Комплексный анализ

Книжки:

1. Тихонов, Свешников - “Теории функция комплексной переменной”
2. Леврентьев, Шабат - “Методы теории функций комплексной переменной”
3. Шабат - “Комплексный анализ”, Том 1.
4. Маркушевич, несколько книжек - “Теория аналитиических функций”, “Теории функция комплексной переменной”
5. Привалов “Теория функций комплексной переменной”
6. Ферарюк, Сидоров

Задачники:

1. Волковызский, Лунц - “Сборник задач по теории функций”
2. Евграхов - “По теориии аналитических функций”

1 Интегралы, зависящие от параметра

Рис. 1: Панда

1.1 Постановка задачи

Ссылка на задачник — Кудрявцев второй том.

Пусть функция $f(x,y)$ определена на множестве $[a;b]\times Y$, $(x\in[a;b]\,,\,y\in Y)$. При этом, $\forall y\in Y\ \exists \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$. Промежуток$[a;b]$ или интервал $(a;b)$ конечен или бесконечен. При этом на Y определена функция:

$$\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$$

называемая интегралом, зависящим от параметра y.

Если при этом функция $f(x,y)$, интегрируема в собственном смысле, на интервале $[a;b]$ $\forall y\in Y$, то $\Phi(y)$ называется собственным интегралом, зависящим от параметра.

Если $\exists y\in Y$, такой что $f(x,y)$ интегрируема на $[a;b]$ в несобственном смысле, то $\Phi(y)$ называется несобственным интегралом, зависящим от параметра.

Замечание. В частности, если $Y=\mathbb{N}$, то $f(x,y)=f(x,n)=\varphi_n(x)$, и мы получаем, что $\{\varphi_n(x)\}$ — функциональная последовательность, определенная на отрезке $[a;b]$. Тогда

$$\Phi(y)=\Phi(n)=\int\limits_a^b \varphi_n(x)\,dx \text{ — числовая последовательность}$$

В дальнейшем будем рассматривать следующие вопросы:

1. Является ли функции $\Phi(y)$ непрерывны на множестве Y.
2. Можно ли переходить к пределу $\left(\lim\limits_{y\to y_0}\right)$ под знаком интеграла.
3. Можно ли дифференцировать функцию $\Phi(y)$
4. Можно ли интегрировать функцию $\Phi(y)$ по Y

1.2 Равномерная сходимость к предельной функции

Пусть функция $f(x,y)$ определена на $[a;b]\times[c;d]$. В общем случае $y\in Y$ — некоторое множество на $\mathbb{R}$.

Определение. Точка y_0 называется точкой сгущения (конденсации) множества Y, если в любой её выколотой окрестности можно указать точку $y\in Y$, т. е.

$$\forall\delta>0\ \exists y\in Y\cap U_\delta(y_0)$$

Пусть $\forall x\in[a;b]\ \ \exists\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\overset{def}{=}\varphi(x)$, то есть

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(x,\varepsilon)>0\ \forall y\in Y\quad 0<|y-y_0|<\delta\implies|f(x,y)-\varphi(x)|<\varepsilon$$

Эта сходимость называется поточечной сходимостью $f(x,y)$ к функции $\varphi(x)$ при $y\to y_0$ на отрезке $[a;b]$. Сходимость функции $f(x,y)$ к функции $\varphi(x)$ будет равномерной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in [a;b] \quad \forall y \in Y \quad 0 < |y - y_0| < \delta \Rightarrow \Rightarrow |f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon \quad (1.1)$$

Записывается: $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ на $[a;b]$ при $y \to y_0$.

Определение (Равномерная сходимость по Гейне)**.** $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ при $y \to y_0$ на $[a;b]$, если $\forall \{y_n\} \in Y,\ (y_n \neq y_0)$ из сходимости $y_n \to y_0 \implies f(x,y_n) \rightrightarrows \varphi(x)$ на $[a;b]$, иначе:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ \ \forall x \in [a;b]\ \ \forall n \geq N\ \ |f(x,y_n) - \varphi(x)| < \varepsilon \qquad (1.2)$$

Теорема. *Определения (1.1) и (1.2) эквивалентны.*

Доказательство. Самостоятельно, но на экзамене этого доказательства не будет. □

Лемма. *$f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ на отрезке $[a;b]$ при $y \to y_0$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall y \in Y \quad 0 < |y - y_0| < \delta \implies \sup_{x \in [a;b]} |f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon \quad (1.3)$$

Запишем (1.3) иначе:

$$\lim_{y \to y_0} \left(\sup_{x \in [a;b]} |f(x,y) - \varphi(x)| \right) = 0 \qquad (1.4)$$

Лемма. *Если функция $f(x,y)$ непрерывна на $K = [a;b] \times [c;d]$, то*

$$\forall y_0 \in [c;d] \quad f(x,y) \rightrightarrows f(x,y_0)$$

поточечно при $y \to y_0$.

Доказательство. Так как $f(x,y)$ — непрерывна на ограниченном замкнутом множестве K, то по теореме Кантора эта функция $f(x,y)$ равномерно непрерывна на K.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall M'(x',y'), M''(x'',y'') \quad \underbrace{(|x' - x''| < \delta \ \&\ |y' - y''| < \delta)}_{\rho(M',M'') < \delta} \Rightarrow \Rightarrow |f(x',y') - f(x'',y'')| < \varepsilon$$

Если положить $x' = x'' = x;\ y'' = y_0$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) \quad \forall x \in [a;b] \quad \forall y' \in [c,d] \quad |y - y_0| < \delta \implies |f(x,y') - f(x,y_0)| < \varepsilon$$

То есть $f(x,y) \rightrightarrows f(x,y_0)$. □

Теорема (Критерий Коши)**.** *Функция $f(x,y)$ сходится равномерно к функции $\varphi(x)$ на отрезке $[a;b]$ при $y \to y_0$, тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in [a;b] \quad \forall y', y'' \in Y \quad (0 < |y' - y_0| < \delta \ \&\ 0 < |y'' - y_0| < \delta) \quad \Rightarrow \quad |f(x,y') - f(x,y'')| < \varepsilon$$

Доказательство. ($\Longrightarrow$) Пусть $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ при $y \to y_0$ на $[a;b]$. Тогда по определению равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) \quad \forall x \in [a;b] \quad \begin{matrix} \forall y' \in Y \quad 0 < |y' - y_0| < \delta \quad |f(x,y') - \varphi(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ \forall y'' \in Y \quad 0 < |y'' - y_0| < \delta \quad |f(x,y'') - \varphi(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{matrix}$$

Следовательно:

$$|f(x,y') - f(x,y'')| = |(f(x,y') - \varphi(x)) - (f(x,y'') - \varphi(x))| \leq$$
$$\leq \underbrace{|f(x,y') - \varphi(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f(x,y'') - \varphi(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

($\Leftarrow$) Пусть в правой части Критерия:

$$|f(x,y') - f(x,y'')| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (*)$$

Зафиксируем произвольно $x \in [a;b] \Longrightarrow f(x,y)$ — функция одной переменной y и правая часть критерия Коши в этом случае:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) \quad \forall y', y'' \in Y \quad (0 < |y' - y_0| < \delta \ \& \ 0 < |y'' - y_0| < \delta) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f(x,y') - f(x,y'')| < \varepsilon$$

Критерий Коши существования предела функции в точке y_0:

$$\exists \lim_{y \to y_0} f(x,y) \overset{def}{=} \varphi(x)$$

Полагая $0 < |y' - y_0| < \delta$, а y'', находящейся в $U_\delta(y_0)$ устремим к y_0, то есть $y'' \to y_0$. Тогда предельным переходом в неравенстве (*):

$$|f(x,y') - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) \quad \forall x \in [a;b] \ \& \ \forall y' \in Y \quad 0\,|y' - y_0| < \delta \Longrightarrow |f(x,y') - \varphi(x)| < \varepsilon$$

Следовательно $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ на $[a;b]$ при $y \to y_0$. □

1.3 Собственные интегралы, зависящие от параметра.

$F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$

Теорема (О предельном переходе под знаком интеграла)**.** *Пусть*

1. $f(x,y)$ *интегрируема на* $[a,b]$ *по* x $\forall y \in Y$
2. $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ *на* $[a;b]$ *при* $y \to y_0$.

тогда $\lim\limits_{y\to y_0}\int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)dx = \int\limits_a^b \varphi(x)dx$

Доказательство. По определению $\rightrightarrows$ по Гейне:

$$\forall \left\{y_n\right\} \quad (y_n \neq y_0) \quad y_n \to y_0 \quad \Rightarrow \quad f\left(x, y_n\right) = \varphi_n\left(x\right) \rightrightarrows \varphi\left(x\right)$$

Тогда по свойству равномерной сходимости функциональной последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b \varphi_n\left(x\right)dx = \int\limits_a^b \lim_{n\to\infty}\varphi_n\left(x\right)dx = \int\limits_a^b \varphi\left(x\right)dx = \Phi_0$$

(Дописать).... $\square$

Пример. Покажем существенность условия 2:

$$\Phi\left(y\right) = \int\limits_0^1 \frac{2xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx, \quad y \in [0;1]$$

При $y \to 0$:

$$\forall x \in [0;1]: \quad \lim_{y\to 0} f\left(x,y\right) = \lim_{y\to 0}\frac{2xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

С другой стороны, на прямой $x = y$:

$$\lim_{y\to 0} f\left(x,y\right) = \lim_{y\to 0}\frac{2y^3}{4y^4} = +\infty \neq 0$$

Значит, равномерной сходимости нет.

(Дописать.......)

Пример.

$$\int\limits_0^1 yx\left(1-x\right)^y dx, \qquad \begin{matrix} y \in [0;+\infty) \\ y_0 = +\infty \end{matrix}$$

Вычислим

$$\lim_{y\to+\infty} yx\left(1-x\right)^y = \begin{cases} 0, & \begin{matrix} x = 0 \\ x = 1 \end{matrix} \\ 0, & 0 < x < 1 \end{cases} = 0$$

Следовательно $\varphi\left(x\right) \equiv 0$

$$\Phi\left(y\right) = y\int\limits_0^1 x\left(1-x\right)^y dx = \frac{y}{\left(y+1\right)\left(y+2\right)} \to 0$$

С другой стороны:

$$\int\limits_0^1 \lim_{y\to+\infty} yx\left(1-x\right)^y dx = \int\limits_0^1 0dx = 0$$

Т. е. $\lim\limits_{y\to+\infty} \Phi(y) = \Phi_\infty$ то есть предельный переход оправдан. Проверим раномерную сходимость:

$$\sup|f(x,\varphi)-0| = \max xy(1-x)^y = \left(\frac{y}{y+1}\right)^{y+1} \to e^{-1} = \frac{1}{e} \neq 0$$

То есть условие 2 является достаточным, но не необходимым.

Теорема (2)**.** *Если $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике $K = [a,b]\,x\,[x,d]$, то функция*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$$

непрерывна на $[c,d]$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $y_0 \in [c,d]$. Так как при $y \to y_0$ $f(x,y) \rightrightarrows f(x,y_0)$ (по Лемме из пред. пункта). Следовательно выполнено условие 2 Теоремы 1. Тогда применяя Теорему 1:

$$\exists \lim_{y\to y_0} \Phi(y) = \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x,y_0)\,dx = \Phi(y_0)$$

□

Теорема. *Если функция $f(x,y)$ и ее производная $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывна на $K = [a,b]\,x\,[c,d]$, то функция $\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ дифференцируема на $[c,d]$........*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $y_0 \in (c,d)$, h — приращение, $y_0+h \in (c,d)$. По определению производной:

$$\Phi(y_0) = \lim_{h\to0}\frac{\Phi(y_0+h)-\Phi(y_0)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int\limits_a^b \left(f(x,y_0+h)-f(x,y_0)\right)dx =$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int\limits_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x,y_0+\theta h)\cdot h dx = \int\limits_a^b \lim_{h\to0}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y_0+\theta h)\,dx = \int\limits_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x,y_0)\,dx$$

□

Теорема (Интегрирование под знаком $\int$)**.** *Если $f(x,y)$ непрерывна на $K = [a,b]\,x\,[c,d]$, то*

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\right)dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$$

Доказательство. Так как функция $f(x,y)$ непрерывна на K то существует двойной интеграл

$$\iint\limits_K f(x,y)\,dxdy............$$

□

1.4 Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость несобственных интегралов.

Ограничимся изучением несобственных интегралов по бесконечному промежутку. Пусть

$$\Phi(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx \tag{1.5}$$

и пусть $\forall y \in Y$ интеграл (1.5) сходится, то есть:

$$\forall y \in Y \quad \exists \lim_{A\to+\infty} \Phi(y,A) = \int_a^A f(x,y)\,dx \tag{1.6}$$

Аналогично предыдущему пункту ставится вопрос о равномерной сходимости:

$$\Phi(y,A) \overset{?}{\rightrightarrows} \Phi(y) \text{ на } Y$$

Определение. Несобственный интеграл (1.5) сходится равномерно на Y, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta = \Delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall y \in Y \quad \forall A > \Delta \quad \underbrace{\left|\int_A^\infty f(x,y)\,dx\right|}_{|\Phi(y)-\Phi(y,A)|} < \varepsilon$$

Определение. Несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ называется равномерно сходящимся на области Y если на любой бесконечно большой последовательности $\{A_k\}$, $A_1 = a$ соответствующий функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(y)$ сходится равномерно на Y.

Пример. Исследовать на равномерную сходимость следующий интеграл:

$$\Phi(y) = \int_0^\infty y \cdot e^{-xy} dx, \quad y > 0$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$\Phi(y,A) = \int_0^A y \cdot e^{-xy} dx$$

$$|\Phi(y) - \Phi(y,A)| = \int_A^\infty y \cdot e^{-xy} dx = -e^{-xy}\Big|_A^{+\infty} = -\left(e^{-y\cdot\infty} - e^{-Ay}\right) = e^{-Ay}$$

Рассмотрим 2 случая:

1. $0 < y_0 \leq y$

   $\sup\limits_{0<y_0<y} e^{-Ay} = e^{-Ay_0} \overset{A\to+\infty}{\to} 0$

   То есть на множестве $Y' = [y_0; +\infty)$ наш интеграл как функция от y сходится равномерно.

2. $Y = (0; +\infty)$

   $\sup\limits_{(0;+\infty)} e^{-Ay} = 1 \overset{A\to+\infty}{\to} 1 \neq 0$

   То есть равномерная сходимость не получается. Сходимость будет, но не равномерная.

