

Вопросы к государственному экзамену
для направления 010400.62 Прикладная математика и информатика
в 2014-2015 учебном году.

Общематематические и естественнонаучные дисциплины

1. Первый замечательный предел. Его применение.
2. Интеграл с переменным верхним пределом. Теорема о непрерывности. Теорема о дифференцируемости.
3. Теорема Абеля о сходимости степенного ряда.
4. Приведение тройного интеграла к повторному.
5. Основная теорема теории вычетов.
6. Теорема Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.
7. Линейный оператор. Ядро и образ линейного оператора. Дефект и ранг линейного оператора. Матрица линейного оператора. Преобразования матрицы линейного оператора.
8. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Свойства собственных векторов.
9. Инварианты кривых второго порядка. Классификация кривых второго порядка по инвариантам.
10. Понятие массы и силы. Законы Ньютона. Закон всемирного тяготения.
11. Закон Ома для однородного и неоднородного участка цепи. Правила Кирхгофа.
12. Электронно-дырочный (p-n) переход. Выпрямляющие свойства p-n-перехода.
13. Метод Фурье решения задачи о свободных колебаниях струны с закрепленными концами.
14. Принцип максимума для уравнения теплопроводности и следствие из него.
15. Единственность решения внутренних краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона.
16. Устойчивость решения системы дифференциальных уравнений по Ляпунову. (Определение. Сведение исследования устойчивого ненулевого решения к исследованию нулевого решения. Лемма Ляпунова. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению).
17. Краевые задачи. (Альтернатива Фредгольма. Функция Грина и её свойства. Теорема о свойствах собственных значений и собственных функций линейной краевой задачи).
18. Формула Бернулли. Теорема Пуассона.
19. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
20. Выборочное среднее, свойства. Теорема об абсолютной корректности выборочной средней.
21. Обусловленность систем линейных алгебраических уравнений. Прямые методы решения СЛАУ (метод Гаусса, прогонки вращений). Итерационные методы решения СЛАУ.
22. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (методы Рунге-Кутты, Адамса, методы для жестких систем).
23. Выпуклые функции. Теорема Куна-Таккера.
24. Анализ и оптимизация сетевых графиков.
25. Матричные игры и их сведение к задачам линейного программирования.
26. Уравнения Эйлера и основная лемма вариационного исчисления.

№1. ПЕРВЫЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ. ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ. наверх

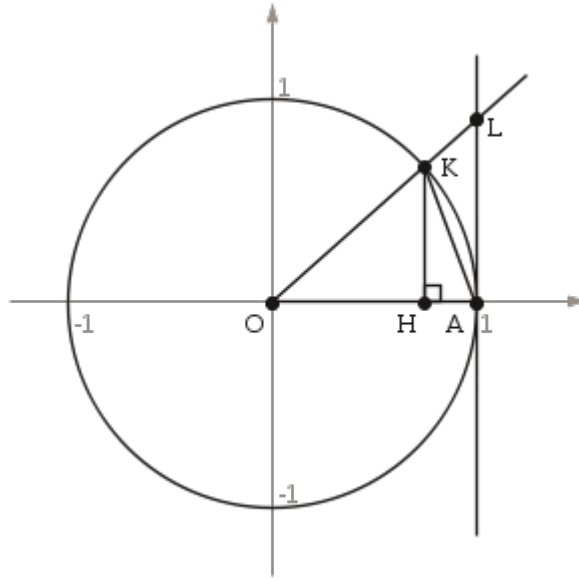
Определение: предел отношения синуса к его аргументу равен единице в случае, когда аргумент стремится к нулю.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Доказательство:

Рассмотрим односторонние пределы $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x}$ и $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin x}{x}$ и докажем, что они равны 1.

Пусть $x \in (0; \frac{\pi}{2})$. Отложим этот угол на единичной окружности ($R=1$).



Точка K — точка пересечения луча с окружностью, а точка L — с касательной к единичной окружности в точке $(1; 0)$. Точка H — проекция точки K на ось Ox .

