - \hat{x_2}| = \frac{\pi}{\sqrt{M}}$. Причем $\hat{x_1} < \overline{x_1}$ и $\hat{x_2} > \overline{x_2}$. А тогда φ можно выбрать так, что $\hat{x_1}$ и $\hat{x_2}$, будут соседними нулями решения $z = \sin\left(\varphi + \sqrt{M}x\right)$. Так как $q(x) \leq M$, то в силу теоремы Штурма, на промежутке $[\overline{x_1}; \overline{x_2}]$ должен найтись хотя бы один ноль $z = \sin\left(\varphi + \sqrt{M}x\right)$. Ну а это противоречие, что они соседние нули. ☐

3.9 Решение линейных дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

Рассмотрим такое линейное однородное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами.

$$y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = 0 \tag{3.32}$$

Пусть $a_1(x)$ и $a_2(x)$ являются вещественными аналитическими функциями.

Определение. Функция $u(x)$ называется аналитической в точке x_0, если в некоторой окрестности точки x_0 она представима в виде сходящегося ряда

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \quad c_k = const$$

Тогда решение уравнения (3.32) можно находить в виде степенного ряда по $(x - x_0)$:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$$

3.9.1 Уравнение Эйери

Рассмотрим уравнение Эйери:

$$y'' + xy = 0 \tag{3.33}$$

Покажем как оно порождает новые функции и как находить решение в виде степенных рядов. Будем искать решение уравнения (3.33) в виде степенного ряда $y = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Тогда

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} \qquad y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2}$$

Подставим и получим:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} = 0$$

Сделаем замену $n = k - 2$, $k = n + 2$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^n = 0$$

тогда

$$2 \cdot 1 \cdot c_2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left((n+2)(n+1)c_{n+2} + c_{n-1}\right)x^n = 0$$

$c_2 = 0$
$c_{n+2} = -\dfrac{c_{n-1}}{(n+2)(n+1)}\ n \geq 1$
$n = 1 \Longrightarrow c_3 == \dfrac{-c_0}{3 \cdot 2}$
$n = 2 \Longrightarrow c_4 = \dfrac{-c_1}{4 \cdot 3}$
$c_5 = 0$
$c_{3m} = \dfrac{(-1)^m c_0}{3m(3m-1)(3m-3)(3m-4)\ldots 3 \cdot 2}$
$c_{3m+1} = \dfrac{(-1)^m c_1}{(3m+1)3m(3m-2)(3m-3)\ldots 4 \cdot 3}$
$c_{3m+2} = 0,\ m \geq 1$

Здесь коэффициенты c_0, c_1 — произвольные. Положим c_0 равное единице, а c_1 равное нулю. Это обозначает что $y(0) = 1$ и $y\prime(0) = 0$. Тогда решение

$$y_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{3m}}{3m(3m-1)(3m-3)(3m-4)\ldots(3 \cdot 2)} \tag{3.34}$$

Положим $c_0 = 0$ и $c_1 = 1$, тогда $y(0) = 0$ и $y\prime(0) = 1$.

$$y_2(x) = \frac{(-1)^m x^{3m+1}}{(3m+1)3m(3m-2)(3m-3)\ldots 4 \cdot 3} \tag{3.35}$$

По признаку Даламбера можно доказать сходимость рядов (3.34,3.35) для $x \in (-\infty; +\infty)$. После этого подставим в исходное равенство, и получим, что это и есть решение уравнения (3.33). Функции y_1 и y_2, определяемые равенствами (3.34,3.35) линейно независимы (доказывается построением определителя Вронского). А тогда общим решением уравнения (3.33) будет $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, где c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Утверждение. Если в линейном неоднородном уравнении

$$y\prime\prime + a_1(x)\,y\prime(x) + a_2(x)\,y = f(x)$$

где $a_1(x)$, $a_2(x)$, $f(x)$ — действительные аналитические функции в точке x_0, то его общее решение может быть получено методом неопределенных коэффициентов, аналогично тому, как это делалось для уравнения (3.33).

3.10 Зависимость решений от начальных значений и параметров

Рассмотрим задачу Коши для одного дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f\left(x, y\right) \\ y\left(x_0\right) = y_0 \end{cases}$$

Встает вопрос как при изменении x_0 и y_0 будет меняться решение этого уравнения. Важно чтобы при небольшом изменении x_0и y_0 решение изменялось не сильно.

Заметим, что изучение зависимости решения дифференциального уравнения от начальных данных можно свести к изучению зависимости решения дифференциального уравнения, от параметров, входящих в правую часть.

Обозначим через $y\left(x, x_0, y_0\right)$ — решение этой задачи Коши.

Введем новую неизвестную функцию $z = y\left(x, x_0, y_0\right) - y_0$ и новую независимую переменную $t = x - x_0$. Тогда начальным значением $x = x_0$ и $y = y_0$ будут соответствовать значения $t = 0$ и $z = 0$.

$$z\left(t\right) = y\left(x_0 + t, x_0, y_0\right) - y_0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dt},\ \frac{dt}{dx} = \frac{dz}{dt}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = f\left(x_0 + t, z + y_0\right) \\ z\left(0\right) = 0 \end{cases}$$

Справедливо и обратное: изучение зависимости решения дифференциального уравнения от параметров в правой части можно свести к изучению решения дифференциального уравнения от начальных условий.

Ну действительно, пусть:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f\left(x, y, \mu\right) \\ y\left(x_0\right) = y_0 \end{cases}$$

Нам интересно, как от параметра μ зависит решение этой задачи Коши. Тогда к уравнению $\dfrac{dy}{dx} = f\left(x, y, \mu\right)$ мы допишем $\dfrac{d\mu}{dx} = 0$, а к начальному условию допишем $\mu\left(x_0\right) = \mu_0$.