Сформулируем некоторые достаточные условия равномерной сходимости:

Теорема (Признак Вейерштрасса (Мажоранта))**.** *Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема на отрезке от $[a;A]$ $\forall y \in Y$ $\forall A > a$ и удовлетворяет следующим условиям:*

1. $|f(x,y)| \leq \varphi(x)\,,\ x \geq a,\ y \in Y$
2. $\int\limits_a^\infty \varphi(x)\,dx < \infty$

Тогда интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx \rightrightarrows$ *на* Y*.*

Доказательство. Сводится к применению мажорантного признака сходимости функциональных рядов, с использованием представления:

$$\int\limits_a^\infty \varphi(x)\,dx = \sum_{k=1}^\infty \int\limits_{A_k}^{A_{k+1}} \varphi(x)\,dx = \sum_{k=1}^\infty a_k$$

□

Теорема (Признак Абеля)**.** *Пусть функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ таковы, что:*

1. *Интеграл* $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ *сходится равномерно на* Y
2. $g(x,y)$ *монотонная по* x $\forall y \in Y$
3. $\exists L > 0\ \ |g(x,y)| < L\ \forall x \in [a; +\infty)\ \forall y \in Y$

Тогда интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,g(x,y)\,dx \rightrightarrows$ *на* Y*.*

Доказательство. Заменяем интегралы на суммы, и сами доказываем эту теорему. □

Теорема (Признак Дерихле)**.** *Пусть $f(x,y)$ и $g(x,y)$ таковы, что:*

1. $\left|\int\limits_a^A f(x,y)\,dx\right| \leq L\ \forall A \geq a\ \forall y \in Y$

2. $g(x,y)$ *монотонна по* X *на* Y

3. $g(x,y) \rightrightarrows 0$ *на* Y *при* $X \to \infty$

Тогда $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,g(x,y)\,dx \rightrightarrows$ *на* Y.

Доказательство. Этого доказательства на экзамене не будет, но представления о нем нужно иметь. □

1.5 Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра

Теорема (1, О предельном переходе под знаком несобственного интеграла). *Пусть:*

1. $f(x,y)$ *интегрируема на* $[a,A]$ $\forall A \geq a$ $\forall y \in Y$

2. $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ *при* $y \to y_0$ $\forall x \in [a;A]\,,\ A \geq a$

3. $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx \rightrightarrows$ *на* Y.

Тогда $\exists \lim\limits_{y\to y_0} \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx = \int\limits_a^\infty \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\,dx = \int\limits_a^\infty \varphi(x)\,dx$

Доказательство. Без доказательства. □

Пример.

$$\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{n}{x^3} \cdot e^{-\dfrac{n}{2x^2}}, & x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

$f(x,n) = f_n(x)\,,\ Y = \mathbb{N},\ y_0 = \infty$

Изучим сходимость интеграла: $\Phi(u) = \int\limits_0^\infty f_n(x)\,dx$.

Проверим выполнение условий Теоремы 1.

1. $f_n(x) = \dfrac{n}{x^3} e^{-\dfrac{n}{2x^2}}$ — непрерывна на обрезке $[0;A]$ $\forall A \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ так как

$$\lim_{x\to 0} f_n(x) = n \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3 \cdot e^{\dfrac{n}{2x^2}}} = n \lim_{x\to+\infty} \frac{t^3}{e^{\dfrac{n}{2}\cdot t^2}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = 0 = f_n(0)$$

2. При $n \to \infty$: $\forall x \geq 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ следовательно $\varphi(x) \equiv 0$ — предельная функция.

   При этом $f_n(x) \rightrightarrows 0$ — доказывается: $\max\limits_{[0;A]} \dfrac{n}{x^3} e^{-\dfrac{n}{2x^2}} = |\ldots\ldots| \overset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$

3. Заметим что $\int\limits_0^\infty f_n(x)\,dx = \ldots = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ так как

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^\infty f_n(x)\,dx = 1 \neq 0 = \int\limits_0^\infty \varphi(x)\,dx,$$

то из Теоремы 1 следует, что условие 3 не выполняется. Интеграл $\int\limits_0^\infty f_n(x)\,dx$ равномерно не сходится при $n \to \infty$.

Теорема (2). *Пусть:*

1. $f(x,y)$*непрерывна на* $[a;+\infty) \times [c;d]$
2. $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ *сходится равномерно на* $[c;d]$

Тогда $\Phi(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ *непрерывна на* $[c;d]$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную бесконечно большую последовательность $\{A_k\}$, $A_1 = a$, $A_n \overset{n\to\infty}{\to} \infty$

$$\Phi(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx = \sum_{k=1}^\infty \int\limits_{A_k}^{A_{k+1}} f(x,y)\,dx = \sum_{k=1}^\infty u_k(y)$$

Так как собственный интеграл, зависящий от параметра $\int\limits_{A_k}^{A_{k+1}} f(x,y)\,dx = u_k(y)$ — непрерывная функция на $[c;d]$ (по теореме о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра) и в силу предположения условия 2 теоремы, $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx \rightrightarrows$, а значит и функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^\infty u_k(y) \rightrightarrows$, то по теореме о непрерывности суммы функционального ряда, сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^\infty u_k(y)$ — непрерывная функция , а следовательно и интеграл $\Phi(y)$. □

Теорема (3). *Пусть*

1. *Функции* $f(x,y)$, $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ — *непрерывны на* $[a;+\infty) \times [c;d]$
2. $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx \rightrightarrows$ *на* $[c;d]$
3. $\int\limits_a^\infty f'_y(x,y)\,dx \rightrightarrows$ *на* $[c;d]$

Тогда $\forall y \in [c;d]\ \ \exists \Phi'(y) = \int\limits_a^\infty f'_y(x,y)\,dx$.

Доказательство. Без доказательства. □

Теорема (4, Об интегрируемости под знаком интеграла)**.** *Пусть:*

1. $f(x,y)$ *— непрерывная на* $[a;+\infty)\times[c;d]$
2. $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx \rightrightarrows$ *на* $[c;d]$

Тогда

$$\exists\int\limits_c^d \Phi(y)\,dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx=\int\limits_a^\infty\left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$$

Доказательство. Все сводится к рядам. □

Теорема (5, Об изменении порядка интегрирования при несобственном интегрировании)**.** *Пусть:*

1. $f(x,y)$ *— непрерывна на* $[a;+\infty)\times[c;+\infty)$
2. $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ *сходится равномерно по* y *на множестве* $[c;C]\ni y\ \forall C>c$

   $\int\limits_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ *сходится равномерно по* $x\in[a;A]\ \forall A>a$
3. *или* $\int\limits_a^\infty dx\int\limits_c^\infty |f(x,y)|\,dy$ *и или* $\int\limits_c^\infty dy\int\limits_a^\infty |f(x,y)|\,dx$ *сходятся*

Тогда существуют и равны $\int\limits_a^\infty dx\int\limits_c^\infty f(x,y)\,dy$ *и* $\int\limits_c^\infty dy\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$.

Доказательство. Пусть для определенности существует интеграл $\int\limits_a^\infty dx\int\limits_c^\infty |f(x,y)|\,dy$.

Зафиксируем произвольный $C>c\Rightarrow$ по Теореме 4 $\Rightarrow$

$$\int\limits_c^C dy\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx=\int\limits_a^\infty dx\int\limits_c^C f(x,y)\,dy$$

Докажем что в правой части равенства возможен предельный переход при $C\to+\infty$ под знаком интеграла. Для этого достаточно доказать, что функция:

$$F(x,C)=\int\limits_c^C f(x,y)\,dy$$

удовлетворяет Условиям 1, 2, 3 Теоремы 1.

1. Нужно проверить, что интегрируемость функций $F(x,C)\quad\forall[a;A]$ по x — $\exists\int\limits_a^A f(x,C)=\int\limits_a^A dx\int\limits_c^C f(x,y)\,dy$. Так как $f(x,y)$ непрерывна на $[a;A]\times[c;C]$.

2. Интеграл $F(x,C) = \int\limits_c^C f(x,y)\,dy \overset{c\to+\infty}{\rightrightarrows} \int\limits_c^\infty f(x,y)\,dy$ — следует из Условия 2 Теоремы.

3. $\int\limits_a^\infty F(x,c)\,dx \rightrightarrows \forall C > c$ — Это следует из оценки:

$$|F(x,C)| = \left|\int\limits_c^C f(x,y)\,dy\right| \le \int\limits_c^C |f(x,y)|\,dy \le \int\limits_c^\infty |f(x,y)|\,dy = \varphi(x)$$

$F(x,C) \le \varphi(x)$

И сходимость интеграла $\int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^\infty |f(x,y)|\,dy = \int\limits_a^\infty \varphi(x)\,dx$ по Мажорантному признако (или признаку Вейерштрассе)

Следовательно по Теореме 1 :

$$\exists \lim_{c\to+\infty} \int\limits_c^C dy \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx = \lim_{c\to\infty} \int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^C f(x,y)\,dy \overset{T.1}{=}$$

$$\overset{T.1}{=} \int\limits_a^\infty \left(\lim_{c\to\infty} \int\limits_c^C f(x,y)\,dy\right) dx = \int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^\infty f(x,y)\,dy$$

□

1.6 Интегралы Эйлера.

Рассмотрим интегралы вида:

$$B(a,b) = \int\limits_0^1 x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1}\,dx \tag{1.7}$$

Это Эйлеров интеграл 1-го рода, или бетта-функция.

$$\Gamma(a) = \int\limits_0^\infty x^{a-1} \cdot e^{-x} dx \tag{1.8}$$

Это интеграл второго рада, или гамма-функция.

$B(a,b)$ — несобвтсенный интеграл, причем его сосбые точки $x=0;\ x=1$.

$B(a,b) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^{1-a}} \cdot (1-x)^{b-1}\,dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 x^{a-1} \cdot \frac{1}{(1-x)^{1-b}} dx.$

1. $(1-x)^{b-1} \to 1;\quad \frac{1}{x^{1-a}}$ — сходится при условии, что $1-a<1 \Longrightarrow a>0\ \forall b \in \mathbb{R}$.

2. При $x \to 1-0: x^{a-1} \to 1$. $\dfrac{1}{(1-x)^{1-b}}$ сходится при условии что $1-b<1 \Longrightarrow b>0\ \forall a \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow B(a,b)$ сходится (определен) при $a>0,\ b>0$.

Замечание. Заметим, что несоббстивенный интеграл (1.7) $\rightrightarrows$ на множестве $0<a_0\leq a;\ 0<b_0\leq b$. Так как подинтегральная функция $x^{a-1}\cdot(1-x)^{b-1} \geq x^{a_0-1}\cdot(1-x)^{b_0-1}$ — интегрируема, и она является мажорантой. Значит по Мажорантному признаку, интеграл сходится.

1.6.1 Рассмотрим свойства бетта-функции:

1. Симметричность $B(a,b)=B(b,a)$

   Доказательство. Замена в (1):

   $t=1-x;\ x=1-t$

   $x\in[0;1]$

   $t\in[1;0]$

   $dx=-dt$

   $B(a,b)=\int\limits_1^0(1-t)^{a-1}\cdot t^{b-1}(-dt)=\int\limits_0^1 t^{b-1}(1-t)^{a-1}dt=B(b,a)$. ☐

2. Из далека будем выводить 2е свойство

$$B(a,b)=\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=\frac{1}{a}\int\limits_0^1(1-x)^{b-1}dx^a=$$

$$=x^a\frac{(1-x)^{b-1}}{a}|_0^1+\frac{b-1}{a}\int\limits_0^1 x^a\cdot(1-x)^{b-2}dx=$$

$$=\left\{\begin{array}{c} x^a(1-x)^{b-2}=x^{a-1}\cdot(1-x)^{b-2}-x^{a-1}(1-x)^{b-1}= \\ =x^{a-1}\cdot(1-x)^{b-2}(1-(1-x)) \end{array}\right\}=$$

$$=\frac{b-1}{a}\underbrace{\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2}dx}_{B(a,b-1)}-\frac{b-1}{a}\underbrace{\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx}_{B(a,b)}=\frac{b-1}{a}B(a,b-1)-\frac{b-1}{a}B(a$$

$$B(a,b)\cdot\left(1^{\backslash a}+\frac{b-1}{a}\right)=\frac{b-1}{a}\cdot B(a,b-1)$$

$$B(a,b)=\frac{b-1}{a+b-1}\cdot B(a,b-1),\ a>0,\ b>1$$

Если $b=n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} B(a,n) &= \frac{n-1}{a+n-1}\cdot B(a,n-1) = \frac{n-1}{a+n-1}\cdot\frac{n-2}{a+n-2}\cdot B(a,n-2) = \ldots = \\ &= \left\{ B(a,1) = \int\limits_0^1 x^{a-1}dx = \frac{x^a}{a}\Big|_0^1 = \frac{1}{a} \right\} = \\ &= \frac{n-1}{a+n-1}\cdot\frac{n-2}{a+n-2}\cdot\frac{n-3}{a+n-3}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{a} \end{aligned}$$

$$B(m,n) = \frac{n-1}{m+n-1}\cdot\frac{n-2}{m+n-2}\cdot\ldots\frac{1}{m+1} = \frac{1}{m}\cdot\frac{(n-1)!\cdot(m-1)!}{(m+n-1)!},\ m,n\in\mathbb{N}$$

В общем это оно (2е свойство).

3. $B(a,b) = \int\limits_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}dy.$

   Получается заменой $x = \dfrac{y}{y+1}$.

   $x\in[0;1]$, $y\in[0;+\infty]$

   Самостоятельно проверить.

1.6.2 Совйтсва гамма-функций

$$\Gamma(a) = \int\limits_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$$

Интеграл , зависящий от параметра a, причем нужно заметить что возможная сосбая точка $x=0$.

$\Gamma(a) = \int\limits_0^1 \frac{e^{-x}}{1-a}dx + \int\limits_1^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$

$\int\limits_0^1 \frac{e^{-x}}{1-a}dx$ — сходится при $1-a<1,\ \Longrightarrow a>0$

$\int\limits_1^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$ — интегрируема $\forall a\in\mathbb{R}$.

Следовательно, $\Gamma(a)$ определена при $a>0$.

Интеграл (2) схордтится равномерно на множестве $0<a_0\le a$.

Действ...

$\Gamma(a) = \int\limits_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx + \int\limits_1^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$

На $[0;1]$ имеется Мажоранта $x^{a-1}e^{-x}\le x^{a_0-1}$

На $[1;+\infty]$: $\forall A>0$ на $[a_0;A]$ мажоранта $x^{a-1}\cdot e^{-x}\le x^{A-1}e^{-x} = x^Ae^{-x}$.

Так как на области $[a_0;\infty]$ $\Gamma(a)\rightrightarrows$, то $\forall a>0$ $\Gamma(a)$ непрерывна.

Аналогично доказывается, что интеграл, полученый дифференцируемый по параметру a так же сходистя равномерно на $[a_0;A]$

$\forall A>a_0>0$

$\Gamma'(a) = \int\limits_0^\infty \left(x^{a-1}e^{-x}\right)' dx = \int\limits_0^\infty x^{a-1}\ln x \cdot e^{-x} dx$ (мажорантный признак)

$\Gamma''(a) = \int\limits_0^\infty x^{a-1} \cdot \ln^2 x \cdot e^{-x} dx > 0$

2 Комплексный анализ

2.1 Комплексные числа. Операции над комплексными числами.