Очевидно, что: $S_{\triangle OKA} < S_{\text{sect}OKA} < S_{\triangle OAL}$ (где $S_{\text{sect}OKA}$ — площадь сектора OKA).

$$S_{\triangle OKA} = \frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot |KH| = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{\sin x}{2}$$

$$S_{\text{sect}OKA} = \frac{1}{2} R^2 x = \frac{x}{2}$$

$$S_{\triangle OAL} = \frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot |LA| = \frac{\tan x}{2}$$

(из $\triangle OAL$: $|LA| = \tan x$)

Подставляя в (1), получим:

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}$$

Так как при $x \rightarrow 0+0$: $\sin x > 0$, $x > 0$, $\tan x > 0$:

$$\frac{1}{\tan x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$$

Умножаем на $\sin x$:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Перейдём к пределу:

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \cos x \leq \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0+0} 1$$

$$1 \leq \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Найдём левый односторонний предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Правый и левый односторонний пределы существуют и равны 1, а значит и сам предел равен 1.

Применение первого замечательного предела на практике.

Задание: найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{2x}$

Решение: воспользуемся заменой и первым замечательным пределом.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{2x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \left[\begin{array}{l} 4x = t \\ t \rightarrow 0 \\ x = \frac{t}{4} \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{2 \cdot \frac{t}{4}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{\frac{t}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin t}{t} = 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 2 \cdot 1 = 2.$$

Ответ: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{2x} = 2.$

Следствия из первого замечательного предела:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{arcctg } x}{x} = 1$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{x}} = 1$

№2. ИНТЕГРАЛ С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ. ТЕОРЕМА О НЕПРЕРЫВНОСТИ. ТЕОРЕМА О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ. наверх

Определение:

Пусть $D \subset \mathbb{R}$ и $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Функция f непрерывна в точке $x_0 \in D$, если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого

$$x \in D, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Если функция $y=f(x)$ интегрируема на промежутке $[a, b]$, тогда она интегрируема и на любом отрезке $[a, x]$, где $a \leq x \leq b$,

т.е. для любого x из $[a, b]$ имеет смысл интеграл $\int_a^x f(t) dt$,

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Рассмотрим функцию $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$, которое является функцией от x и называется интегралом с переменным верхним пределом.

Теорема о среднем значении: $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $m = \inf(f(x))$, $M = \sup(f(x))$, то существует $\mu \in [m, M]$ такое что,

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a)$$

Теорема (о непрерывности): Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то $\Phi(x)$, будет непрерывной функцией на $[a, b]$.

Док-во: пусть $x \in [a, b]$, тогда $x + \Delta x \in [a, b]$.

$$\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt$$

$f(x)$ – интегрируема \Rightarrow ограничена на $[a, b]$ $m \leq f(x) \leq M$. По теореме о среднем значении, существует $\mu \in [m, M]$. \Rightarrow

$$\Delta\Phi = \mu \int_x^{x+\Delta x} dx = \mu \Delta x$$

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta\Phi = \mu \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0$, при $\Delta x \rightarrow 0$. Это есть определение непрерывности в точке в разностной форме.

Теорема (о дифференцируемости): Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$, то функция $\Phi(x)$ дифференцируема на $[a, b]$, причем $\Phi'(x) = f(x)$ для любого x из $[a, b]$.

$$\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt$$

Док-во: аналогично доказательству предыдущей теоремы получим:

теореме о среднем, существует $c \in [x, x + \Delta x]$. $\Delta\Phi = f(c) \cdot \Delta x \Rightarrow \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(c)$, при $\Delta x \rightarrow 0$:

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$x \quad x \quad x$ по теореме о промежуточном значении. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} c = x$, при $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow$ существует $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) =$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \Phi'(x) = f(x)$$

$f(x)$, таким образом

ЧТД.

Функция $F(x)$, дифференцируемая на x , называется первообразной для $f(x)$ на промежутке X , если для любого x из X $F'(x) = f(x)$. Множество всех первообразных для функции $f(x)$ на x называется неопределенным интегралом от $f(x)$.