Определение. Рассмотрим область G переменных $\left(x_1 \dots x_n,\ z_1 \dots z_m\right) \in G \subset \mathbb{R}^{n+m}$. Будем говорить, что область G выпукла по переменным $x_1 \dots x_n$, если $\forall \left(x_1 \dots x_n, z_1 \dots z_m\right),\ (y_1 \dots y_n,\ z$ G, принадлежит G и весь отрезок прямой, соединяющей эти точки, то есть принадлежат точки:

$$\left(x_1 + \alpha\left(y_1 - x_1\right), \dots, x_n + \alpha\left(y_n - x_n\right), z_1, \dots z_n\right) \in G,\ \forall \alpha \in [0; 1]$$

Лемма (Адамара (Французский математик))**.** *Пусть функция* $F\left(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m\right)$ *имеет в некоторой выпуклой по переменным* $\left(x_1, \dots x_n\right), \left(y_1, \dots, y_n\right)$ *области* G *пространства* $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$*непрерывные производные по* $\left(x_1, \dots, x_n\right)$ *до* $p-$*го порядка,* $p > 0$*. Тогда найдутся* n *функций*

$$\varphi_i\left(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m\right),\ i = \overline{1, n}$$

имеющие непрерывные производные по $x_1, \dots x_n, y_1, \dots, y_n$ до $p-1$ го порядка, для которых справедливо равенство:

$$F\left(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m\right) - F\left(x_1, \dots, x_n z_1, \dots, z_m\right) = \\ = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i\left(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m\right)\left(y_i - x_i\right)$$

Доказательство. Верно равенство

$$F\left(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m\right) - F\left(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m\right) = \\ = \int\limits_0^1 \frac{dF\left(x_1 + t\left(y_1 - x_1\right), \dots, x_n + t\left(y_n - x_n\right), z_1, \dots, z_m\right)}{dt}$$

Это аналог $y(b) - y(a) = \int\limits_a^b \frac{dy}{dt} dt$. Обозначим $\xi_i = x_i + t\left(y_i - x_i\right)$, $i = \overline{1, n}$.

Тогда по правилу дифференцирования сложной функции получим, что:

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \xi_i}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \xi_i}\left(y_i - x_i\right)$$

$$\int\limits_0^1 \frac{dF\left(x_1 + t\left(y_1 - x_1\right), \dots, x_n + t\left(y_n - x_n\right), z_1, \dots, z_m\right)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^1 \frac{\partial F}{\partial \xi_i} dt\left(y_i - x_i\right)$$

Обозначим через $\varphi_i\left(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m\right) = \int\limits_0^1 \frac{\partial F}{\partial \xi_i} dt, \quad i = \overline{1, n}$

Осталось сказать, что функции φ_i удовлетворяют условиям леммы, то есть функции φ_i будут иметь непрерывные производные до $(p-1)$-го порядка по переменным $\left(x_1, \dots x_n\right), \left(y_1, \dots, y_n\right)$. $\square$

Рассмотрим дифференциальное уравнение $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f\left(x, y, \mu_1, \dots, \mu_n\right) \\ y\left(x_0\right) = y_0 \end{cases}$. Пусть $\overline{G_{xy}} \subset \mathbb{R}^2$ — некоторая замкнутая область пространства $\mathbb{R}^2$ переменных (x, y).

$$G\left\{\left(x, y, \mu_1, \dots, \mu_n\right) \middle| \left(x, y\right) \in \overline{G_{xy}},\ \left|\mu_i\right| < \mu_i^{(0)}\right\},\ \mu_i^{(0)} > 0,\ i = \overline{1, n}$$

Теорема (О непрерывной зависимости и дифференцируемости по параметрам). *1.* (О непрерывности) *Если функция $f\left(x, y, \mu_1, \dots, \mu_n\right)$ непрерывна в $\overline{G}$ по совокупности всех своих аргументов, ограничена, и удовлетворяет в этой области $\overline{G}$ условию Липшица по y, то есть*

$$\left|f\left(x, y_2, \mu_1, \dots, \mu_n\right) - f\left(x, y_1, \mu_1, \dots, \mu_n\right)\right| \leq K\left|y_2 - y_1\right|$$

где K не зависит от x, y, μ_i, $iu = \overline{1, n}$. То для любой точки (x_0, y_0), лежащей внутри $\overline{G_{xy}}$ найдется отрезок $[a; b]$, содержащий x_0 внутри, на котором существует решение задачи Коши (1), непрерывное по совокупности переменных $\left(x, \mu_1, \dots, \mu_n\right)$.

2. (Дифференцируемости) *Если f и её производные до p-го порядка по y и всем μ_i внутри $\overline{G}$ непрерывны по совокупности аргументов $(x, y, \mu_1, \ldots, \mu_n)$ и ограничены, то решение $y\left(x, \mu_1, \ldots, \mu_n\right)$ имеет по параметрам μ_i непрерывные по совокупности переменных производные так-же до p-го порядка, когда $x \in [a; b]$, а $|\mu_i| < \mu_i^{(0)}$. Где $[a; b]$ — орезок из пункта 1.*

Доказательство.

1.

Будем рассматривать при $n = 1$.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f\left(x, y, \mu\right) \\ y\left(x_0\right) = y_0 \end{cases} \tag{3.36}$$

Тогда построим последовательность функций:

$$\varphi_1\left(x, \mu\right) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\left(\xi, \varphi_0\left(\xi\right), \mu\right) d\xi$$

$$\ldots$$

$$\varphi_{k+1}\left(x, \mu\right) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\left(\xi, \varphi_k\left(\xi\right), \mu\right) d\xi$$

Где $\varphi_0\left(\xi\right)$ — произвольная непрерывная функция на отрезке $[a; b]$.

Потом все делаем методом последовательных приближений.