2.1.1 Понятие комплексного числа, аргумент, модуль. Формы записи комплексных чисел.

Определение. Выражение вида
$$z = x + iy \tag{2.1}$$
называется комплексным числом, где $x,\ y$ — вещественные числа, i — мнимая единица.

Комплексные числа изображаются на плоскости XoY точками, с координатами $(x;y)$. Иначе в плоскости z с вещественной осью x и мнимой осью y. И точка $z = x + iy$ изображается как вектор, определяемый суммой векторов $(x,0)\,,(0,y)$.

Множество всех комплексных чисел обозначается C и называется комплексной плоскостью.

Слагаемое x в (1) называется вещественной частью числа z и обозначается $Re\ z = x$

вещественное числа y в (1) называется мнимой частью от чисдла z, и обохначается $Im\ z = y$

Равенство (1) определяет алгебраическую форму записи числа.

Если в плоскости z ввести полярные координаты:

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\varphi \\ y = r\cdot\sin\varphi \end{cases}$$

$$z = r\left(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi\right) \tag{2.2}$$

Если воспользоваться формулой Эйлера
$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$
Получим показательную форму числа:
$$z = r\cdot e^{i\varphi} \tag{2.3}$$

Обозначим
$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\left(Re\ z\right)^2 + \left(Im\ z\right)^2}$$

Угол φ называют аргументом числа z, определяется:

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}, & x > 0 \\ \mathrm{arcctg}\dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0,\ y \geq 0 \\ \mathrm{arcctg}\dfrac{y}{x} - \pi, & x < 0,\ y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0,\ y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$

Так как функции $\cos\varphi,\ \sin\varphi$ — периодические, с периодом 2π, то аргумент z — периодическая.

Определение. Выражение $\arg z$ — главный аргумент z.

Определение. Число $\overline{z} = x - iy$ называется числом комплексно сопряженным числу $z = x + iy$

2.1.2 Операции над комплексными числами

Определение. Суммой комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число $z = x_1 + x_2 + i\left(y_1 + y_2\right)$.

Замечание. На комплексной плоскости z получается как сумма векторов $\left(x_1, y_1\right),\ \left(x_2, y_2\right)$.

Определение. Произведением комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число

$$z = x_1x_2 - y_1y_2 + i\left(x_1y_2 + y_1x_2\right)$$

Если представить в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1 \cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1 \qquad\qquad z_2 = r_2\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1r_2\left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right)$$

Замечание. Очевидно, что $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

Определение. Частным от деления числа $z_1 = x_1 + iy_1$ на число $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число:

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{\left(x_1 + iy_1\right)\left(x_2 - iy_2\right)}{\left(x_2 + iy_2\right)\left(x_2 - iy_2\right)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Используем показательную форму:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{i\varphi_2}}{r_2e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)\left(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2\right)}{\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)\left(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_2\right)} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\left(\cos\varphi_2\sin\varphi_1 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2\right)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot\left(\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right) = \frac{r_1}{r_2}e^{i\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)}$$

2.1.3 Извлечение корня n-ной степени из комплексного числа.

Если $z = re^{i\varphi}$, то $z^n = r^ne^{i\cdot n\cdot\varphi}$.

Решим обратную задачу извлечения корня n-ой степени из заданного комплексного числа: $z = re^{i\varphi}$.

Пусть $\sqrt[n]{z} = w = \rho\cdot e^{i\psi}$

Заметим, что $z = w^n$ тогда и только тогда, когда $\rho^n = r$ и $i\cdot\psi\cdot n = i\left(\varphi + 2\pi k\right)$, а значит:

$$\rho = \sqrt[n]{r} \qquad\qquad \psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k = \overline{0, n-1}$$

Таким образом:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

То есть операция извлечения корня из комплексного числа дает n–значный ответ.

2.1.4 Предел последовательности комплексных чисел

Рассмотрим последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел вида: $z_n = x_n + i \cdot y_n$. $(n \in \mathbb{N})$

Определение. Пара $z_0 = x_0 + iy_0$ наывается пределом последовательности $\{z_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > \ \exists N = N(\varepsilon) \ \forall n \geq N \ \ |z_n - z_0| < \varepsilon$$

Записывают, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$.

Замечание. Заметим что $|z_n - z_0| = |(x_n - x_0) + i \cdot (y_n - y_0)| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} = \rho(z_n, z_0)$ — расстояние между z_0 и z_n на $\mathbb{R}^2$.

Определение. Множество $U_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} | \, |z - z_0| < \varepsilon\}$ называется ε–окресностью точки z_0.

Так как $\mathbb{C}$ определяет точки из $\mathbb{R}^2$, то свойство последовательнстей в $\mathbb{C}$ аналолгичны свойствам последовательностей в $\mathbb{R}^2$.

Теорема (1)**.** $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \& \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

Определение. Последовательность точек $\{z_n\}$ называется ограниченой, если

$$\exists M > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ |z_n| \leq M$$

Теорема (2)**.** *Из всякой ограниченой последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательноть.*

Определение. Последовательность $\{z_n\}$ называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \ \ \forall n \geq N \ \forall p \in \mathbb{N} \ \ |z_{n+p} - z_n| < \varepsilon$$

Теорема (3, Критерий Коши)**.** *Последовательность $\{z_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность $\{z_n\}$ фундаментальна.*

Теорема (4)**.** *Всякая фундаментальная последовательность $\{z_n\}$ ограничена.*

2.1.5 Бесконечно удаленная точка

Определение. Последовательность $\{z_n\} \in \mathbb{C}$ называется бесконечно-возрастающей, если

$$\forall R > 0 \ \exists N = N(R) \ \ \forall n \geq N \ \ |z_n| > R$$

Записывают $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$.

Будем сичитать всякую бесконечно-возрастающую последовательность сходящейся к бесконечно удаленной точке: $z = \infty$.

$U_R(\infty) = \{z \in \mathbb{C} | \, |z| > R\}$ — R–окресность точки $z = \infty$.

Определение. Множество $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ называется расширенной (полной) комплексной плоскостью.

Рассмотрим геометрический смысл точки $z = \infty$. Рассмотрим в 3-мерном пространстве $(x; y; u)$ сферу Римана — сферу с центром в точке $\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$ диаметра 1.

Рассмотри произвольную бесконечно-возрастающую последовательность $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$.

Обозначим точку пересечения отрезка, соеденяющего точку z_n с полярной точкой $(0; 0; 1)$, со сферой Римана как z'_n и назовем её проэкцией точки z_n на сферу. Очевидно, при $n \to \infty$ получается, что $z'_n \to z'_\infty (0; 0; 1)$, тоесть полярная точка — это и есть проэкция бесконечно-удаленной точки $z = \infty$ на сферу Римана.

Рассмаотрим алгебраические свойства точки $z = \infty$.

Лемма. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{z_n} = 0$

Доказательство. $R \leftrightarrow \frac{1}{2}$ □

Всвязи с этим записывают: $\frac{1}{\infty} = 0$ и $\frac{1}{0} = \infty$ в $\overline{\mathbb{C}}$.

Очевидно, что:

1. $\forall z \in \mathbb{C} \neq 0 \quad z \cdot \infty = \infty$.
2. $\forall z \in \mathbb{C} \quad \frac{z}{\infty} = 0,\ z + \infty = \infty$.
3. Отношение $\frac{\infty}{\infty}$ — неопределенность.

2.1.6 Множества в плоскости $\mathbb{C}$.

Определение. ε-окресностью точки z_0 называется множество

$$U_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$$

Определение. Точка z_0 называется внутренней точкой множества $D \subseteq \mathbb{C}$, если она пренадлежит области D вместе с некоторой своей окресностью.

Определение. Множество $D \in \mathbb{C}$ называется открытым если все его точки внутренние.

Определение. Точка z_0 называется предельной точкой множества D, если в любой ее выколотой окресности седержатся точки из области D.

Пример. Рассмотрим область $D = \{z \mid |z| < 1\}$.

Возьмем точку $z_0 = 1$.

Докажем что $\exists z \in D \ |z - z_0| < \varepsilon$.

Действителдьно достоточно полижить $z = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \implies \left|\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) - 1\right| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Теорема. *Точка z_0 является предельной точкой множества $D \Longleftrightarrow \exists \{z_n\} \subset D,\ z_n \neq z_0 \ \lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$.*

Доказательство. На экзамене это доказательство будет. Доказывается аналогично.. □

Определение. Множество всех предельных точек множдества D назвается производной множества D и обозначается D'.

Определение. Множество D называется замкнутым, если оно содержи все свои предельные точки.

Определение. Множество $\overline{D} = D \cup D'$ называется замыканием множества D.

Лемма. *Множесво $\overline{D}$ замкнуто.*

Доказательство. Самостоятельно нужно записать 2 предложения. □

Определение. Множество D открыто $\Longleftrightarrow \mathbb{C} \backslash D$ — замкнуто.

Доказательство. Самостоятельно доказать. □

Определение. Точка z_0 называется граничной точкой множества D, если в любой ее окресности есть точки, пренадлежащие D, и не преадлежащие D.

Определение. Множество всех граничных точек множества D называется границей множества D называется границей множдества D и обозначается ∂D, Γ, γ.

Определение. Множество $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется областью, если оно открыто и любые две точки $z_1, z_2 \in D$ можно соеденить линией, содержащейся в области D.

2.2 Функции комплексной переменной. Аналитичность

2.2.1 Понятие функции комплексной переменной

Определение. Говорят что на множествеD из комплексной плоскости $\mathbb{C}$ определена функция $w = f(z)$, если указан закон, по каторому каждому числу $z \in D$ поставлено в сответствии определенное комплексное число w (совокупность чисед w_j, $j = \overline{1, n}$). Функция $f(z)$ называется однозначной (многозначной).

Замечание. D называется областью определения $f(z)$, а множемтво всех значений N — область значений (N_j — области значений. $j = \overline{1, n}$).

Если $z = x + iy$, $w = u + iv$, на задание функции комплексной переменной равносильно заданию пары вещественнозначных функций вещественных аргументов $u = u(x, y)$; $v = v(x, y)$.

Определение. Функция $w = f(z)$, определенная на множестве D называется однолистной если в любых различных точках z_1 и z_2 она принимает различные значения w_1и w_2. Тоесть однолистная функция, это та функция, обратная к которой является однозначной.

Пример. Если функция $f(z) = z^2$, то области однолистности ее не могут пренадлежать одновременно пары точек z_1 и $-z_1$. Любая полуплоскость с границея содержащей $z = 0$ — облоасть однолистности функции $f(z) = z^2$

2.2.2 Предел и непрерывность функций комплексной переменной

Пусть функция $w = f(z)$ определена в некоторой окресности точки $z_0 = x_0 + i \cdot y_0$.

Замечание. $f(z) = \{z = x + i \cdot y\} = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$

Определение (1)**.** Говорят, что в точке z_0 существует конечный предел, обозначаемый $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$, если существуют конечные пределы:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0,\qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0$$

При этом полагаем: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=u_0+i\cdot v_0=w_0$.

Из свойств функций многих переменных получим:

1. $\lim\limits_{z\to z_0}(f(z)\pm g(z))=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)\pm\lim\limits_{z\to z_0} g(z)$
2. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)\cdot g(z)=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)\cdot\lim\limits_{z\to z_0} g(z)$
3. $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)},\quad \lim\limits_{z\to z_0} g(z)\neq 0$

Определение (2)**.** Говорят, что функция $f(z)$ имеет в точке z_0 предел, равный w_0, если:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon,\,z_0)>0\ \forall z\in D(f)\ \ 0<|z-z_0|<\delta\implies|f(z)-w_0|<\varepsilon$$

Определение (3)**.** Это предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=w_0$ — по Гейне (через последовательности). Сформулировать самостоятельно.

Определение (4)**.** Функция $w=f(z)$ называется непрерывной в точке z_0, если она определена в некоторой окресности точки z_0 и $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$.

Определение (5)**.** Функция $u=f(z)$ называется непрерывной на множестве D, если $f(z)$ непрерывна в каждой точке $z\in D$.

Сформулируем свойство функции $f(z)$, непрерывной на замкнутом множестве $\overline{D}$ ($\overline{D}$ — замкнутое множество).

1. Ограниченность (Первая теорема Вейерштрассе)

$$\exists M>0\ \forall z\in\overline{D}\ \ |f(z)|\leq M$$

2. Достигаются верхняя и нижняя грани, тоесть существуют наибольшее и наименьшее значения $|f(z)|$.

$$\exists z',z''\in\overline{D}\ \forall z\in\overline{D}\ \ \begin{matrix}|f(z')|\geq|f(z)| & \max\limits_{z\in\overline{D}}|f(z)|=|f(z')|\\ |f(z'')|\leq|f(z)| & \min\limits_{z\in\overline{D}}|f(z)|=|f(z'')|\end{matrix}$$

3. Равномерная непрерывность на $\overline{D}$.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)\ \ \forall z'',z'\in\overline{D}\ \ |z'-z''|<\delta\Longrightarrow|f(z')-f(z'')|<\varepsilon$$

4. Если функция $f(z)$ непрерывна на области D (все точки области внутренние) и взаимно-однозначно (она однозначная и однолистная) отображает множествоD на множество Δ плоскости w (область значений), то Δ — так же область (все точки области внутренние), и обратная функция $z = \varphi(w)$ — непрерывная на Δ.

2.2.3 Дифференцируемость и аналитичность

Определение. Функция $w = f(z)$ называется дифференцируемой в точке z, если существуею конечный предел:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \overset{def}{=} f'(z),$$

Называемой производной функцией $f(z)$ в точке z.

Замечание. Предел не зависит от способа стремления h к 0.

Пример. В каких точках дифференцируема функция $f(z) = Re\, z$?

$x + i \cdot y \overset{f(z)}{\to} x$

Выберем различные пути, по которым приращение h аргумента z стремится к 0.

1. $h = t \in \mathbb{R},\ h \to 0$

   $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{Re\ (x + i \cdot y + t) - Re\ (x + i \cdot y)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t}{t} = 1$

2. $h = i \cdot \tau,\ \tau \in \mathbb{R},\ \tau \to 0$

   $\lim\limits_{\tau \to 0} \dfrac{Re\ (x + iy + i\tau) - Re\ (x + i \cdot y)}{i \cdot \tau} = \lim\limits_{\tau \to 0} \dfrac{0}{i \cdot \tau} = 0$

$1 \neq 0 \Longrightarrow$ Функция не является дифференцируемой.