№3. ТЕОРЕМА АБЕЛЯ О СХОДИМОСТИ СТЕПЕННОГО РЯДА. наверх

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (1)$$

Для определения области сходимости степенного ряда, представим доказательство теоремы Абеля.

Теорема (Абеля): В случае, когда степенной ряд (1) сходится при $x = x_1 \neq 0$, можно заключить, что он абсолютно сходится $\forall x : |x| < |x_1|$. При расхождении ряда (1) в точке $x = \bar{x}_1$ он расходится $\forall x : |x| > |\bar{x}_1|$.

Доказательство:

Предположим, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ сходится, соответственно $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x^n = 0$.

Учитывая то, что функция, обладающая пределом, является ограниченной, можно обозначить

$$\exists M > 0 : |n x_1^n| < M \forall n.$$

Представим ряд (1) в следующем виде

$$a_0 + a_1 x_1 \frac{x}{x_1} + a_2 x_1^2 \left(\frac{x}{x_1}\right)^2 + \dots + a_n x_1^n \left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \dots$$

Для ряда, составленного из абсолютных величин его членов

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |x_1|^n \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \quad (2)$$

запишем

$$|a_n| |x_1|^n \left|\frac{x}{x_1}\right|^n < M \left|\frac{x}{x_1}\right|^n,$$

при этом геометрическая прогрессия $\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$ сходится при $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$.

Получается, что, если $|x| < |x_1|$, в соответствии с первым признаком сравнения, ряд (2) сходится, то по признаку абсолютной сходимости ряд (1) сходится абсолютно.

Далее предположим, что при $x = \bar{x}_1$ ряд (1) расходится. Допустим, что смысл теоремы противоположен:

$$\exists x_1 : |x_1| > |\bar{x}_1|,$$

при нем ряд (1) сходится. Однако в соответствии с представленным ранее доказательством ряд (1) предполагает сходимость в т. \bar{x}_1 . Данное противоречие доказывает теорему.

ч.т.д.

Заметка (на доп. вопросы):

Пусть имеются два строго положительных ряда

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ и } B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (\forall n \in \mathbb{N} : a_n > 0, b_n > 0)$$

Первый признак сравнения.

Если $a_n \leq b_n, n = m+1, m+2, \dots$ ($m \geq 0, m \in \mathbb{Z}$), то из сходимости ряда В следует сходимость ряда А,
а из расходимости ряда А следует расходимость ряда В.

Второй признак сравнения (предельный признак сравнения).

Пусть А и В – знакоположительные ряды и

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \quad (l \neq 0, l \neq \infty).$$

Тогда ряды А и В сходятся или расходятся одновременно.

Третий признак сравнения.

Пусть А и В – знакоположительные ряды и

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Тогда из сходимости ряда В следует сходимость ряда А, а из расходимости ряда А следует расходимость ряда В.

№4. ПРИВЕДЕНИЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА К ПОВТОРНОМУ. [наверх](#)

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz$$

$u = f(x, y, z)$ – подынтегральная функция трёх переменных;
 T – область интегрирования.

Для того чтобы выяснить *порядок обхода тела* и перейти к **повторным интегралам** нужно понять, что это за тело. Для этого используются различные проекции.

Примеры приведения

1. Предположим, что функция $f(x, y, z)$ непрерывна в рассматриваемой области T .

Пусть сначала $T = [a, b; c, d; e, f]$ - **прямоугольный параллелепипед**, проектирующийся на плоскость YZ в прямоугольник $R = [c, d; e, f]$. Тогда

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \iint_R f(x, y, z) dy dz. \quad (1)$$

Заменяя в (1) двойной интеграл повторным, получим

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f(x, y, z) dz. \quad (2)$$

Вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению трёх определённых интегралов.

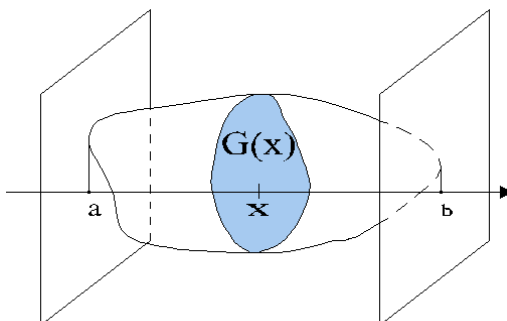
Если первые два интеграла в (2) объединить в двойной, то будем иметь

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \iint_P dx dy \int_e^f f(x, y, z) dz, \quad (3)$$

где $P = [a, b; c, d]$ - проекция параллелепипеда T на плоскость XY .