А тогда по теореме о существовании и единственности Пикара у задачи Коши будет существовать решение на отрезке $[a, b]$. Вот это отрезок $[a; b]$ возьмем для дальнейших рассмотрений. У нас по условию ограничено, тогда найдется M, такая что $|f\left(x, y, \mu\right)| \leq M$. Ну а тогда точно также рассматриваем ряд

$$\varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + \ldots + (\varphi_{k+1} - \varphi_k) + \ldots$$

и получаем оценку

$$|\varphi_{k+1} - \varphi_k| \leq \frac{2CK^{k-1}x^{k-1}}{(k-1)!}$$

Эта оценка равномерная по μ. Следовательно соответствующий ряд будет сходиться равномерно по x и μ, а тогда предельная функция $\varphi\left(x, \mu\right)$ непрерывна по совокупности аргументов.

2.

Рассмотрим $\varphi\left(x, \mu\right)$ при некотором μ.

Пусть $p = 1$, тогда мы зафиксируемμ , $x \in [a; b]$ Тогда рассмотрим решение $\varphi\left(x, \mu + \Delta\mu\right)$.

$$\frac{d\varphi\left(x,\mu+\Delta\mu\right)}{dx}=f\left(x,\varphi\left(x,\mu+\Delta\mu\right),\mu+\Delta\mu\right)\qquad\varphi\left(x_0,\mu+\Delta\mu\right)=y_0$$
$$\frac{d\varphi\left(x,\mu\right)}{dx}=f\left(x,\varphi\left(x,\mu\right),\mu\right)\qquad\varphi\left(x_0,\mu\right)=y_0$$

Вычтем их верхнего равенства нижнее, тогда мы можем записать:

$$\frac{d\left(\varphi\left(x,\mu+\Delta\mu\right)-\varphi\left(x,\mu\right)\right)}{dx}=f\left(x,\varphi\left(x,\mu+\Delta\mu\right),\mu+\Delta\mu\right)-f\left(x,\varphi\left(x,\mu\right),\mu\right)$$
$$\varphi\left(x,\mu+\Delta\mu\right)-\varphi\left(x,\mu\right)=0$$
$$\Delta\varphi=\varphi\left(x,\mu+\Delta\mu\right)-\varphi\left(x,\mu\right)$$

Применим к правой части равенства лемму Адамара, получим:

$$\frac{d\varphi}{dx}=\Delta\varphi\cdot\Phi_1+\Delta\mu\cdot\Phi_2$$

$\Delta\varphi\left(x_0\right)=0$

$$\Phi_1\left(x,\varphi\left(x,\mu+\Delta\mu\right),\varphi\left(x,\mu\right),\mu+\Delta\mu,\mu\right)=\int\limits_0^1\frac{\partial f\left(x,\varphi\left(x,\mu\right)+t\Delta\mu\right)}{\partial\left(\varphi\left(x,\mu\right)+t\Delta\varphi\right)}dt$$
$$\Phi_2\left(x,\varphi\left(x,\mu+\Delta\mu\right),\varphi\left(x,\mu\right),\mu+\Delta\mu,\mu\right)=\int\limits_0^1\frac{\partial f\left(x,\varphi\left(x,\mu\right)+t\Delta\mu,\mu+t\Delta\mu\right)}{\partial\left(\mu+t\Delta\mu\right)}dt$$

В силу леммы Адамара эти функции непрерывны по совокупности своих переменных.

В силу пункта 1-го доказываемой теоремы, функция $\varphi\left(x,\mu\right)$ непрерывна по x и μ, следовательно функция $\varphi\left(x,\mu+\Delta\mu\right)$ будет непрерывна по x и $(\mu+\Delta\mu)$, когда $\Delta\mu$ достаточно мало, а тогда функции Φ_1 и Φ_2 непрерывны по x и $\Delta\mu$ как суперпозиция непрерывных функций.

Разделим $\dfrac{d\varphi}{dx}=\Delta\varphi\cdot\Phi_1+\Delta\mu\cdot\Phi_2$ на $\Delta\mu$, получим:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}\right)=\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}\Phi_1+\Phi_2\\ \dfrac{\Delta\varphi\left(x_0\right)}{\Delta\mu}=\dfrac{\varphi\left(x_0,\mu+\Delta\mu\right)-\varphi\left(x_0,\mu\right)}{\Delta\mu}=\dfrac{y_0-y_0}{\Delta\mu}=0\end{cases}\tag{3.37}$$

$\Delta\mu\neq0$

А $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}$ при $\Delta\mu=0$ определим как решение следующей задачи Коши.

Теперь $\Phi_1\left(x,\Delta\mu\right)$ и $\Phi_2\left(x,\Delta\mu\right)$ зависят от таких переменных, то есть получим что–то типа этого:

$$\begin{cases}\dfrac{d\psi\left(x,\Delta\mu\right)}{dx}=\psi\left(x,\Delta\mu\right)\Phi_1+\Phi_2\\ \psi\left(x,\Delta\mu\right)=0\end{cases}$$

Условия пункта 1-го выполнены для этой задачи Коши.

Следовательно, $\psi\left(x, \Delta\mu\right)$ (то есть $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}$) — непрерывна по x и $\Delta\mu$, когда $x \in [a; b]$ и $|\Delta\mu| < \delta$. Но так как она непрерывна, она определена и при $\Delta\mu = 0$.

Теперь и положим:

$$\lim_{\Delta\mu \longrightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu} = \frac{\partial\varphi\left(x, \mu\right)}{\partial\mu}$$

То есть φ дифференцируема по μ в точке μ.