Теорема. *Пусть функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в некоторой окрестности точки z_0 и дифференцируемы в самой точке $z_0 = x_0 + i \cdot y_0$. Функция $f(z)$ дифференцируема в точке $z_0 \Longleftrightarrow$ в точке z_0 выполнены условия Коши-Римана (Эйлера-Даламбера):*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Доказательство. ($\Longrightarrow$) Пусть существует $\exists f'(z_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$. Рассмотрим различные способы стремления $h \to 0$.

1. $h = s \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+s)-f(z_0)}{s} = \\
&= \left\{\begin{array}{c} u(x_0+s,y_0)+i\cdot v(x_0+s,y_0)=f(z_0+s) \\ -u(x_0,y_0)-i\cdot v(x_0,y_0)=-f(z_0)\end{array}\right\} = \\
&= \lim_{s\to 0}\frac{u(x_0+s,y_0)+i\cdot v(x_0+s,y_0)-u(x_0,y_0)-i\cdot v(x_0,y_0)}{s} = \\
&= \lim_{s\to 0}\left(\frac{u(x_0+s,y_0)-u(x_0,y_0)}{s}+i\cdot\frac{v(x_0+s,y_0)-v(x_0,y_0)}{s}\right) = \\
&= u'_x(x_0,y_0)+i\cdot v'_x(x_0,y_0)
\end{aligned}
$$

2. $h = i\cdot\tau,\ \tau\in\mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{\tau\to 0}\frac{f(z_0+i\cdot\tau)-f(z_0)}{i\cdot\tau} &= -i\cdot\lim_{\tau\to 0}\frac{u(x_0,y_0+\tau)+i\cdot v(x_0,y_0+\tau)-u(x_0,y_0)-i\cdot v(x_0,y_0)}{\tau} = \\
&= -i\cdot\lim_{\tau\to 0}\left(\frac{u(x_0,y_0+\tau)-u(x_0,y_0)}{\tau}+i\cdot\frac{v(x_0,y_0+\tau)-v(x_0,y_0)}{\tau}\right) \\
&= -i\cdot\left(u'_y(x_0,y_0)+i\cdot v'_y(x_0,y_0)\right) = \\
&= v'_y(x_0,y_0)-i\cdot u'_y(x_0,y_0)
\end{aligned}
$$

Приравнивая вещественные мномые части для $f'(z_0)$ получим:

$$
\begin{cases} u'_x(x_0,y_0) = v'_y(x_0,y_0) \\ v'_x(x_0,y_0) = -u'_y(x_0,y_0)\end{cases}
$$

($\Longleftarrow$)Пусть $h = s+i\cdot t$ — приращение аргумента $z_0 = x_0+i\cdot y_0$. Тогда приращение дифференцируемых в точке $(x_0;y_0)$ функции можно представить:

$$
\Delta u(x_0,y_0) = u(x_0+s,y_0+t)-u(x_0,y_0) = \left\{du+\alpha\cdot\underbrace{|h|}_{\substack{\parallel \\ \rho}}\right\} = \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}\cdot s+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot t+\alpha\cdot|h|,
$$

$$
\Delta v(x_0,y_0) = v(x_0+s,y_0+t)-v(x_0,y_0) = \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}\cdot s+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot t+\beta\cdot|h|
$$

где α, β — бесконечно малые функции при $|h|\to 0$.

$$
\begin{aligned}
f(z_0+h)-f(z_0) &= \Delta u+i\cdot\Delta v = u'_x\cdot s+u'_y\cdot t+\alpha\cdot|h|+i\cdot v'_x\cdot s+i\cdot v'_y\cdot t+i\cdot|h| = \\
&= \left\{\begin{array}{c} u'_y = -v'_x \\ v'_y = u'_x\end{array}\right\} = \\
&= u'_x\cdot s-v'_x\cdot t+i\cdot v'_x\cdot s+i\cdot u'_x\cdot t+\gamma\cdot|h| = \\
&= A\cdot h+\gamma\cdot|h|,
\end{aligned}
$$

где A — $u'_x + i \cdot v'_x$ в точке z_0. Следовательно:

$$\begin{aligned}\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{A\cdot h + \gamma\cdot |h|}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\left(A+\gamma\cdot\frac{|h|}{h}\right) = A\end{aligned}$$

Итак $f(z)$ дифференцируема в точке z_0, причем:

$$f'(z_0) = u'_x + i\cdot v'_x = v'_y + i\cdot v'_x = v'_y - i\cdot u'_y = u'_x - i\cdot u'_y,$$

в точке z_0. □

Основные свойства производных:

1. $(f(z)\pm g(z))' = f'(z) \pm g(z)$
2. $(f(z)\,g(z))' = f'(z)\,g(z) + f(z)\,g'(z)$
3. $\left(\dfrac{f(z)}{g(z)}\right)' = \dfrac{f'(z)\,g(z) - f(z)\,g'(z)}{g^2(z)}, \quad g(z)\neq 0$

Пример. Выяснить в каких точках дифференцируемы функции:

1. $w = z^2$

   Решение.

   (a) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(z+h)^2 - z^2}{h^2} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2zh+h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2z+h) = 2z, \quad \forall z\in\mathbb{C}$

   (b) $z^2 = (x+i\cdot y)^2 = x^2 - y^2 + i\cdot 2xy$
   $u(x,y) = x^2 - y^2$
   $v(x,y) = 2xy$
   $$\begin{array}{ccc} u'_x = 2x & & v'_x = 2y \\ \| & \text{и} & \| \\ v'_y = 2x & & u'_y = -v'_x \end{array}$$
   Выполнены условия Коши-Римана, и следоватедльно есть дифференцируемость во всех точках.

2. $w = |z|^2$

   Решение.
   $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|z+h|^2 - |z|^2}{h} = \ldots$

   (a) $h = s\to 0,\ s\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\ldots &= \lim_{s\to 0}\frac{|x+i\cdot y+s|^2 - |x+i\cdot y|^2}{s} = \\ &= \lim_{s\to 0}\frac{(x+s)^2 + y^2 - (x^2+y^2)}{s} = \\ &= \lim_{s\to 0}\frac{2xs+s^2}{s} = 2x\end{aligned}$$

(b) $h = i \cdot t,\ t \to 0,\ t \in \mathbb{R}$
$\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{|x+iy+s|^2 - |x+iy|^2}{i \cdot t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{x^2 + (y+t)^2 - (x^2+y^2)}{i \cdot t} = -i \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{2yt + t^2}{t} = -i2y.$

Для дифференцируемости в точке $(x;y)$ необходимо:

$$2x = -i2y$$

$\Longrightarrow$ вол всех точках кроме нуля в них нету дифференцируемости.

В точке $z_0 = 0$:

$h = \rho \cdot e^{i \cdot \varphi} \to 0$

$\Longrightarrow f'(0) = \lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{\rho^2}{\rho e^{i\varphi}} = \lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{\rho}{e^{i\varphi}} = \{e^{i\varphi}$−число, пренадлежащее еденгичной окружности$\} = 0$

Функция, дифференцируемая в каждой точке области D называется аналитической в области D.

2.3 Элементарные функции

2.3.1 Инверсия — $w = \dfrac{1}{z}$

Пусть $z = \rho \cdot e^{i\varphi}$, $|z| = \rho$, $arg\, z = \varphi$, $w = \dfrac{1}{\rho e^{i\varphi}} = \dfrac{1}{\rho} \cdot e^{-i\varphi}$, то есть $\left|\dfrac{1}{z}\right| = |w| = \dfrac{1}{\rho} = \left|\dfrac{1}{\rho}\right|$ $\Longrightarrow |z| \cdot |w| = 1$, $arg\, w = arg\, \dfrac{1}{z} = -arg\, z$.

Определение. Точки z и z^* называются симметричными относительно окружности радиуса R с центром в точке z_0, если

1. $arg\ |z - z_0| = arg\ |z^* - z_0|$
2. $|z - z_0| \cdot |z^* - z_0| = R^2$

Заметим, что точка z^* это $\dfrac{1}{\rho} \cdot e^{i\varphi}$ — симметрична точке z относительно еденичной окружности $|z| = 1$ ($C_1 = \{z \mid |z| = 1\}$), так как $|z^*| \cdot |z| = \dfrac{1}{\rho} \cdot \rho$. Очевидно, что $w = \dfrac{1}{z} = z^* = \overline{\left(\dfrac{1}{\rho} e^{i\varphi}\right)} = \dfrac{1}{\rho} e^{i\varphi}$

Очевидно:

1. $w(0) = \infty$
2. $w(\infty) = 0$

$\Longrightarrow \overline{\mathbb{C}}_z \overset{w=\frac{1}{z}}{\rightarrow} \overline{\mathbb{C}}_w$

Внутренность еденичного круга — область $|z| < 1$ переводится инверсией во внешность: $|w| > 1$, а внешность — во внутренность. ПОлярный угол $\alpha < arg\, z < \beta$ — в полярный угол $-\beta < w < -\alpha$.

Отображение $w = \dfrac{1}{z}$ является взаимно-однозначным.

Самим доказать: $\left(\dfrac{1}{z}\right)' = -\dfrac{1}{z^2}$.

2.3.2 Линейная функция — $w = a \cdot z + b, \quad a, b \in \mathbb{C}$

Пусть $a = |a| \cdot e^{i\varphi}$, $b = s + i \cdot t$. Тогда $w = |a| \cdot e^{i\varphi} \cdot z + s + i \cdot t$, следовательно функцию w можно представить как суперпозицию трех функций:

1. $w_1 = |a| \cdot z$ — Растяжение в $|a|$ раз
2. $w_2 = e^{i\varphi} \cdot w_1$ — Поворот на угол φ.
3. $w_3 = w_2 + s + it$ — Паралельный перенос на вектор $\overrightarrow{b}\,(s; t)$.

Следовательно линейная функция осиществляет растяжение, поворот и паралельный перенос, следовательно линейная фунцкия является преобразованием подобия.

Самостоятельно доказать, что $(az + b)' = a$.

2.3.3 Функции $w = z^n, \ w = \sqrt[n]{z}$

Рассмотрим фунцкию $w = z^2$. пусть точка $z = \rho e^{i\varphi}$, тогда $w = z^2 = \rho^2 e^{i2\varphi}$.

Рассмотрим точку: $-z = -\rho e^{i\varphi} = \rho e^{i(\varphi+\pi)} \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
(-z)^2 &= \left(\rho e^{i(\varphi+\pi)}\right)^2 = \rho^2 \cdot e^{i(2\varphi+2\pi)} = \\
&= \left\{ \begin{array}{r} e^{i(2\varphi+2\pi)} = \cos(2\varphi + 2\pi) + i\sin(2\varphi + 2\pi) = \\ = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi = e^{i2\varphi} \end{array} \right\} = \\
&= \rho^2 e^{i2\varphi}
\end{aligned}$$

Тогда $z^2 = (-z)^2$.

Таким образом функция $w = z^2$ отображает колмплексную плоскость $\mathbb{C}$ на себя, причем двум различным тогчкам z_1 и z_2, таким что $|z_1| = |z_2|$, $|arg\, z_1 - arg\, z_2| = \pi$ station ставится в соответствии station

Расмотрим в плоскости z область $\{0 < arg\, z < \pi\} = D_0$ — верхняя полупроскость. Фунцкия $w = z^2$ переводит D_0 в область $0 < arg\, w < 2\pi$ — комплексная плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по лучу $z \in (0; +\infty)$ — положительная вещественная полуось. (Причем в D_0 есть верхний берег разреза, а в D_1 — нижний берег разреза (Это границы разреза))

При этом отображение $D_0 \overset{w=z^2}{\rightarrow} \mathbb{C} \backslash [0; +\infty)$ является взаимно-однозначной. D_0 — область однолистности.

Очевидно что $D_1 = \{z \mid \pi < arg\, z < 2\pi\}$ — отображается на множество $2\pi < arg\, z < 4\pi = \mathbb{C} \backslash [0; +\infty)$ — на туже плоскость с тем же разрезом, причем отображение взаимно-однозначное.

Таким образом функция $w = z^2$ является двулистной функцей, D_0 и D_1 являются ее областями однолистности.

Замечание. В общем случае в качестве областей однотистности можно взять любую полупроскость вида: $D_\alpha = \{z \mid \alpha < arg\, z < \alpha + \pi\} \quad \rightarrow \quad E_\alpha = \{w \mid 2\alpha < arg\, w < 2\alpha + \pi\}$ — $\mathbb{C}$ с разрезом по лучу $arg\, w = 2\alpha$.

Так как функция $w = z^2$ — двулистная, то обратная функция $w = \sqrt{z}$ — двузначная, причем:

1. $w_0 = \sqrt{z_0} = \sqrt{|z| \cdot e^{i\left(\frac{\varphi + 2\pi \cdot 0}{2}\right)}} = \sqrt{|z|} \cdot e^{i\frac{\varphi}{2}}$, где $\varphi = arg\, z$.
2. $w_1 = \sqrt{z_1} = \sqrt{|z| e^{i\frac{\varphi + 2\pi \cdot 1}{2}}} = \sqrt{|z|} e^{i\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)}$

Таким образом выделяются 2 однозначные функции:

1. $w_0 : \mathbb{C} \backslash [0; +\infty) \rightarrow \{0 < arg\, w < \pi\} = D_0$
2. $w_1 : \mathbb{C} \backslash [0; +\infty) \rightarrow D_1$

Их называют однозначные ветви двузначной функции $w = z^2$.

При движение по замкнутому контуру, не содержащую внутри себя точку $z = 0$ соответствующий контур в плоскости w также замкнут.

Рассмотрим замкнутый контур, проходящий через точку z', содержащий внутри точку $z = 0$. При движение по нему получается в плоскости w незамкнутый контур, соеденяющий точки $\sqrt{z'_0}$ и $\sqrt{z'_1}$.

Определение. Точка z_0 называется точкой ветвления многозначной функции $w = f(z)$, если при движении по любому замкнутому контуру γ, окружающему эту точку происходит движение в плоскости w по незамкнутому контуру, концы которого являются значениями различных ветвей этой функции в некоторой точке.

Очевидно в любой окресности точки ветвления нельзя отделить различные ветви друг от друга.

$w = z^n$ — многолистная, областью однолистности является любой полярный сектор раствора $\dfrac{2\pi}{n}$.

$$D^\alpha = \left\{ z | \alpha < \arg z < \alpha + \frac{2\pi}{n} \right\}$$

Образом этого сектора при действии $w = z^n$ будет: $E^\alpha = \{w | n\alpha < \arg w < n\alpha + 2\pi\}$— плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по лучу $\arg w = n\alpha$. В частности областями однолистности являются области:

$$D_k = \left\{ z | \frac{2\pi k}{n} < \arg z < \frac{2\pi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right\}, \text{ где } k = \overline{0, n-1}$$

Обратная функция $w = \sqrt[n]{z}$ — n-значная, причем мы можем выделить n однозначных ветвей:

$$\sqrt[n]{z}_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot exp\left(i \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = \overline{0, n-1}$$

Где ветвь $\sqrt[n]{z}_k$ взаимно однозначно переводит плоскость с разрезом $\mathbb{C} \backslash \, [0; +\infty]$ на сектор D_k.