Заметим, что в этих случаях можно менять роли переменных.

2. Пусть область T заключена между плоскостями $x = a$ и $x = b$, причём каждое сечение области T плоскостью представляет собой **квадрируемую фигуру** $G(x)$.



Тогда:

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \iint_{G(x)} f(x, y, z) dy dz. \quad (4)$$

3. Пусть теперь тело T представляет собой "**цилиндрический брус**", ограниченный снизу и сверху, соответственно, поверхностями $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$, проектирующиеся на плоскость XY

в некоторую квадрируемую фигуру G (рис.2), $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ - непрерывны в G . Тогда

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_G dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \quad (5)$$

Если $G = \{(x, y): a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$, то

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

№5. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ТЕОРИИ ВЫЧЕТОВ. [наверх](#)

Аналитическая функция – функция, которая имеет производную, но производную в комплексном смысле.

Функция называется *аналитической в точке* z_0 , если она дифференцируема в некоторой окрестности данной точки, т.е. дифференцируема в самой точке и во всех точках из некоторой окрестности. Если функция аналитическая, то множество точек в которых она аналитическая – *открытое множество*. Точка, в которой функция не является аналитической – *особая*.

Точка a – *изолированная особая точка* функции $f(z)$, если существует выколота окрестность $0 < |z-a| < R$, в которой $f(z)$ аналитическая функция.

Пусть точка z_0 – изолированная особая точка функции $f(z)$, и $f(z)$ допускает единственное разложение в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n, \text{ где}$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz,$$

$$C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_c f(z) dz,$$

c – гладкий замкнутый контур, положительно ориентированный, обходящий точку z_0 .

Определение: вычетом аналитической функции $f(z)$ в и.о.т. z_0 называется точка комплексное число, равное значению $\frac{1}{2\pi i} \int_c f(z) dz$, вычисляемого по любому замкнутому контуру, лежащему в области аналитичности $f(z)$, положительно ориентированному и содержащему внутри единственную и.о.т.

$$\operatorname{res} f(z) = C_{-1} \\ z=z_0$$

Основная теорема теории вычетов:

Если $f(z)$ аналитична в замкнутой ограниченной области \bar{D} , за исключением конечного числа и.о.т. $z_k, k=1..n, z_k$ принадлежит D . Будем считать, что $f(z)$ непрерывна вплоть до границы D , тогда $\int_{\Gamma} f(\xi) d\xi = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z)$, где Γ – полная граница области D , положительно ориентированная, res – вычет f в точке z_k .

Доказательство.

Окружим каждую изолированную точку замкнутым контуром γ_k . Внутри γ_k содержится единственная и.о.т. z_k . В области, ограничиваемой γ и γ_k $f(z)$ – аналитична \Rightarrow по теореме Коши для многосвязной области (интеграл по замкнутой области равен 0):

$$\int_{\Gamma \cup \gamma_1^- \dots \cup \gamma_n^-} f(z) dz = 0$$

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z)$$

Если точка бесконечно удалена, то формулы для вычисления вычетов нет.

№6. ТЕОРЕМА РИССА О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЛИНЕЙНОГО НЕПРЕРЫВНОГО ФУНКЦИОНАЛА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ. [наверх](#)

Пространство L (линейное вещественное пространство) со скалярным произведением называется *евклидовым*. Во всяком таком пространстве можно ввести норму через скалярное произведение. $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Если евклидово пространство является полным в норме порожденной скалярным произведением, то его называют *гильбертовым* пространством (H-пространством).

Теорема Рисса: пусть H – вещественное гильбертово пространство. Для любого линейного непрерывного функционала f принадлежащего H^* , существует единственная точка x_0 из H , такая что $f(x) = (x, x_0)$ для любого x из H . (1)

Доказательство.