Заметим, что при $\Delta\mu \longrightarrow 0$: $\Delta\varphi \longrightarrow 0$

$\Phi_1\left(x, \Delta\mu\right) \overset{\Delta\mu \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \dfrac{\partial f}{\partial\varphi}$

$\Phi_2\left(x, \Delta\mu\right) \overset{\Delta\mu \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \dfrac{\partial f}{\partial\mu}$

Тогда в (5) переходя к пределу при $\Delta\mu \longrightarrow 0$, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d\varphi}{d\mu}\right) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\mu} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial\varphi} + \dfrac{\partial f}{\partial\mu} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\mu}\left(x_0\right) = 0 \end{cases} \tag{3.38}$$

То есть мы доказали существование производной, и $\dfrac{\partial\varphi\left(x, \mu\right)}{\partial\mu}$ является решением задачи (6). Заметим, что для дифференциального уравнения выполнены условия пункта 1-го доказываемой теоремы.

То есть теорема доказана, при $p = 1$. Если теперь функция f имеет непрерывные производные по y и μ до $p-$го порядка, $p \geq 2$, то применяя к уравнению (6) те же рассуждения, что и для уравнения (1) и взяв в качестве $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\mu}$ вместо φ докажем существование $\dfrac{\partial^2\varphi}{d\mu^2}$ и непрерывность ее по x и μ. И так далее для остальных p. Теорема доказана.

□

Следствие.

Рассмотрим:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f\left(x, y\right) \\ y\left(x_0 = y_0\right) \end{cases} \tag{3.39}$$

И еще рассмотрим функцию $y\left(x, x_0, y_0\right)$.

Если функция $f\left(x, y\right)$ имеет по x и y непрерывные производные до p-го порядка, то функция $y\left(x, x_0, y_0\right)$, являющаяся решением задачи (7) имеет непрерывные производные по x_0 и y_0 так же до p-го порядка, $p \geq 1$.

...

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = f\left(t + x_0, z + y_0\right) \\ z\left(0\right) = 0 \end{cases}$$

$z\left(t, x_0, y_0\right)$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial y}{\partial y_0}\right) = \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial y_0} \\ \dfrac{\partial y}{\partial y_0}\left(x_0\right) = 1 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y}{\partial x_0}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_0}$$

Для того чтобы получить начальные условия для этого уравнения нужно задачу (7) заменить эквивалентным интегральным уравнением и продифференцируем это равенство по x_0:

$$y\left(x, x_0, y_0\right) = y_0 + f\left(\xi, y\left(\xi, x_0, y_0\right)\right) d\xi$$

$$V\left(x\right) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} U\left(\xi, x\right) d\xi$$

Если функции U, φ_1, φ_2 дифференцируемы по x то и V также дифференцируема по x, и

$$\frac{dV}{dx} = U\left(\varphi_2\left(x\right), x\right) \cdot \frac{d\varphi_2}{dx} - U\left(\varphi_1\left(x\right), x\right)\frac{d\varphi_2}{dx} + \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{dU\left(\xi, x\right)}{dx} d\xi$$

$$\frac{\partial y\left(x, x_0, y_0\right)}{\partial x_0} = -f\left(x_0, y\left(x_0, x_0, y_0\right)\right) + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_0} d\xi$$

$\dfrac{\partial y}{\partial x_0}\left(x_0\right) = -f\left(x_0, y_0\right)$ — это начальное условие для нашего дифференциального уравнения.

3.11 Системы с постоянными коэффициентами

Мы будем рассматрипвать сейчас системы вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ \ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

$a_{i,j} = const, \quad i, j = \overline{1, n}$

$$y\left(x\right) = \begin{pmatrix} y_1\left(x\right) \\ \vdots \\ y_n\left(x\right) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\frac{dy}{dx} = A \cdot y \tag{3.40}$$

Определение. λ называется собственным значением матрици A если существует вектор $h \neq 0$, такой что $Ah = \lambda h$. Тогда h называется собственным вектором, соотвествующим собственному значению λ.

$(A - \lambda E)\, h = 0$ — однородная система.

Чтобюы она имела ненулевое решение, нужно чтобы матрица была вырожденной, тоесть когда определитель равен нулю. Это так называетмое (характеристическое) уравнение для нахождения собмственных значений матрици А. (Уравнение n-го порядка по λ) Ну а тогда в силу основной теормы алгебры в поле комплексных чисел это уравннения имеет n корней с учетом их кратности.

Одному собственному значению соответствиует бесконечно много собственных векторов. ПОжэтому всегда ведуд речь о линейно независимых собственных векторах. Если собственное значение простое, то ему соотвествует один вобственный вектор (с учетом их линейности).

Собственные вектора, соответствующие различным собственным значениям так-же линейно независимы, а если собственное значениме λ кратности k, то ему может соответствовать от 1го до k линейно независимых собственных векторов.

Определение. Матрица $\underset{n\times n}{A}$ называется матрицей простой структуры, если у нее есть n линейно независимых собственных векторов. (мы можем выбрать безис из линейно независимых собственных векторов).

Теорема (О представления общего решения системы с матрице простой структуры)**.** *Пусть матрица* $\underset{n\times n}{A}$ *системы (3.40) — матрица простой структуры, а* $h^{(1)}, \dots, h^{(n)}$ *— линейно независимые собственные вектора матрици* $\underset{n\times n}{A}$*, соотвесттвующие собственным значениям* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$*. Обозначим через* $y^{(k)}(x) = h^{(k)} e^{\lambda_k x}$*,* $k = \overline{1,n}$*, тогда венктор функция*

$$y(x) = c_1 y^{(1)} + \ldots + c_n y^{(n)} \tag{3.41}$$

где $c_1, \dots, c_n$ *— постоянные, является решением системы (3.40) и любое решение системы (3.40) представимо в виде (3.41).*

Доказательство. Пусть λ — какое-то собственное значение матрици $\underset{n\times n}{A}$, а h — соответствующий собственный вектор. Покажем, что $y(x) = he^{\lambda x}$ будет рещщением системы (3.40).