2.3.4 Показательная и логорифмическая функции

Определим показательную функцию:

$$w = e^z = e^{x+iy} = x^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Свойства

1. $|e^z| \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

   Доказательство. $|e^z| = |e^x| \cdot |e^{iy}| = e^x > 0$ □

2. e^z — не ограниченна на $\mathbb{C}$

   Доказательство. Пусть ..... □

3. $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

   Доказательство. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$. Тогда

   $$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1+iy_1} \cdot e^{x_2+iy_2} = e^{x_1} \cdot (\cos y_1 + i \sin y_1) \cdot e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2) =$$
   $$= e^{x_1+x_2} [(\cos)] =$$
   $$= e^{z_1+z_2}$$

   □

4. Дифференцируемость (условие Коши–Римана)

   Доказательство. Пусть

   $$u = e^x \cdot \cos y$$
   $$v = e^x \cdot \sin y$$

   $$\begin{cases} u'_x = v'_y \\ \end{cases}$$

   □

5. Периодичность

   Доказательство.

   $$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x (\cos (y + 2\pi) + i \sin (y + 2\pi)) =$$
   $$= e^{x+i(y+2\pi)} = e^{z+i2\pi}$$

   Так как e^z — периодичная, то она бесконечно листная. Тогда областью однолистности функции $w = e^z$ является всякая полоса ширины 2π вида:

   $$D_\alpha = \{z | \alpha < Imz < \alpha + 2\pi\} \quad \forall \alpha \in R$$

В частности в качестве области однолистности возьмем область

$$D_0 = \{z|0 < y < 2\pi\}$$

Найдем ее образ при отображении функции $w = e^z$. Зафиксируем $x = x_0 \in R,\ y \in (0; 2\pi)$, получим интервал. Найдем его образ:

$$e^z = e^{x_0+iy} = \underbrace{e^{x_0}}_{|w|} \cdot e^{iy}$$

То есть это точки, лежащие на окружности радиуса e^{x_0} с выброшеной точкой $w = e^{x_0}$. Значит полоса D_0 отображается на $\mathbb{C} \setminus [0; 2\pi)$

Рассмотрим семейство прямых вида:

$$y = y_0 = const \in (0; 2\pi) , \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

Получим: $w = e^z = e^{x+iy_0}$ — луч: $\arg w = y_0,\ w \neq 0$.

Следовательно семейство прямых $y = y_0 = const$ отображается на семейство лучей $\arg w = y_0,\ w \neq 0$, тогда полоса D_0 отображается на $\mathbb{C} \setminus [0; 2\pi)$. □

2.3.5 Дробно-линейные функции

$$w = f(z) = \frac{\alpha + bz}{\beta + dz},\ \frac{a}{c} \pm \frac{b}{d}$$
$$w = \lambda \frac{\alpha + z}{\beta + z}$$

Теорема. *Заданные три пары значений:*
$f(z_1) = w_1$
$f(z_2) = w_2$
$f(z_3) = w_3$
Однозначно определяется дроюбно-линйейная функция.

Доказательство. Преобразуем разность.

$$\begin{aligned} w_1 - w_2 &= \lambda \frac{\alpha + z_2}{\beta + z_2} - \lambda \frac{\alpha + z_1}{\beta + z_1} = \\ &= \lambda \frac{\beta z_2 + \alpha z_1 - \beta z_1 - \alpha z_2}{(\beta + z_2)(\alpha + z_2)} = \\ &= \lambda \frac{(z_2 - z_1)(\beta - \alpha)}{(\beta + z_2)(\alpha + z_2)} \end{aligned}$$

$$w_3 - w_2 = \lambda \frac{(z_2 - z_1)(\beta - \alpha)}{(\beta + z_1)(\beta + z_2)}$$

$$\frac{w_1 - w_2}{w_3 - w_2} = \frac{(z_2 - z_1)(\beta + z_3)}{(z_3 - z_2)(\beta + z_1)} \Longrightarrow \begin{array}{c} \dfrac{w_1 - w_2}{w_3 - w_2} = \dfrac{(z_1 - z_2)(\beta + z_2)}{(z_3 - z_2)(\beta + z_1)} \\ \dfrac{w_1 - w}{w_3 - w} = \dfrac{(z_1 - z)(\beta + z)}{(z_3 - z)(\beta + z_1)} \end{array}$$

$\forall z \in \overline{\mathbb{C}}\ w = f(z) \Longrightarrow$

$$\frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3} : \frac{w_1 - w}{w_3 - w} = \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} : \frac{z_1 - z}{z_3 - z} \tag{2.4}$$

Полученное соотношение не явно выражает однозначную функцию $w = f(z)$, которую можно выразить явно, используя алгебраические преобразования.

Формула (2.4) справедлива при $\begin{array}{c} z_i = \infty \ \left(i = \overline{1,3}\right) \\ w_i = \infty \ \left(i = \overline{1,3}\right) \end{array}$. В этом случае соответствующие разности полагают равными 1. □

Свойства дробно-линейных отображений. Запишем дроюбно-линейную функцию в виде: $w = \lambda \dfrac{\alpha + z}{\beta + z} = \lambda \left(\dfrac{\alpha - b}{z + \beta} + 1 \right)$ — Это суперпозиция следующих функций: $w_1 = z + \beta$ — сдвиг, $w_2 = \dfrac{1}{w_1} = \dfrac{1}{z + \beta}$ — инверсия, $w_3 = \lambda \cdot (\alpha - \beta)\, w_2 + \lambda$ — линейная функция.

Теорема (Круговое свойство дробно-линейного отображения)**.** *Дробно-линейное отображение всякую окружность расширеной комплексной плоскости переводит в окружность.*

Замечание. Прямая в плоскости это окружность радиуса $R = \infty$.

Доказательство. Достаточно доказать, что круговым свойством обладает инверсия, так как мы уже значем, что сдвиг и лингейная функция обладают таким свойством.

Рассмотрим в плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ общее уравнение окружности. $(z = x + iy)$

$$A\left(x^2 + y^2\right) + Bx + Cy + D = 0,\ \ A \geq 0 \tag{2.5}$$

Заметим что при $D = 0$ то окружность проходит через начало координат (через точку $z = 0$). При $A = 0$ получатеся уравнение прямой. (проходит через точку $z = \infty$).

$A\left(x^2 + \dfrac{B}{A}x\right) + A\left(y^2 + \dfrac{C}{A}y\right) + D = 0$

$A\left(x + \dfrac{B}{2A}\right)^2 + A\left(y + \dfrac{C}{2A}\right)^2 + D - \dfrac{B^2}{4A} - \dfrac{C^2}{4A} = 0$

Исслудуем функцию $w = \dfrac{1}{z} \Longrightarrow w = u + iv = \dfrac{1}{x + iy} \Longrightarrow x + iy = \dfrac{1}{u + iv} = \dfrac{u - iv}{u^2 + v^2}$ $\Longrightarrow$

$x = \dfrac{u}{u^2 + v^2};\ y = -\dfrac{v}{u^2 + v^2} \Longrightarrow (2.5) \Longrightarrow$

$A \cdot \dfrac{1}{u^2 + v^2} + B\dfrac{u}{u^2 + v^2} - C\dfrac{v}{u^2 + v^2} + D = 0$

$D\left(u^2 + v^2\right) + Bu - Cv + A = 0$ — уравнение окружности в расширенной плоскости $w \in \overline{\mathbb{C}}$.

В часности при $A = 0$ в плоскости z получается что прямая отображается в окружность, проходящую через точку 0.

В часности при $D = 0$. Окружности, проходящие через $z = 0$ переходят в прямые. □

Пример. Найти дробно-линейное отображение, переводящее круг $|z| < 1$ в верхнюю полуплоскость. $Im\, w > 0$.

Решение.

Предположим, что $w(-1) = \infty$

Значение λ найдем из оставшегося условия.

Лемма (1). *Всякая окружность C', проходящая через две точки p и p' симметричные относительно окружности C, ортогональная этой окружности.*

Теорема. *При отображении дробно-линейной функции точки, симметричные относительно окружности C переходят в точки, симметричные относительно её образа K.*

Замечание. Прямая в $\mathbb{C}$ — окружность радиуса $R = \infty$. Симметрия относительно прямой — это обычная осевая симметрия.

2.3.6 Функция Жуковского.

Функция вида $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ называется функцей Жуковского.

Свойства функции Жуковского:

$w(0) = w(\infty) = \infty$

$f'(z) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{z^2}\right)$ — дифференцируема на $\overline{\mathbb{C}}$, конформность нарушается в точках $(f' = 0)$ $z = \pm 1$.

Области однолисиности: $f(z_0) = f(z_1) \Longrightarrow \dfrac{1}{2}\left(z_0 + \dfrac{1}{z_0}\right) = \dfrac{1}{2}\left(z_1 + \dfrac{1}{z_1}\right)$

$(z_0 + z_1) + \dfrac{z_1 - z_0}{z_0 z_1} = 0$

$(z_0 - z_1) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{z_0 z_1}\right) = 0$

Точки z и $\dfrac{1}{z}$ не пренадлежат одной области однолистности.

Областями однолисиности функции 1 являются области $|z| < 1$ или $|z| > 1$.

Замечание. Другире области однолисиности: $Im\, z > 0,\ Im\, z < 0$.

Изучим свойства отображения 1.

Пусть $z = \rho e^{i\varphi} \Longrightarrow f(z) = \dfrac{1}{2}\left(\rho e^{i\varphi} + \dfrac{1}{\rho} e^{-i\varphi}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\rho + \dfrac{1}{\rho}\right) \cdot \cos\varphi + i\dfrac{1}{2}\left(\rho - \dfrac{1}{\rho}\right) \sin\varphi$

$$\Longrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{1}{2}\left(\rho + \dfrac{1}{\rho}\right)\cos\varphi \\ v = \dfrac{1}{2}\left(\rho + \dfrac{1}{\rho}\right)\sin\varphi \end{cases}$$

1. $\rho = \rho_0$ — фиксированое число, φ — переменная. Исключим φ

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(\rho_0 + \frac{1}{\rho_0}\right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(\rho_0 - \frac{1}{\rho_0}\right)^2} = 1 \text{ — Эллипм с плоскости } \omega.$$

2.3.7 Функция, обратная к функции жуковского

Самостоятельно

2.4 Интеграл от функции комплексной переменной

2.4.1 Понятие ингтеграла. Вычисление. Основные свойства.

Расположим в $\mathbb{C}$ кусочногладкую кривую γ, заданную параметрически

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ t \in [\alpha; \beta], \quad \begin{matrix} a = x(\alpha) + iy(\alpha) \\ b = x(\beta) + iy(\beta) \end{matrix}$$

Где функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны, а их производные могут иметь лишь конечное число точек разрыва.

Пусть функция $f(z)$ определена на γ, и комплекснозначна $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Разобьем кривую γ точками $\{z_k\}$, $k = \overline{0,n}$, $a = z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n = b$, причем $z_k = x_k + iy_k$. Рассмотрим конечную сумму вида $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta z_k$. Где ξ_k — произвольная точка на дуге $z_{k-1}\breve{}z_k$. $\xi_k = \nu_k + i\eta_k$. $\Delta z_k = z_k - z_{k-1} = (x_k - x_{k-1}) + i(y_k - y_{k-1}) = \Delta x_k + i\Delta y_k$. Обозначим $\lambda = \max\limits_{k=\overline{1,n}} |\Delta z_k|$

Определение. Если существует конечный предел последовательности интегральных сумм S_n, при $n \to \infty$, $\lambda \to 0$, не зависящий от способа разбиения $\{z_k\}$ и выбера точек $\{\xi_k\}$, то его называют интегралом от функции $f(z)$ по кривой γ, и обозначают:

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz \overset{def}{=} \lim_{\substack{n \to \infty \\ \lambda \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta z_k \tag{2.6}$$

Теорема. *Если функция $f(z)$ непрерывна на кусочно-гладкой кривой γ, то существует интеграл $\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz$.*

Доказательство. Преобразуем интегральную сумму

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta z_k = \\ &= \sum_{k=1}^{n} (u(\nu_k, \eta_k) + iv(\nu_k, \eta_k))(\Delta x_k + iy_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} (u(\nu_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\nu_k, \eta_k)\Delta y_k) + i(v(\nu_k, \eta_k)\Delta x_k + u(\nu_k.\eta_k)\Delta y_k) \end{aligned}$$

Заметим что $Re\, S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u(\nu_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\nu_k, \eta_k)\Delta y_k$ и $Im\, S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} v(\nu_k, \eta_k)\Delta x_k + u(\nu_k.\eta_k)\Delta y_k$ — это интегральные суммы для криволинейного интеграла второго рода: $\int\limits_{\gamma} u(x,y)\, dx - v(x,y)\, dy$, $i\int\limits_{\gamma} v(x,y)\, dx + u(x,y)\, dy$.

В приделе при $\lambda \to 0$ по свойствам КИВР получим:

$$\exists \int\limits_{\gamma} f(z)\, dz = \int\limits_{\gamma} u(x,y)\, dx - v(x,y)\, dy + i\int\limits_{\gamma} v(x,y)\, dx + u(x,y)\, dy \tag{2.7}$$

□

Свойства интеграла (2.7) (Следуют из свойств К.И.В.Р.):

1. $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = -\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz$

2. $\int\limits_{\gamma} (f(z) + g(z))\,dz = \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma} g(z)\,dz$

3. $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz$

4. $\int\limits_{\gamma} k \cdot f(z)\,dz = k \cdot \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz,\ \forall k \in \mathbb{C}$

5. $\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz\right| \le \int\limits_{\gamma} |f(z)| \cdot |dz|,\ |dz| = dl,\ |dz| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt = \sqrt{1 + (y'(t))^2}dx$

   Следствие: Если $|f(z)| \le M$ на γ, то $\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz\right| \le M \cdot L$.

Используя расчетные формулы для К.И.В.Р. можно записать:

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \\
&= \left\{ \begin{array}{c} dx = x'(t)\,dt \\ dy = y'(t)\,dt \\ t \in [\alpha, \beta] \end{array} \right\} = \\
&= \int\limits_{\alpha}^{\beta} (u(x(t), y(t))) \cdot x'(t) - v(x(t), y(t)\, y'(t))\,dt + \\
&+ i\int\limits_{\alpha}^{\beta} (v(x(t), y(t))) \cdot x'(t) + u(x(t), y(t)\, y'(t))\,dt \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

2.4.2 Вычисление К.И.В.Р.

Для вычисление К.И.В.Р. (2.7) необходимо:

1. Параметризовать кривую γ
2. Определить пределы для параметра t
3. Получить определенный интеграл (2.8).

....