Если $f \equiv 0$, то $x_0 = 0$.

Пусть $f(x) \neq 0$. Обозначим $k = \ker f(x)$ – подпространство H .

Рассмотрим k^\perp : $\dim k^\perp = \text{codim } k = 1$.

$k + k^\perp = H$, поэтому существует $y_0 \neq 0$ из k^\perp , $\|y_0\| = 1$ и для всех x из H имеет место:

$x = \lambda y_0 + y$, где λ – из \mathbb{R} , y – из k .

Обозначим $x_0 = f_{y_0}(y_0)$, $f(x) = f(\lambda y_0 + y) = \lambda f(y_0) + f(y) = \lambda f(y_0)$

$(x, x_0) = (\lambda y_0 + y, f_{y_0}(y_0)) = \lambda f(y_0)(y_0, y_0) + f(y_0)(y, y_0) = \lambda f(y_0)$

Докажем единственность x_0 : от противного

Существует x'_0 : для всех x из H : $f(x) = (x, x'_0)$ и $f(x) = (x, x_0)$

$\Rightarrow (x, x_0 - x'_0) = 0$ для любого x из H .

Пусть $x = x_0 - x'_0$ из H . $x_0 = x'_0 \Leftrightarrow \|x_0 - x'_0\|^2 = 0$

$$\frac{|f(x)|^{(1)}}{\|x\|} = \frac{|(x, x_0)|}{\|x\|} \leq \|x_0\|$$

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|x_0\| \Rightarrow \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \|f(x)\| \leq \|x_0\|$$

С другой стороны: $|f(x)|^{(1)} = |(x, x_0)| \leq \|f\| \|x\|$ для любого x из H .

В частности при $x = x_0$: $\|x_0\|^2 \leq \|f\| \|x_0\| \Rightarrow \|x_0\| \leq \|f\|$.

Таким образом $\|f\|_{H^*} = \|x_0\|_H$

ЧТД.

Множество $\ker f = \{ x \in L \mid f(x) = 0 \}$ – ядро функционала f .

№7. ЛИНЕЙНЫЙ ОПЕРАТОР. ЯДРО И ОБРАЗ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА. ДЕФЕКТ И РАНГ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА. МАТРИЦА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА.

[наверх](#)

Пусть заданы линейные пространства X и Y . Правило, по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$, называется **оператором**, действующим в линейных пространствах X, Y . Результат действия оператора A на элемент x обозначают $y = Ax$ или $y = A(x)$. Если элементы x и y связаны соотношением $y = Ax$, то y называют **образом** элемента x ; элемент x - **прообразом** элемента y .

Множество элементов линейного пространства X , для которых определено действие оператора A , называют **областью определения** оператора и обозначают $D(A)$.

Множество элементов линейного пространства Y , которые являются образами элементов из области определения оператора A , называют **образом** оператора и обозначают $Im(A)$. Если $y = Ax$, то $x \in D(A)$, $y \in Im(A)$.

Оператор A , действующий в линейных пространствах X, Y называется **линейным оператором**, если $A(u + v) = A(u) + A(v)$ и $A(\alpha u) = \alpha A(u)$ для любых $u, v \in X$ и для любого числа α .

Если пространства X и Y совпадают, то говорят, что оператор действует в пространстве X . В дальнейшем ограничимся рассмотрением линейных операторов, действующих в линейном пространстве X .

Образ и ядро линейного оператора

Рассмотрим линейный оператор A , действующий в конечномерном линейном пространстве X . Доказано, что образ $Im(A)$ линейного оператора - линейное пространство. Размерность образа линейного оператора называется **рангом оператора**, обозначается $Rg(A) = r = \dim(Im(A))$.

Ядром линейного оператора называется множество элементов из X , образом которых является нулевой элемент. Ядро оператора обозначают $Ker(A)$: $Ker(A) = \{x \in X : A(x) = 0\}$. Ядро линейного оператора - линейное пространство; размерность ядра линейного оператора называется **дефектом оператора**, обозначается $Def(A)$: $d = Def(A) = \dim(Ker(A))$.