Подставим:

$$\frac{dy}{dx} - Ay = h\lambda e^{\lambda x} - Ahe^{\lambda x} = h\lambda e^{\lambda x} - \lambda h e^{\lambda x} = 0$$

Тогда вектор функции $y^{(k)}(x) = h^{(k)} e^{\lambda k}$, $k = \overline{1,n}$ ьудут решением системы (3.40) и по *Теореме 1 (О свойствах решений линейных однородных систем)* вектор-функция (3.41) будет решением системы (3.40).

Докажем что любое решение можно так представить.

Пусть вектор-функция $\varphi(x)$ — какое-то решение системы (3.40). Можем считать, что оно определено для всех $x \in (-\infty; +\infty)$, в часности, определено и в точке $\varphi(0)$.

Так как собственные вектора $h^{(1)}, \ldots, h^{(n)}$ линейно не зависимы, то они образуют базис в n-мерном пространстве. Разложим ветор $\varphi(0)$ по этому базису, получим:

$\varphi(0) = c_1 h^{(1)} + \ldots + c_n h^{(n)}$

С помощью постоянных $c_1, \ldots, c_n$ построим вектор функцию $y(x) = c_1 y^{(1)}(x) + \ldots + c_n y^{(n)}(x)$. ПО той-же *Теореме 1* эта функция будет решением системы (3.40).

Заметим, что $y^{(k)}(0) = h^{(k)},\ k = \overline{1, n}$

тогда $y(0) = c_1 h^{(1)} + \ldots + c_n h^{(n)} = \varphi(0)$.

Тоесть имеется 2 решения системы (3.40) : $\varphi(x)$ и $y(x)$, удовлетворяющие одномуц и тому-же началльномц условию, а тогда в силу *теоремы существования и единственности для линейных систем*, получим, что они совподают тождественно.

$\varphi(x) \equiv y(x)$ ☐

Пусть матрица $\underset{n\times n}{A}$ — вещественная простой структуры. В общем случае могут быть как вещественные, так и комплексные собстыенные числа.

Тогда выберем собственные вектора $h^{(1)}, \ldots, h^{(n)}$ так, чтобы вектора соответствущие вещественным собственным значениям были вещественные, а вектора, соответствующие комплексно-сопряженным собственным значениям были бы комплексно-сопряженными.

Тогда получим„ что решения $y^{(k)}(x),\ k = \overline{1, n}$ соответствующие веществтвенным вещественным собственным значениям будут вещественными, а решения соответствующие комплексно-сопряженным собственным значениям будут комплексно-сопряженными.

Утверждение (О вещественности общего решения матрици простой структуры)*.* Решения вида (3.41) системы (3.40) будет вещественным тогда и только тогда, когда постоянные $c_1, \ldots, c_n$, стоящие при вещественных решениях$y^{(k)}(x),\ k = \overline{1, n}$ вещественные, а постоянные, стоящие при комплексно сопрященных комплексно сопряженные.

Доказательство. Пусть

$\overline{y^{(1)}}(x) = y^{(2)}(x), \ldots, \overline{y^{(2l-1)}}(x) = y^{(2l)}(x)$ (комплексные)

и $\overline{y^{(2l+1)}}(x) = y^{(2l+1)}(x), \ldots, \overline{y^{(n)}}(x) = y^{(n)}(x)$ (вещественные).

Тогда запишем решения вида (3.41):

$$y(x) = c_1 y^{(1)}(x) + c_2 y^{(2)}(x) + \ldots + c_{2l-1} y^{(2l-1)} + c_{2l} y^{(2l)}(x) + \ldots + c_n y^{(n)}(x) \qquad (3.42)$$

Где $c_1, \ldots, c_n$ — некоторые постоянные.

Тогда в силу (m3):

$$\overline{y}(x) = \overline{c_1} y^{(2)}(x) + \overline{c_2} y^{(1)} + \ldots + \overline{c_{2l-1}} y^{(2l)}(x) + \overline{c_{2l}} y^{(2l-1)}(x) + \overline{c_{2l+1}} y^{(2l+1)} + \ldots + \overline{c_n} y^{(n)}(x) \quad (3.43)$$

Если теперь константы, стоящие при комплексно-сопряженных решениях – комплексно-сопрященные, а при вещественны — вещественные (Тоесть $\overline{c_1} = c_2, \ldots, \overline{c_{2l-1}} = c_{2l}$ и $\overline{c_{2l+1}} = c_{2l+1}, \ldots, \overline{c_n} = c_n$) то мы получим, что $\overline{y}(x) = y(x)$.

А от сюда и следует, что $y(x)$ — вешественная.

Обратно:

Пусть решения $y(x)$ вида (3.42) — вещественное. Тогда $\overline{y}(x) = y(x)$. И вычитая из (3.42) (3.43) получим:

$$\begin{aligned} 0 &\equiv (c_1 - \overline{c_2})\, y^{(1)}(x) + (c_2 - \overline{c_1})\, y^{(2)}(x) + \ldots + (c_{2l-1} - \overline{c_{2l}})\, y^{(2l-1)}(x) + (c_{2l} - \overline{c_{2l-1}})\, y^{(2l)}(x) + \\ &+ (c_{2l+1} - \overline{c_{2l+1}})\, y^{(2l+1)}(x) + \ldots + (c_n - \overline{c_n})\, y^{(n)}(x) \end{aligned}$$

Так как вектор-функции $y^{(1)}(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ линейно не зависимы (Следует из тоого, что определитель Вронского в точке 0 н6е равен нулю (столбцами его будут вектора $h^{(1)}, \ldots, h^{(n)}$)), то их линейная комбинация может быть равна нулю может быть только если все множители, стоящие перед ними равны нулю, следовательно верно (m6). $\square$

Из доказанного утверждения следует, что:
$(\alpha_1 + i\alpha_2)(u(x) - iv(x)) + (\alpha_1 - i\alpha_2)(u(x) - iv(x)) = 2\alpha_1 u(x) - 2\alpha_2 v$

Каждая из пар (Смотреть (3.43)) привратится в линейную комбинацию с произвольными постоянными вещественным и мниной части. Поэтому, чтобы построить общее вещественное решение в случае вещественной матрици $\underset{n\times n}{A}$ простой структуры нужно при каждом вещественном рещшении $y^{(k)}(x)$ поставить произвольную вещественную постояннную, а для каждой пары комплексно-сопряженных решений взять линейную комбинацию их вещественной и мнимой частей.