2.4.3 Формула Грина

$$\oint\limits_{\gamma} P\left(x,y\right)dx + Q\left(x,y\right)dy = \iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

Теорема. *Если $f\left(z\right)$ непрерывна в $\overline{D}$, аналитичная в D, то для любого замкнутого контура $\gamma \subset D$*

$$\int\limits_{\gamma} f\left(z\right)dz = 0$$

Доказательство.

$$I = \int\limits_{\gamma} f\left(z\right)dz = \int\limits_{\gamma}\left(u+iv\right)d\left(x+iy\right) = \underbrace{\int\limits_{\gamma} udx - vdy}_{Re\ I} + i\underbrace{\int\limits_{\gamma} vdx + udy}_{Im\ I}$$

Найдем их:

$$Re\ I = \int\limits_{\gamma} udx - vdy = |\text{По формуле Грина}| = \iint\limits_{D^*}\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy =$$

$$= |\text{условие Коши-Римана}| = -\iint\limits_{D^*}\underbrace{\left(-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{0}dxdy = 0$$

Аналогичные рассуждения для мнимой части, и их сумма равна нулю. □

2.4.4 Формула Грина для многосвязной области.

Рассмотрим функцию $f\left(z\right) = \frac{1}{z}$, определенную на множествах:

1. $D_1 = \left\{z \middle| \ |z| < 2\right\}$
2. $D_2 = \left\{z \middle| \ \frac{1}{2} < |z| < 2\right\}$

$\gamma = \left\{z \middle| \ |z| = 1\right\} \subset D_1, \ \subset D_2$

$$I = \int\limits_{\gamma} f\left(z\right)dz = \int\limits_{\gamma}\frac{dz}{z} = \int\limits_{0}^{2\pi}\frac{de^{i\varphi}}{e^{i\varphi}} = \int\limits_{0}^{2\pi}\frac{ie^{i\varphi}d\varphi}{e^{i\varphi}} = 2\pi i$$

....

Теорема (Коши для многосвязной области)**.** *Пусть область D — многосвязна, ограниченная составным контуром $\Gamma = \gamma \cup \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_n$, функция $f\left(z\right)$аналитична в D, непрерывна в $\overline{D}$. Тогда*

$$\int\limits_{\Gamma} f\left(z\right)dz = \int\limits_{\gamma\cup\gamma_1\cup\ldots\cup\gamma_n} f\left(z\right)dz = 0$$

Доказательство. Воспользуемся методом перемычек, а именно произведем n разрезов c_i области D, связывающих границу γ с комкомпонентами γ_i, $i=\overline{1,n}$, получим односвязную область, с границей $\gamma \cup c_1^- \cup \gamma_1 \cup c_1^+ \cup \ldots$ Тогда по теореме Коши для односвязной области:

$$\int\limits_{\gamma\cup\gamma_1\cup\ldots\cup\gamma_n} f(z)\,dz = 0$$

□

2.4.5 Неопределенный интеграл

Пусть $f(z)$ аналитична в области D. Рассмотрим две произвольные точки z_0и $z_1 \in D$, и две линии c_0 и c_1, соединяющих их ориентировано из z_0 в z_1. Так как $f(z)$ аналитична в D, то по теореме Коши:

$$\int\limits_{c_1\cup c_0^-} f(z) = \int\limits_{c_1} f(z)\,dz - \int\limits_{c_0} f(z)\,dz = 0$$

Обозначим $F(z) = \int\limits_c f(z)\,dz$ где

Теорема. *Пусть $f(z)$ определена и непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$, и $\forall$ замкнутого контура $\gamma \in D$*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0$$

Тогда $F(z) = \int\limits_c f(\xi)\,d\xi$ — аналитическая функция, где c — произвольный контур, соединяющий z_0 и z.

Доказательство. Рассмотрим разностное отношение:

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)\,d\xi$$

Так как $\int\limits_{z}^{z+\Delta z} d\xi = \Delta z$, то

$$\left|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)\,d\xi - \frac{f(z)}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} d\xi\right| =$$

$$= \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int\limits_{z}^{z+\Delta z}(f(\xi) - f(z))\,d\xi\right| \le \frac{1}{|\Delta z|}\int\limits_{z}^{z+\Delta z}|f(\xi) - f(z)|\cdot|d\xi| \le$$

$$\le \frac{1}{|\Delta z|}\cdot \max|f(\xi) - f(z)|\cdot|\Delta z|$$

Так как $f(z)$ — непрерывная функция, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon, z) > 0 \quad \forall \xi \quad |z - \xi| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(\xi) - f(z)| < \varepsilon$$

Выбрать Δz так, что $|\Delta z| < \delta$, получим:

......

$\square$

Определение. $F(z)$ называется превообразной для $f(z)$ на D, если

$$\forall z \in D \quad F'(z) = f(z)$$

Определение. Совокупность всех первообразных для $f(z)$ называется неопределенным интегралом

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi + c$$

Лемма.

$$\int\limits_{z_0}^{z_1} f(\xi)\, d\xi = F(z)|_{z_0}^{z_1} = F(z_1) - F(z_0)$$

где $F(z)$ — одна из первообразных $f(z)$.

2.5 Интегральная формула Коши

Если функция $f(z)$ непрерывна на замыкании области D и аналитична в области D, то

$$\forall z \in D \ f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{f'(\xi)}{\xi - z} d\xi \tag{2.9}$$

Где C — положительно ориентированый контур, замкнутый, содержащий внутри точку z.

Доказательство. Преобрахуем правую часть формулы (1).

$$I = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{dS}{\xi \cdot z}}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi \cdot z} d\xi}_{I_2}$$

Докажем, что $I_1 = f(z)\,,\ I_2 = 0$.

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{f(z)}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{d\xi}{\xi - z} = \frac{f(z)}{2\pi i} \int\limits_{C_R} \frac{d\xi}{\xi - z} = \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \xi \in C_R \implies \\ \xi = z + R \cdot e^{i\varphi},\ \varphi \in [0; 2\pi] \end{array} \right\} = \\ &= \frac{f(z)}{2\pi i} \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{R \cdot i \cdot e^{i\varphi}}{R \cdot e^{i\varphi}} = f(z) \end{aligned}$$

...аналитична в области, с границей $C_R \cup C$

$I_2 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\xi)\, f(z)}{\xi - z}d\xi = \{\text{Теорема Коши}\} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}d\xi$, причем не зависит от выбора R.

Оценим $|I_2|$.

$$
\begin{aligned}
|I_2| &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left| \int\limits_{C_R} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \right| \le \frac{1}{2\pi} \cdot \int\limits_{C_R} \frac{|f(\xi) - f(z)|}{|\xi - z|} |d\xi| \le \\
&\le \left\{ \begin{array}{c} f(\xi) - \text{непрерывная на } C_R \Longrightarrow \\ |f(\xi) - f(z)| \text{ так непрерывна на } C_R \Longrightarrow \\ \exists \max |f(\xi) - f(z)| = M \end{array} \right\} \le \\
&\le \frac{M}{2\pi R} \int\limits_{C_R} |d\xi| \le \\
&\le \left\{ \int\limits_{C_R} |d\xi| = 2\pi r - \text{длинна окружности } C_R \right\} \le \\
&\le \max_{\xi \in C_R} |f(\xi) - f(z)|
\end{aligned}
$$

Заметим, что при $R \to 0 \quad \xi \to z \Longrightarrow f(\xi) \to f(z)$так как $f(\xi)$ непрерывна на $\overline{D}$.

Таким образом $0 \le |I_2| \le \max\limits_{\xi \in C_R} |f(\xi) - f(z)|$. $\max\limits_{\xi \in C_R} |f(\xi) - f(z)| \to 0 \Longrightarrow I_2 = 0$. □

Теорема. *Следствие. Теорема о среднем.*

Пусть $f(\xi)$ непрерывна на $\overline{S_R} = \{\xi |\, |\xi - z| \le R\}$ и аналитичная в круге $S_R = \{\xi |\, |\xi - z| < R\}$.

Тогда значчение $f(z)$ равно среднему ее значению на окружности C_R.

Доказательство. По (1):

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \\
&= \left\{ \begin{array}{c} \xi = z + Re^{i\varphi} \\ d\xi = iRe^{i\varphi} d\varphi \end{array} \right\} = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z + Re^{i\varphi})\, iRe^{i\varphi} d\varphi}{Re^{i\varphi}} = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} ...
\end{aligned}
$$

С помощью фолрмулуы (1) можно вычислять некоторые интегралы от функциии многих переменных. □

Теорема. *Пусть функция $f(z)$ непрерывна на $\overline{D}$ и аналитична в тобласти D. Тогда либо $|f(z)| = const$ на $\overline{D}$, либо $\max\limits_{z\in\overline{D}} |f(z)|$ достигается нба границахъ области D.*

Доказательство. Так как $f(t)$ непрерынат на $\overline{D}$, то $f(z) = u+iv$, где $u(x,y)$ и $v(x,y)$ — непрерыны на $\overline{D} \Longrightarrow |f(z)| = \sqrt{u^2+v^2}$ — непрерына на $\overline{D} \Longrightarrow$ по Теореме Вейерштрассе $\exists z_0 \in \overline{D}$, что $|f(z_0)| = \max\limits_{\overline{D}} |f(z)| = M$

1. z_0 — внутренняя точка области $D \Longrightarrow$

   $z_0 \in D$

   $\exists r > 0 \; C_r = \{\xi \,|\, |\xi - z_0| = r\} \subset D$

   $M = |f(z_0)| = \{\text{Теорема о среднем}\} = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{i\varphi}\right) d\varphi$

□

2.6 Производные высших порядков

Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D. Рассмотрим произвольную точку $z \in D$. Окружим ее замкнутым положительно ориентированным контером C. Тогда по итерратльной формуле Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

К интегралу правой части ..., зависящий от параметра z,...

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f(\xi)}{\xi - z}\right) d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$$

Для $f^{(n)}(z)$ выполняется:

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi \qquad (2.10)$$

Пример. Вычислить:

$$I = \int\limits_{|z-\pi|=1} \frac{\cos\xi}{(\xi - \pi)^3} d\xi$$

Так как точка $z = \pi$ внутри контера C и кроме того в качестве функциии $f(\xi) = \cos\xi$(cos всюдуаналитична), то можем записать:

$$\begin{aligned}
\int\limits_C \frac{\cos\xi}{(\xi-\pi)^3} d\xi &= \left\{ \begin{array}{c} n = 2 \\ (2.10) \end{array} \right\} = \\
&= \frac{2\pi i}{2!}\left(\cos\xi\right)''|_{\xi=\pi} = \\
&= \pi i\left(-\cos\pi\right) = \\
&= \pi i
\end{aligned}$$

Замечание. Из доказанного следует, что производная от аналитической функции также аналитична.

Теорема (Морера). *Пусть функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области D и интеграл по функции $f(z)$ по любому замкнутому контеру $\gamma \in D$ равен нулю. Тогда $f(z)$ аналитична в области D.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi$, где z_0 — фиксированная точка в области D. $F(z)$ — игтеграл с переменным верхним пределом, причем он не зависит от предела интегрирования. Причем $F(z)$ является первообразной для $f(z)$, тоесть $F'(z) = f(z)$. (Так как производная от аналитической функции $(F(z))$ есть функция аналитическая, то $f(z)$ — аналитическая функция. □

Теорема (Лиувилля). *Пусть $f(z)$ — аналитическая на $\mathbb{C}$ функция, и $|f(z)|$ равномерно отграничена на $\mathbb{C}$. Тогда сама функция $f(z) \equiv const$.*

Доказательство. Используя формулу для проищводной $f'(z)$:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$$

Где $|\xi - z| = R$. Пусть $|f(z)|$ — равномерно ограничен на C, тоесть:

$$\exists M > 0 \ \ |f(z)| \leq M \ \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned}
|f'(z)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{C_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{C} \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z|^2} \cdot |d\xi| \leq \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^2} \int\limits_{C_R} |d\xi| = \\
&= \left\{ \int\limits_{C_R} |d\xi| = 2\pi R \right\} = \\
&= \frac{M}{R}
\end{aligned}$$

Итак $0 \leq |f'(z)| \leq \dfrac{M}{R}$, где $f'(z)$ нет зависит от выбора R. $\Longrightarrow |f'(z)| = 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$ и $f'(z) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C} \Longrightarrow f(z) = const$ □

3 Функциональные ряды

3.1 Равномерная сходимость функциональных рядов

Рассмотрим функциональную последовательность $\{u_n(z)\}$, определенную на области D. ВЫражение вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \tag{3.1}$$

называется функцфиональным рядом на области D, а

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} u_k(z) \tag{3.2}$$

называется n-ой частичной суммой ряда (3.1).

Заметим, что $\forall z \in D$ получается числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$, определенная в точке z.

Определение. Ряд (3.1) называется сходящимся в области D, если $\forall z \in D$ соответствующий кй числовой ряд сходится к некоторой своей сумме.

Функция $f(z)\,,\ z \in D$, называется суммой функционального ряда (3.1). При этом выполняется следующее утверждение:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(z, \varepsilon)\ \ \forall n \geq N\ \ |f(z) - S_n(z)| = \left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} u_k(z) \right| < \varepsilon$$

Обозначим $R_n(z) = f(z) - \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(z) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(z)$ — n-ый остаток ряда (3.1).