Таким обзазом для матриц простой структуры мы показали как найти решения. Теперь переходим к общему случаю.

Определение. Вектора $h^{(1)}, \ldots, h^{(k)}$ называют Жордановой цепочкой, соответствующею собственным значениям λ, если:

$$\begin{aligned} Ah^{(1)} &= \lambda h^{(1)} \\ Ah^{(2)} &= \lambda h^{(2)} + h^{(1)} \\ &\vdots \\ Ah^{(k)} &+ h^{(k-1)} \end{aligned}$$

Определение. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix}$ — Жордановый блок

Определение. Тогда любая квадратная матрица А может быть приведена к Жордановой форме, тоесть найдется невырожденная матрица T, такая что $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_S \end{pmatrix}$,гд

$J_1, \ldots, J_S$ — Дордановы блоки. $J_l = \begin{pmatrix} \lambda_l & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_l & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_l \end{pmatrix}$, $l = \overline{1, S}$.

k_1 — размер первого Жордановогог блока

$\left\{h^{(1)} \ldots h^{(k_1)}\right\}, \left\{k^{(k_1)} \ldots h^{(k_1+k_2)}\right\}, \ldots, \left\{h^{(k_1+k_2+\ldots+k_S+1)} \ldots h^{(n)}\right\}$ — базис на основе собственным и присоедененных векторов.

Пусть $h^{(1)},\dots,h^{(k)}$ — Жорданова цепочка, соотвенствующая собственному значению λ, тоесть выполнены $\begin{array}{c} Ah^{(1)} = \lambda h^{(1)} \\ Ah^{(2)} = \lambda h^{(2)} + h^{(1)} \\ \vdots \\ Ah^{(k)} + h^{(k-1)} \end{array}$.

Построим вектор-функции $\omega^{(1)}\left(x\right) = h^{(1)}$, $\omega^{(2)}\left(x\right) = xh^{(1)} + h^{(2)}$, $\omega^{(3)}\left(x\right) = \frac{x^2}{2}h^{(1)} + xh^{(2)} + h^{(3)}$, …, $\omega^{(r)}\left(x\right) = \frac{x^{r-1}}{(r-1)!}h^{(1)} + \frac{r^{r-2}}{(r-2)!}h^{(2)} + \ldots + xh^{(r-1)} + h^{(r)}$.

Вектор-функции (m7) обладают свойством:

$$\frac{d\omega\left(x\right)}{dx} = \omega^{(r-1)}\left(x\right) \tag{3.44}$$

$A\omega^{(r)}\left(x\right) = \lambda\omega^{(r)}\left(x\right) + \omega^{(r-1)}\left(x\right)$
$A\omega^{(1)}\left(x\right) = Ah^{(1)} = \lambda h^{(1)} = \lambda\omega^{(1)} = \omega^{(0)}$

$$\begin{array}{rcl} A\omega^{(r)}\left(x\right) & = & A\frac{x^{r-1}}{(r-1)!}h^{(1)} + A\frac{x^{r-2}}{(r-2)!}h^{(2)} + \ldots + Axh^{(r-1)} + Ah^{(2)} = \\ & = & \frac{x^{r-1}}{(r-1)!}\lambda h^{(1)} + \frac{x^{r-2}}{(r-2)!}\left(\lambda h^{(2)} + h^{(1)}\right) + \ldots + \\ & + & x\left(\lambda h^{(r-1)} + h^{(r-2)}\right) + \lambda h^{(r)} + h^{(r-1)} = \\ & = & \lambda\left(\frac{x^{r-1}}{(r-1)!}h^{(1)} + \ldots + xh^{(r-1)} + h^{(2)}\right) + \\ & + & \frac{x^{r-2}}{(r-2)!}h^{(1)} + \ldots + xh^{(r-2)} + h^{(r-1)} = \\ & = & \lambda\omega^{(r)}\left(x\right) + \omega^{(r-1)}\left(x\right),\ r = \overline{2,k} \end{array}$$

Построим вектр-функции

$$y^{(r)}\left(x\right) = \omega^{(r)}\left(x\right)e^{\lambda x}, r = \overline{1,k} \tag{3.45}$$

Вектор-функции (3.45) будут решением системы (3.40).

Подстави м в (1) и воспользуемся (8):

$$\begin{array}{rcl} \frac{dy^{(r)}\left(x\right)}{dx} - Ay^{(r)}\left(x\right) & = & \frac{d}{dx}\left(\omega^{(r)}\left(x\right)e^{\lambda x}\right) = \\ & = & \frac{d\omega^{(r)}\left(x\right)}{dx}e^{\lambda x} + \omega^{(r)}\left(x\right)\lambda e^{\lambda x} - \left(\lambda\omega^{(r)}\left(x\right) + \omega^{(r-1)}\left(x\right)\right)e^{\lambda x} = \\ & = & \omega^{(r-1)}\left(x\right)e^{\lambda x} + \omega^{(r)}\left(x\right)\lambda e^{\lambda x} - \lambda\omega^{(r)}\left(x\right)e^{\lambda x} - \omega^{(r-1)}\left(x\right)e^{\lambda x} = 0 \end{array}$$

Мы рассматриваем систему линейных неоднородных уравнений с постоянными коофициентами.

$$\frac{dy}{dx} = Ay + f\left(x\right) \tag{3.46}$$

$A = (i, j)\,,\ a_{i,j} = const,\ i.j = \overline{1, n}$

Для линейной системы справедлив принцип суперпозиции:

$f\left(x\right) = \sum\limits_{k=1}^{m} f^{(k)}\left(x\right)$

$y^{(k)}\left(x\right)$

$\dfrac{dy^{(k)}}{dx} Ay^{(k)} = A^{(k)} + f^{(k)}$

$y\left(x\right) = \sum\limits_{k=1}^{m} f^{(k)}\left(x\right)$

Всвязи с этим свойством, будем рассматривать $f\left(x\right) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} x^{\beta} e^{\alpha x}$.

Пусть $f\left(x\right)$ имеет вод такой вид (Пока что $a_{i,j}$ и комплексные и вещественные): $c_1, \ldots, c_n, \alpha$ — вещественные или комплексные постоянные, β — целое, неотрицательное.

В системе (jj1) Сделаем замену переменых:

$$z = Ty \tag{3.47}$$

Где T — невырожденная матрица, такая что матрица $B = TAT^{-1}$имеет Жорданову форму матрици A.

$$\frac{dz}{dx} = Bz + g\left(x\right) \tag{3.48}$$

$g\left(x\right) = T \cdot f = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} x^{\beta} e^{\alpha x}$, где $d_1, \ldots, d_n$ — новые постоянные.

Матрица системы (jj3) имеет Жорданову форму (Она будет блочная, где каждый блок — Жорданова клетка). ЗАчем мы все это делаем? Благодаря виду матрицы B, в группе первого блока неизвестными будут только лишь P_1 непеменых (P_1 — размерность Жордановой клетки), для группы второго блока так-же... Так что рассматриваем их не все вместе, а делим на группы. Та что мы упростили решение.

Наша задачиа определить, какого вида вод эта система (jj1) будет иметь часное решение. Оказывается, что когда правая часть системы (jj1) имеет вод такой вод вид, можно увидить структуру часного решения. Так что мы не только упростили, но и увидели структуру часного решения. Вод цель этого действа.

СИстема (jj3) распадается на группы уравнений, соответствующим Жордановым блокам матрицы B. Рассмотрим группу уравнений, соответствующих какому-то Жордановому блоку матрицы B. Эта группа уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dz_{k+1}}{dx} = \lambda_s z_{k+1} + z_{k+2} + d_{k+1} x^{\beta} e^{\alpha x} \\ \dfrac{dz_{k+2}}{dx} = \lambda_s z_{k+2} + z_{k+3} + d_{k+2} x^{\beta} e^{\alpha x} \\ \vdots \\ \dfrac{dz_{k+p_s}}{dx} = \lambda_s z_{k+p_s} + d_{k+p_s} x^{\beta} e^{\alpha x} \end{cases}$$

Сделаем замену переменных:

$$z_{k+i} = U_{k+i} e^{\lambda_s x},\ i = \overline{1, p_s} \tag{3.49}$$

Теперь делаем эту замену переменных в (jj4).

$$\begin{cases} \dfrac{dU_{k+1}}{dx}e^{\lambda_s x} + U_{k+1}\lambda_s e^{\lambda_S x} = \lambda_s U_{k+1}e^{\lambda_s x} + U_{k+2}e^{\lambda_s x} + d_{k+1}x^\beta e^{\alpha x} \\ \dfrac{dU_{k+2}}{dx}e^{\lambda_s x} + U_{k+2}\lambda_s e^{\lambda_S x} = \lambda_s U_{k+2}e^{\lambda_s x} + U_{k+3}e^{\lambda_s x} + d_{k+2}x^\beta e^{\alpha x} \\ \vdots \\ \dfrac{dU_{k+p_s}}{dx}e^{\lambda_s x} + U_{k+p_s}\lambda_s e^{\lambda_S x} = \lambda_s U_{k+p_s}e^{\lambda_s x} + d_{k+p_s}x^\beta e^{\alpha x} \end{cases}$$

Земечаем: что есть одинаковое слогаемое.

$$\begin{cases} \dfrac{dU_{k+1}}{dx}e^{\lambda_s x} = U_{k+2}e^{\lambda_s x} + d_{k+1}x^\beta e^{\alpha x} \\ \dfrac{dU_{k+2}}{dx}e^{\lambda_s x} = U_{k+3}e^{\lambda_s x} + d_{k+2}x^\beta e^{\alpha x} \\ \vdots \\ \dfrac{dU_{k+p_s}}{dx}e^{\lambda_s x} = d_{k+p_s}x^\beta e^{\alpha x} \end{cases}$$

Каждое уравнение разделим на $e^{\lambda_S x}$.

$$\begin{cases} \dfrac{dU_{k+1}}{dx} = U_{k+2} + d_{k+1}x^\beta e^{(\alpha-\lambda_s)x} \\ \dfrac{dU_{k+2}}{dx} = U_{k+3} + d_{k+2}x^\beta e^{(\alpha-\lambda_s)x} \\ \vdots \\ \dfrac{dU_{k+p_s}}{dx} = d_{k+p_s}x^\beta e^{(\alpha-\lambda_s)x} \end{cases} \tag{3.50}$$

Рассмотрим 2 случая:

1. Когда α не соплодает с λ_s. (Не резонансный)

   Пусть α не ровняется λ_s, тогда заметим, что в системе (jj6) в последнем уравнении нету неизвестных функцй. Тогда просто будем интеграл от правой части. Будем это вычислять методом интегрирования по частям (β раз). Отсюда вытекает, что:

   $$U_{k+i}(x) = P_i^{(\beta)}(x)\, e^{(\alpha-\lambda_s)x} \quad i = \overline{1, P_s}$$

   Где $P_i^{(\beta)}(x)$ — многочлены степени не выше β.

   $$Z_{k+i}(x) = P_i^{(\beta)}(x)\, e^{\alpha x}$$

2. Когда α совподает с λ_s.