Определение. Ряд (3.1) называется равномерно сходящимся к сумме $f(z)$ на oблласти D, если:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ \ \forall n \geq N\ \ \left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} u_k(z) \right| < \varepsilon\ \forall z \in D$$

Теорема (Критерий Коши)**.** *Функциональный ряд (3.1) сходится равномерно на D тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ \ \forall n \geq N\ \ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(z) \right| < \varepsilon\ \forall z \in D$$

Теорема (Признак Вейерштрассе)**.** *Если $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall z \in D\ \ |u_n(z)| \leq |a_n|$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ то ряд (3.1) сходится равномерно на области D.*

Доказательство. Так как ряд из $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ то по признаку Коши сходимости числовых рядов мы можем записать:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \ \ \forall n \geq N \ \forall p \in \mathbb{N} \ \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$$
$$\Downarrow$$
$$\forall z \in D \ \left| \sum_{k=1+n}^{n+p} u_k(z) \right| \leq \sum_{k=1+n}^{n+p} |u_k(z)| \leq$$
$$\leq \{\text{По предположению теоремы}\} \leq \sum_{k=1+n}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$$

□

3.2 Свойства равномерно сходящийся функциональных рядов

Теорема (1). *Если функции $u_n(z)$ непрерывны на D, где $n \in \mathbb{N}$, а ряд (3.1) сходится равномерног в функции $f(z)$ на области D, то $f(z)$ также непрерывна на области D.*

Доказательство. Из равномерной сходимостти ряда (3.1) к $f(z)$ следует, что:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \ \ \forall n \geq N \quad \begin{array}{r} \forall z \in D \ \left| f(z) - \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(z) \right| < \dfrac{\varepsilon}{3} \\ \forall z + \Delta z \in D \ \left| f(z + \Delta z) - \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(z + \Delta z) \right| < \dfrac{\varepsilon}{3} \end{array}$$

Так как $u_k(z)$ непрерывны на D, $k \in \mathbb{N}$, то конечная сумма $S_N(z) = \sum\limits_{k=1}^{N} u_k(z)$ — также непрерывна на D, а следовательно и в точке z. Следовательно для выбранного $\varepsilon > 0$ и полученного по нему N получим:

$$\exists \delta = \delta(\varepsilon) \ \ \forall \Delta z \ \ |\Delta z| < \delta \Longrightarrow |S_N(z + \Delta z) - S_N(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Следовательно:

$$\begin{aligned} |f(z + \Delta z) - f(z)| &= |(f(z + \Delta z) - S_N(z + \Delta z)) + (S_N(z + \Delta z) - S_N(z)) + (S_N(z) - f(z))| \leq \\ &\leq |f(z + \Delta z) - S_N(z + \Delta z)| + |S_N(z + \Delta z) - S_N(z)| + |S_N(z) - f(z)| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) \ \ \forall \Delta z \ \ |\Delta z| < \delta \Longrightarrow |f(z + \Delta z) - f(z)| < \varepsilon$$

□

Теорема (2). *Если функциональный ряд (3.1) из непрерывных на D функций сходится равномерно сходится равномерно на области D, то его можно полчеленно интегрировать по любому контуру $\gamma \subset D$.*

$$\int\limits_{\gamma} f(\xi)\, d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\gamma} u_n(\xi)\, d\xi$$

Доказательство. Оценим модуль разности:

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{\gamma} f(\xi)\,d\xi - \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\gamma} u_k(\xi)\,d\xi\right| &= \left|\int\limits_{\gamma}\left(f(\xi) - \sum_{k=1}^{n} u_k(\xi)\right)\right| \le \\ &\le \int\limits_{\gamma}\left|f(\xi) - \sum_{k=1}^{n} u_k(\xi)\right|\cdot|d\xi| \le\end{aligned}$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z) \rightrightarrows f(z)$ на D, тоесть $\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \ge N\ \left|f(z) - \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(z)\right| < \dfrac{\varepsilon}{L}$, где L — длинна дуги

$$\begin{aligned}&\le \frac{\varepsilon}{L}\cdot\int\limits_{\gamma}|d\xi| = \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

Итак $\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ \ \forall n \ge N\ \ \left|\int\limits_{\gamma} f(\xi)\,d\xi - \sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{\gamma} u_k(\xi)\,d\xi\right| < \varepsilon$ □

Теорема (3, первая теореа Вейерштрассе)**.** *Пусть функции $u_n(z)$ аналитичны в области D, а функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно к функции $f(z)$ на любой замкнутой подобласти $\overline{D'} \subseteq D$. Тогда выполняются утверждения:*

1. *$f(z)$ аналитична на области D.*
2. *$f^{(k)}(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z)$, $k \in \mathbb{N}\quad \forall z \in D$*
3. *$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z) \rightrightarrows f^{(k)}(z)$ на любой замкнутой подобласти $\overline{D'} \subseteq D$*

Доказательство. Докажем каждое утверждение.

1. Рассмотрим любую точку $z_0 \in D$.

   Возьмём замкнутую подобласть $\overline{D'} \subseteq D$, такую что $z_0 \in \overline{D'}$.

   По теореме 1: сумма $f(z)$ непрерывна на $\overline{D'}$. ($u_n(x)$ аналитичны, и следовательно непрерывны на $\overline{D'}$).

   Пусть $C \subset \overline{D'}$ — замкнутый контур.

   По теореме 2:

$$\begin{aligned}\int\limits_{C} f(\xi)\,d\xi &= \int\limits_{C} u_n(\xi)\,d\xi = \{\text{Теорема 2}\} = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\int\limits_{C} u_n(\xi)\,d\xi = \\ &= \{\text{Теорема Коши}\} = \\ &= 0\end{aligned}$$

Так как $C \subset \overline{D'}$ — произвольный замкнутый контур, то по теореме Момрера $f(z)$ аналитична в области $\overline{D'}$, следовательно и в z_0 — произвольной точке из D.

Замечание. Обтаток $R_n(z) = f(z) - S_n(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$. Тут все аналитично.

2. Зафиксируем точку $z_0 \in \overline{D'}$.

   Окружим точку z_0 замкнутым контуром C и d — это минимум расстояния до точки z_0.

$$d = \min_{z \in C} |z_0 - z|$$

   Рассмотрим ряд

$$\frac{f(z)}{(z_0 - z)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \tag{3.3}$$

   Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z) \rightrightarrows$ на $\overline{D'}$ и $\dfrac{1}{|z - z_0|^{k+1}} \leq \dfrac{1}{d^{k+1}}$, то ряд в (3.3) сходится равномерно на $\overline{D'}$.

   Следлвательно по теореме 2:

$$\begin{array}{ccc}
\displaystyle\int\limits_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz & = & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_C \frac{u_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \\
\Downarrow & \left\{ \begin{array}{c} \text{Формула для производных высших порядков} \\ f^{(k)}(z_0) = \dfrac{k!}{2\pi i} \int\limits_C \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \end{array} \right\} & \Downarrow \\
\dfrac{2\pi i}{k!} f^{(k)}(z_0) & = & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi i}{k!} u_n^{(k)}(z_0)
\end{array}$$

   Следовательно $f^{(k)}(z_0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z_0), \quad \forall z_0 \in D$, следовательно поточечьная сходимость есть.

3. Рассмотрим подобласть $\overline{D'} \subset D$, $z_0 \in \overline{D'}$ и построим в области D замкнутый контур C, содержащий внутри себя область $\overline{D'}$, такое что $\exists d > 0 \quad d = \min\limits_{\substack{z \in \overline{D'} \\ \xi \in C}} |z - \xi|$.

   Так как остаток $R_n(z) = \sum\limits_{m=n+1}^{\infty} u_m(z)$ — аналитическая функция на области D, то

$$\begin{aligned}
\forall z_0 \in \overline{D'} \; R_n^{(k)}(z_0) &= \{\text{Интегральная формула Коши}\} = \\
&= \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_C \frac{R_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz
\end{aligned}$$

   Где $R_n^{(k)}(z)$ — остаток ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z)$.

Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно, то

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ \ \forall n \geq N\ \forall z \in C\ \ |R_n(z)| < \frac{\varepsilon \cdot 2\pi \cdot d^{k+1}}{k! \cdot L}$$

где $L = |C|$ — длина контура C.

Тогда $\left| R_n^{(k)}(z_0) \right| \leq \dfrac{k!}{2\pi i} \cdot \dfrac{\varepsilon 2\pi d^{k+1}}{d^{k+1} \cdot k! \cdot L} \int\limits_C |dz| = \varepsilon$

□

Определение. Функциональный ряд вида .

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{3.4}$$

где $c_n \in \mathbb{C},\ z_0 \in \mathbb{C}$ — фиксированная, называется степенным рядом в окресности точки z_0.

Так как члены ряда (3.4) $u_n = C_n (z - z_0)^n$ — аналитические функции, то можно исследовать ряд (3.4) с использванием доказанных в преведущем пункте теорем.

Теорема (Абеля)**.** *Если степенной ряд (3.4) сходится в точке $z_1 \neq z_0$, то он сходится абсолютно $\forall z : |z - z_0| < |z_0 - z_1|$ и равномерно в круге $|z - z_0| \leq \rho < |z_1 - z_0|$.*

Доказательство. Докажем 2 утверждения.

1. Пусть z — произвольная точка, такая что $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ и рассмотрим ряд (3.4). Обозначим $q = \dfrac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|} < 1$. Так как ряд (3.4) сходится в точке z_1, тоест сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n (z_1 - z_0)^n$, то по необходимому признаку сходимости часлового ряда должен стремиться к нулю. $\lim\limits_{n\to\infty} C_n (z_1 - z_0)^n = 0 \Longrightarrow$ последовательность $\{C_n (z_1 - z_0)^n\}$ бесконечно мала $\Longrightarrow$ она ограничена $\Longrightarrow \exists M > 0\ \ |C_n (z_1 - z_0)^n| = |C_n| \cdot |z_1 - z_0|^n \leq M \quad \forall n \Longrightarrow |C_n| \leq \dfrac{M}{|z_1 - z_0|^n}$.

   Исследуем ряд (3.4) на абсолютную сходимость:

   $$|u_n(z)| = |C_n| \cdot |z - z_0|^n \leq M \left(\frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|} \right)^n = M \cdot q^n$$

   Это n-ый член сходящийся числовой прогрессии. $\Longrightarrow$ по призаку сравнения сходится знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |C_n (z - z_0)^n| \Longrightarrow$ Ряд (3.4) сходится абсолютно.

2. Так как $\forall z : |z - z_0| \leq \rho < |z_1 - z_0|$.

   $|u_n(z)| = |C_n| \, |z - z_0|^n \leq M \left(\dfrac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|} \right)^n \leq M \left(\dfrac{\rho}{|z_1 - z_0|} \right)^n = a_n$ Эта оценка не зависящая от z. $\Longrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ — сходящаяся мажоранта для ряда (3.4) в рассматриваемом замкнутом круге. $\Longrightarrow$ В этом круге ряд (3.4) схордится равномерно.

$\square$

Следствие 1. Если ряд (3.4) расходится в точке z_0, то он расходится влюбой точке z , такой что $|z - z_0| > |z - z_1|$.

Доказательство. Доказательство. От противного. $\square$

Пусть R — тотчная верхняя грань всех таких значений $|z - z_0|$, что ряд (3.4) сходится в точке z.

Следствие 2. Для любого степенного ряда существует такое R, что в круге $|z - z_0| < R$ ряд (3.4) сходится абсодютно, а вне круга ряд расходится.

Определение. Область $|z - z_0| < R$ называется кругом сходимости ряда (3.4), а число R — конечное или бесконечное — радиусом сходимости ряда (3.4).

Так как $u_n(z) = C_n(z - z_0)^n$ — аналитические функции, то по перваой теореме Вейерштрассе в области равномерной сходимости этого ряда сумма $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$ — аналитическая функция в круге $|z - z_0| < R$.

Следствие 3. Внутри круга $|z - z_0| < R$ ряд (3.4) сходится к аналитической функции и внутри круга $|z - z_0| < R$ ряд (3.4) можно почленно дифференцировать и интегрировать любое число раз.

Следствие 4. $\forall n\ C_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Доказательство. Из формулы (3.4) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n \Longrightarrow f(z_0) = C_0 \Longrightarrow C_0 = \dfrac{f^{(0)}(z_0)}{0!} = f(z_0)$

$f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n \cdot n \cdot (z - z_0)^{n-1} \Longrightarrow f'(z_0) = C_1 \cdot 1 \Longrightarrow C_1 = \dfrac{f'(z_0)}{1!}$

И так далее..

$f^{(k)}(z) = \sum\limits_{n=k}^{\infty} C_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (z - z_0)^{n-k} \Longrightarrow f^{(k)}(z_0) = C_k \cdot k \cdot (k-1) \ldots z \cdot 1 = C_k \cdot k! \Longrightarrow C_n = \dfrac{f(z_0)}{n!}$. $\square$

Следствие 5. (Коши) $R = \dfrac{1}{\overline{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}} \sqrt[n]{|C_n|}}$. Без доказательства.

Можно находить R при помиощи признака Даламбера сходимости знакоположительного ряда. Для абсолютной сходимсоти ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ исследуется ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot |z - z_0|^n$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|\,|z - z_0|^{n+1}}{|c_n|\,|z - z_0|^n} = \\
&= |z - z_0| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \\
&= R
\end{aligned}$$

3.3 Ряд Тейлора

Мы доказали что внутри круга сходимсоти степенной ряд определяет аналитическую функцию. Верно и обратное утверэдение:

Теорема. *Функция $f(z)$ аналитическая внутри круга $|z-z_0|<R$ может быть представлена в этом круге сходящимся степенным рядом:*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

причем это представление единственно.

Доказательство. Возьмем производную точку z такую что $|z-z_0|<R$. Рассмотрим окружность $C_\rho=\{\xi|\,|\xi-z_0|=\rho<R\}$.

По интегральной формуле Коши:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\rho \tag{3.5}$$

Преобразуем:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\xi-z} &= \frac{1}{\xi-z_0-(z-z_0)}= \\
&= \frac{1}{\xi-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}}= \\
&= \left\{\begin{array}{c}\left|\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}\right|<1\\ \dfrac{1}{1-t}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}t^n\end{array}\right\}= \\
&= \frac{1}{\xi-z_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n= \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

так как $\left|\dfrac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}\right|=\dfrac{|z-z_0|^n}{|\xi-z_0|^{n+1}}=\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{|z-z_0|}{\rho}\right)^n$ — члены сходящегося числового ряда, следовательно ряд (3) допускает сходящуюся мажоранту (равномерная оценка не зависит от ξ) следовательно ряд сходится равномерно на C_ρ, следовательно почленным интегрированием по контуру C_ρполучим:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho}f(\xi)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi= \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi\,(z-z_0)^n= \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n
\end{aligned}$$

где $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, $n = 0, 1, \ldots$

Единственность разложения следует из однозначности коэфикиентов $\{c_n\}$. $\square$

....

Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D.

Определение. Точка $z_0 \in D$ называется нулем функции $f(z)$, если $f(z_0) = 0$.

Используя разложение:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

получим $f(z_0) = c_0 = 0$

Определение. Точка $z_0 \in D$ называется нулем k-ого порядка функции $f(z)$ если $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ и $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Для нуля k-ого порядка из разложения $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ получим:

$f'(z_0) = 0 \Longleftrightarrow c_0 = 0$

$f'(z_0) = 0 \Longleftrightarrow c_1 = \dfrac{f'(z_0)}{1!} = 0$

$\vdots$

$c_{k-1} = \dfrac{f^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!} = 0$

$c_k = \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \\ &= (z - z_0)^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_{k+n} (z - z_0)^n = \\ &= (z - z_0)^k \cdot \varphi(z) \end{aligned}$$

где $\varphi(z)$ — аналитическая функция $\varphi(z_0) \neq 0$.

Теорема. *Пусть $f(z)$ аналитична в области D, и обращается в 0 в точках z_k, $k = 1, 2 \ldots$. Если последовательность $\{z_k\}$ имеет конечную предельную точку $z_0 \in D$, то $f(z) \equiv 0$ на D.*

Доказательство. Обозначим $R = dist(z_0, \partial D) \Longrightarrow$ в круге $|z - z_0| < R$ $f(z)$ — аналитиччна, а следовательно раскладывается в ряд Тейлора:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

$\square$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, то

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} f(z_k) &= \left\{ \begin{array}{c} \text{аналитичность} \Longrightarrow \text{непрерывность в } z_0 \\ \text{По Тейлору} \end{array} \right\} = \\
&= f(z_0) = 0
\end{aligned}$$

Следовательно z_0 это ноль функции $f(z)$, следовательног можно сказать, что $f(z) = (z - z_0)\varphi_1(z)$ где $\varphi_1(z)$ — аналитическая функция в том же самом круге.