Если и в остальных группах уравнений системы 3 α не будет совпадать ни с одним собственным значением, то все ..... Тогда $y = T^{-1}Z$ и

$$y_i(x) = Q_i^{(\beta)}(x)\, e^{\alpha x} \quad i = \overline{1, n}$$

Мы показали, что если α не совпадает ..... степени не выше β.

Чтобы найти частные решения системы 1, (7) подставляем в (1), сокращаем на $e^{\alpha x}$, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x и получаем систему линейных алгебраических уравнений на коэфиициенты многочленов $Q_i^{(\beta)}(x)$.

Случай 2 — резонансный.

Пусть в (6) $\alpha = \lambda_s$, тогда система 6 примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{du_{k+1}}{dx} = u_{k+2} d_{k+1} x^{\beta} \\ \dfrac{du_{k+2}}{dx} = u_{k+3} d_{k+2} x^{\beta} \\ \dots \\ \dfrac{du_{k+p_s}}{dx} = d_{k+p_s} x^{\beta} \end{cases} \tag{3.51}$$

Тогда решение (8) будет иметь вид:

$$u_{k+j} = P_{k+j}^{(p_s+1-j)}(x)\, x^{\beta} \quad j = \overline{1, p_s}$$

Сделаем замену (5):

$$z_{k+j}(x) = P_{k+j}^{(p_s+1-j)}(x)\, x^{\beta} e^{\alpha x} \quad j = \overline{1, p_s}$$

Для остальных групп уравнений системы 3, для которых $\lambda_s \neq \alpha$ решения будут иметь вид .... Тогда $y = T^{-1}Z$ будет иметь вид:

$$y_i(x) = Q_i^{(p+\beta)}(x)\, e^{\alpha x} \quad i = ...$$

Где P — длина наибольшего Жорданового блока, соответствующего собственному значению $\lambda = \alpha$.

Вещественный случай:

Пусть матрица системы (1) — вещественная. А

$$f(x) = e^{\alpha x} x^{\beta} \left(c^{(1)} \cos \gamma x + c^{(2)} \sin \gamma x\right) \tag{3.52}$$

где $c^{(1)}$ и $c^{(2)}$ — вектора с постоянными вещественными коэффициентами.

.... Для этого преобразуем:

$$f = e^{\alpha x} x^{\beta} \left(c^{(1)} \frac{e^{i\gamma x} + e^{-i\gamma x}}{2} - ic^{(2)} \frac{e^{i\gamma x} - e^{-i\gamma x}}{2}\right) = e^{\alpha x} x^{\beta} \left(e^{i\gamma x} \frac{c^{(1)} - ic^{(2)}}{2} + e^{-i\gamma x} \frac{c^{(1)} + ic^{(2)}}{2}\right) =$$

$$= x^{\beta} e^{(\alpha + i\gamma)x} \frac{c^{(1)} - ic^{(2)}}{2} + x^{\beta} e^{(\alpha - i\gamma)x} \frac{c^{(1)} + ic^{(2)}}{2}$$

.... представлена в виде двух комплексно сопряженных слагаемых. Заметим, что если матрица A в системе 1 — вещественная и $y(x)$ — решение системы 1, то $\overline{y}(x)$ будет решением системы 1 с комплексно сопряженной $\overline{f}(x)$. Если $y^{(1)}(x)$ будет решением .... то y ... тоесть частное решение системы 1 с $f(x)$ (9) существует в виде:

$$y(x) = e^{(\alpha + i\gamma)x} \frac{Q^{(\beta+p)}(x) - iR^{(\beta+p)}(x)}{2} + e^{(\alpha - i\gamma)x} \frac{Q^{(\beta+p)}(x) + iR^{(\beta+p)}(x)}{2}$$

Преобразуем эту сумму:

$$= e^{\alpha x}\left(\cos\gamma x + i\sin\gamma x\right)\frac{Q^{(\beta+p)}(x) - iR^{(\beta+p)}(x)}{2} + e^{\alpha x}\left(\cos\gamma x - i\sin\gamma x\right)\frac{Q^{(\beta+p)}(x) + iR^{(\beta+p)}(x)}{2} =$$

$$= e^{\alpha x}\left(Q^{(\beta+p)}(x)\cos\gamma x + R^{(\beta+p)}(x)\sin\gamma x\right)$$

Где $Q^{(\beta+p)}(x)$ — вектор-функции, компонентами которых являются многочлены с вещественными коэффициентами степени $(\beta + p)$. $p = 0$ если $\alpha + i\gamma$ не является собственнным значением матрицы A и если $\alpha + i\gamma$ является собственным значением, то p равно длине наибольшей Жордановой цепочки соответствующей собственному значению $\alpha + i\gamma$.

4 Сессия

Будет 2 задачи и 1н теоритический вопрос.

По минимальному (на 3) знать формурировки (без доказательств) и решить 1ну задачу.

Если не решил не 1й задачи то 2 сразу.

Нада знать определение фундаментальной системы решений ОБЯЗАТЕЛЬНО. Он расстроится и поставит лебедя.

1. Нету ограничений на количество задолжностей.
2. Разрешается по каждому предмету не более 2х пересдач
3. Отчислений по окончанию зимней сессии не будет
4. В течении 4х недель после сессии будут пересдачи(одна преподавателю, а другая комиссии).
5. После этого если у кого нить есть одна задолжность, то он подлежит отчислению, или если он нее сдал комиссию.