Так как $\forall k\ z_k \neq z_0$, то $f(z_k) = (z_k - z_0)\varphi_1(z_k) = 0 \iff \varphi_1(z_k) = 0$.

Слежовательно аналогично преведущему: $\varphi_1(z) = (z - z_0)\varphi_2(z)$.

И так далее....

$\forall k = 1, 2 \ldots\ f(z) = (z - z_0)^k \varphi_k(z)$

$c_k = 0 \implies f(z) \equiv 0$ в круге.

Рассмотрим произвольную точку $z \in D$. СОеденим z_0 и z гладким контуром $\gamma \subset D$. Обозначим $d = \min \rho(\xi, \eta)$ В круге $S_d(z_0)$ $f(z) \equiv 0$ по доказанному выше. Так как точка $z_1 = \gamma \cap C_d(z_0)$ — предельная точка для функции $f(z)$, то в круге $S_d(z_1)$ $f(z) \equiv 0$ $z_2 = \gamma \cap C_d(z_1)$ и так далее за конесное число шагов:

$$z \in C_d(z_m) \Rightarrow f(z) = 0$$

Следствие. Если $f(z) \neq 0$ на D и аналитична то в любой пообласти области D множество нулей $f(z)$ на может быть бесконечным.

Доказательство. Небудет. □

Теорема (Единственности)**.** *Пусть $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в D и множество точек z_k, таких что $f(z_k) = g(z_k)$, $z_k \in D$, $k \in \mathbb{N}$ имеет предельную точку $z_0 \in D$. Тогда $f(z) \equiv g(z)$ на D.*

Доказательство. Расммотрим $h(z) = f(z) - g(z)$ — аналитичная функция на D, $h(z_k) = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_0 \in D \Longrightarrow$ По преведущей теореме $\Longrightarrow h(z) \equiv 0$ на $D \Longrightarrow f(z) \equiv g(z)$ на D. □

3.4 Ряд Лорана

Определение. Ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{3.7}$$

где $z_0 \in \mathbb{C}$ — фиксированная точка, c_n, $n \in \mathbb{Z}$ — коэффициенты, называется рядом Лорана.

Область сходимости ряда (3.7).

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} =
\end{aligned}$$

Суммы $f_1(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ и $f_2(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ называются правильной и главной частями ряда Лорана соответственно.

Так как правильная часть $f_1(z)$ — это ряд Тейлора. Он сходится в круге с центром в точке z_0 радиуса R_1.

Обозначим $\xi = \dfrac{1}{z-z_0}$, тогда $f_2(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}\xi^n$ — Это тоже ряд Тейлора, который сходится в некотором круге $|\xi| < \dfrac{1}{R_2}$.

$\dfrac{1}{|z-z_0|} < \dfrac{1}{R_2} \iff |z-z_0| > R_2$ — область сходимости главной части.

Следовательно областьюж сходимости ряда Лорана является кольцо: $R_2 < |z-z_0| < R_1$.

Заметим, что если $R_2 > R_1$, то ряд (3.7) нигде не сходится.

Теорема. *Функция $f(z)$, аналитическая в круговом кольце $R_2 < |z-z_0| < R_1$, однозначно представляется в этом кольце сходящимся рядом Лорана: $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$.*

Доказательство. Зафиксируем в кольце $R_2 < |z-z_0| < R_1$ произвольную точку z. Рассмотрим окружности $C_{R_1'}$ и $C_{R_2'}$ радиуса R_1 и R_2 с центром в точке z_0 так, что:

$$R_2 < R_2' < |z-z_0| < R_1' < R_1$$

По теореме Коши для многосвязной области:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{R_1'} \cup C_{R_2'}^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{R_1'}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{R_2'}^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \end{aligned}$$

Так как $C_{R_1'} \left|\dfrac{z-z_0}{\xi - z_0}\right| = q < 1$.

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z-z_0}{\xi - z_0}} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\xi - z_0}\right)^n$$

Так как степенной ряд сходится равномерно, то почленное интегрирование по контуру $C_{R_1'}$ дает следующее:

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{R_1'}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{C_{R_1'}} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \end{aligned}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{R'_1}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \tag{3.8}$$

где $n = 0, 1, \ldots$.

На $C_{R'_2}$: $\left|\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right| = q < 1 \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \\ &= -\frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}} = \\ &= \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)^n, \end{aligned}$$

Равномерно сходится, почленно интегририруя на $C_{R'_2}$,

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{R'_2}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2\pi i}\right) \int\limits_{C_{R'_2}} \frac{f(\xi)(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} d\xi = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{R'_2}} \frac{f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{R'_2}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \, (z - z_0)^n = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n, \end{aligned}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{R'_2}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \tag{3.9}$$

Заметим, что $\forall R \ : \ R'_2 < R < R'_1$ интегралы от наналитиченой функции $\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}$ по контурам $C_{R'_1} \cup C^-_{R_2}$ и $C_{R_1} \cup C^-_{R'_2}$. То $\int\limits_{C_{R'_1}} = \int\limits_{C_R}, \int\limits_{C_{R'_2}} = \int\limits_{C_{R_1}} \ldots$

Следовательно из (3.8) и (3.9) получим одну формулу: $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \ n \in \mathbb{Z}$, и $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$

Докажем единственность.

Пусть $f(z)$ допускает в кольце $R_1 < |z - z_0| < R_1$, дваразложения:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c'_n (z - z_0)^n$$

Домножим обе части равенства $(z - z_0)^{-m-1}$ проинтегрируем по контуру $C_R = \{\xi | \, |\xi - z_0| \, R, \; R_2 < R$

$\xi - z_0 = R \cdot e^{i\varphi} \implies \xi = z_0 + Re^{i\varphi}, \; \varphi \in [0; 2\pi] \; d\xi = R \cdot ie^{i\varphi}$.

Тогда $\int\limits_{C_R} (\xi - z_0)^{n-m-1} d\xi = \int\limits_0^{2\pi} R^{n-m-1} e^{i\varphi(n-m-1)} R \cdot i \cdot e^{i\varphi} = R^{n-m} i \int\limits_0^{2\pi} e^{i\varphi(n-m)} d\varphi = \begin{cases} 2\pi i, & m = n \\ 0, & n \neq m \end{cases}$ при

При почленном интегрировании получим $(n = m)$:

$$c_m \cdot 2\pi i = c'_m 2\pi i, \; \forall m \in \mathbb{Z}$$

$$c_m = c'_m \; \forall m \implies \text{разложение однозначн.}$$

□

3.5 Особые точки

Определение. Точка $z = a$ называется изолированной особой точкой функции $f(z)$ если существует выколотая окресность точки a:

$$0 < |z - a| < R$$

в которой функция $f(z)$ аналитична.

Обчедно, что такая окресность — часный слкучай кольца.

3.6 Поведение аналиттической функции в окрестности изолированной особой точки.

Если $f(z)$ — аналитична в выколотой окрестности точки z_0 и z_0 — у.о.т., то

$$\exists \lim_{z \to z_0} f(z) = A$$

где A — конечное число.

Доказательство. По определению у.о.т.

$$f(z) = c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \ldots + c_n (z - z_0)^n + \ldots$$

— Степенной ряд, — ряд Тейлора для $f(z)$, в некоторой окрестности точки z_0 и он сходится причем он в этой окрестности определяет аналитическую, а значит непрерывную функцию, следовательно $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c_0$ — конечный предел. □

Теорема (Следствие)**.** *Если точка z_0 — у.о.т функции $f(z)$, то в точке z_0 функцию $f(z)$ можно доопределить (переопределить) положив $f(z_0) = c_0$.*

Теорема. *Если z_0 — полюс порядка m функции $f(z)$, аналитичной в выколотой окрестности точки z_0, то*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$$

Доказательство. Пусть z_0 — полюс m-го порядка $f(z)$, то есть

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + $$
$$+ c_0 + c_1 (z-z_0) + \ldots + c_n (z-z_0)^n + \ldots =$$
$$= \frac{1}{(z-z_0)^m} \left(c_{-m} + c_{-m+1}(z-z_0) + \ldots\right) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$$

где $\varphi(z)$ — аналитическая функция в окрестности точки z_0, причем $\lim\limits_{z \to z_0} \varphi(z) = c_m \neq 0$, а тогда

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m} = \frac{c_m}{0} = \infty$$

□

Теорема (Сохоцкого)**.** *Если z_0 — с.о.т $f(z)$, аналитичной в выколотой окрестности точки z_0, то для любого чила $A \in \overline{\mathbb{C}}$, конечного или бесконечного, $\exists \{z_k\}$, $\lim\limits_{k \to \infty} z_k = z_0$, такая что $\lim\limits_{k \to \infty} f(z_k) = A$.*

4 Теория вычетов

4.1 Понятие вычета, расчетные формулы.

Пусть z_0 — и.о.т аналитичной функции $f(z)$ следовательно в некоторой окрестности точки z_0 $f(z)$ допускает разложение в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

где $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_c \dfrac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$, где c — замкнутый контур

4.2 Интегралы вида

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$$

Пусть функция вещественной переменной $y = f(x)$, определена на $(-\infty; +\infty)$.

Определение. Функция комплексной переменной $f(z)$ называется аналитическим продолжением функции $f(x)$ на верхнюю полуплоскость, если она аналитична на множестве $Im\ z > 0$ за исключением конечного числа ИОТ и $f(z) = f(x)$ при $z = x \in \mathbb{R}$.

Лемма. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в полуплоскости $Im\ z > 0$ за исключением конечного числа ИОТ и $\exists R_0,\ M,\ \delta > 0$, что*

$$\forall z \quad Im\ z > 0 \quad |f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}},\ |z| > R_0$$

Тогда

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C'_R} f(\xi)\, d\xi = 0 \qquad C'_R = \{z|\, |z| = R,\ Im\ z > 0\}$$

Доказательство. Рассмотрим при $R > R_0$

$$\left| \int\limits_{C'_R} f(\xi)\, d\xi \right| \le \int\limits_{C'_R} |f(\xi)| \cdot |d\xi| \le \frac{M}{R^{1+\delta}} \int\limits_{C'_R} |d\xi| = \frac{\pi M}{R^{\delta}}$$

При $R \to \infty$ $\square$

Теорема. *Пусть $f(x)$ определена при $x \in (-\infty; +\infty)$ и допускает аналитическое продолжение $f(z)$ на верхнюю полуплоскость $Im\ z > 0$, удовлетворяет условию предыдущей леммы, не имеющее особых точек на вещественной оси.*

Тогда несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ существует и вычет равен

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} res_{z=z_k}\ f(z)$$

где $z_1 \ldots z_n$ — все ИОТ $f(z)$ в $Im\ z > 0$

Доказательство. Пусть R_0 — фиксированное, такое что $|z_k| < R_0$. Возьмем $R > R_0$ произвольное. Рассмотрим замкнутый контур $C = C'_R \cup [-R; R]$ тогда по основной теореме теории вычетов

$$\int\limits_{C} f(\xi)\, d\xi = \int\limits_{-R}^{R} f(x)\, dx + \int\limits_{C'_R} f(\xi)\, d\xi = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} res_{z=z_k}\ f(z)$$

$\square$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{iax} dx = 2\pi i \sum \operatorname*{res}_{z=z_k} \left(f(z)\, e^{iaz}\right),\ \{z_k\}\ -\ \text{п.о.т. в } Im\, z \ge 0$$

Замечание. Если $f(x)$ четно и выполнены условия леммы Жордана для фцнуцйии $f(x)$, то если нужно найти интеграл:

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^\infty f(x)\cdot\cos ax\cdot dx &= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\cos ax\cdot dx = \\
&= \frac{1}{2}Re\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,e^{iax}dx = \\
&= \frac{1}{2}Re\left[2\pi i\sum_{k=1}^n \operatorname*{res}_{z=z_k}\left(f(z)\,e^{iaz}\right)\right] = \\
&= \{Re\, i\,(x+iy) = -y = -Im\,(x+iy)\} = \\
&= -\pi\cdot Im\sum_{k=1}^n \operatorname*{res}_{z=z_k}\left(f(z)\,e^{iaz}\right)
\end{aligned}$$

Замечание. Если $f(x)$ нечетно и выполнены условия леммы Жордана для фцнуцйии $f(x)$, то если нужно найти интеграл:

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^\infty f(x)\cdot\sin ax\cdot dx &= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\sin ax\cdot dx = \\
&= \frac{1}{2}Im\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,e^{iax}dx = \\
&= \frac{1}{2}Im\left[2\pi i\sum_{k=1}^n \operatorname*{res}_{z=z_k}\left(f(z)\,e^{iaz}\right)\right] = \\
&= \{Im\, i\,(x+iy) = x = Re\,(x+iy)\} = \\
&= \pi\cdot Re\sum_{k=1}^n \operatorname*{res}_{z=z_k}\left(f(z)\,e^{iaz}\right)
\end{aligned}$$

Пример. Разножить в ряд Лорана по степеням z функцию:

$f(z) = \dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$

Особые точки: $z = 1$ и $z = -2$.

1. $D_1\ :\ |z| < 1$

   $\dfrac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^\infty z^n,\ |z| < 1$

   $\dfrac{1}{1+z} = \sum\limits_{n=0}^\infty (-1)^n z^n$

   $f(x) = \dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{z+2}$

   $\dfrac{1}{z-1}$ Тут $|z| < 1$, пропускаем

$\frac{1}{z+2}$ Тут $2 > |z| \Longrightarrow$ Выносим 2.

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+2} = \\
&= \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \\
&= \left\{ \begin{array}{c} |z| < 1 \\ \left|\frac{z}{2}\right| < 1 \Longleftrightarrow |z| < 2 \end{array} \right\} = \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{2^n} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^{n+1} + (-1)^n}{2^{n+1}} \right) z^n
\end{aligned}$$

2. $D_2 \ : \ 1 < |z| < 2$

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+2} = \\
&= \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+z} = \\
&= \left\{ \begin{array}{c} \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Longleftrightarrow |z| > 1 \\ \left|\frac{z}{2}\right| < 1 \Longleftrightarrow |z| < 2 \\ 1 < |z| < 2 \end{array} \right\} = \\
&= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^n} = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

3. $D_3 \ : \ |z| > 2$

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+2}= \\
&= \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}+\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}}= \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \left|\frac{1}{z}\right|<1 \Longleftrightarrow |z|>1 \\ \left|\frac{2}{z}\right|<1 \Longleftrightarrow |z|>2 \end{array} \right\}= \\
&= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{z^n}= \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n 2^n}{z^{n+1}}= \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(1+(-1)^{n-1}2^{n+1}\right)z^n
\end{aligned}
$$

Содержание