Для линейного оператора, действующего в n -мерном линейном пространстве X , справедливы следующие утверждения:

сумма ранга и дефекта оператора равно размерности пространства, в котором действует оператор: $Def(A) + Rg(A) = n$;

ранг оператора равен рангу его матрицы;

ядро оператора совпадает с множеством решений линейной однородной системы с матрицей A , размерность пространства решений этой системы равна дефекту оператора, а ее фундаментальная система решений образует базис в ядре оператора;

столбцы, входящие в базисный минор матрицы оператора образуют базис в образе оператора.

Сформулированные утверждения позволяют описать структуру образа и ядра линейного оператора, заданного матрицей, используя язык матричных преобразований и общей теории линейных систем.

Линейный оператор и его матрица. Переход к другому базису

Рассмотрим линейный оператор A , действующий в конечномерном линейном пространстве X , $\dim(X) = n$ и пусть e_1, \dots, e_n — базис в X . Обозначим через $Ae_1 = (a_{11}, \dots, a_{n1})$, ..., $Ae_n = (a_{1n}, \dots, a_{nn})$ образы базисных векторов e_1, \dots, e_n .

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

столбцами которой являются координаты образов базисных векторов, называется **матрицей линейного оператора** в заданном базисе.

Доказано, что каждому линейному оператору, действующему в n -мерном линейном пространстве, отвечает единственная квадратная матрица порядка n ; и обратно — каждая квадратная матрица порядка n задает единственный линейный оператор, действующий в этом пространстве. При этом соотношения

$$Y = AX, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}$$

с одной стороны, связывают координаты образа $Y = AX$ с координатами прообраза X , с другой стороны, описывают действие оператора, заданного матрицей A .

При изменении базиса линейного пространства матрица оператора тоже изменяется. Пусть в пространстве X произошел переход от базиса $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ к базису $e' = \{e_1', \dots, e_n'\}$. Связь между матрицей A_e оператора A в базисе e и матрицей $A_{e'}$ этого оператора в базисе e' задается формулой:

$$A_{e'} = P_{e \rightarrow e'}^{-1} A_e P_{e \rightarrow e'}, \quad A_e = P_{e \rightarrow e'} A_{e'} P_{e \rightarrow e'}^{-1}$$

Здесь $P_{e \rightarrow e'}$, $P_{e \rightarrow e'}^{-1}$ — матрица перехода от базиса e к базису e' и обратная к ней.

№8. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА. СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ. [наверх](#)

Собственным вектором линейного преобразования A называется такой ненулевой вектор x , что для некоторого $\lambda \in K$, выполняется равенство $Ax = \lambda x$.

Число λ называется собственным значением или собственным числом оператора A , соответствующим собственному вектору x .

Теорема: Любому собственному вектору соответствует только 1 собственное значение.

Доказательство. Пусть 1 вектору соответствует 2 собственных значения $\lambda, \mu, \lambda \neq \mu$.

$$\left. \begin{array}{l} A\vec{x} = \lambda\vec{x} \\ A\vec{x} = \mu\vec{x} \end{array} \right\} \rightarrow \lambda\vec{x} = \mu\vec{x} \rightarrow \lambda\vec{x} - \mu\vec{x} = 0 \rightarrow (\lambda - \mu)\vec{x} = 0$$

$$\lambda \neq \mu \rightarrow \lambda - \mu \neq 0 \rightarrow \vec{x} = 0 \text{ (противоречие)}$$

ч.т.д.

Отметим свойства собственных чисел и собственных векторов.

1. Собственные векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m$ оператора A с попарно различными собственными числами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ линейно независимы.

Доказательство:

u_1, \dots, u_k – собственные векторы

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – собственные числа

$$Au_i = \lambda_i u_i$$

$$c_1 u_1 + \dots + c_k u_k = 0 \tag{1}$$

$$A(c_1 u_1 + \dots + c_k u_k) = 0$$

$$c_1 \lambda_1 u_1 + \dots + c_k \lambda_k u_k = 0 \tag{2}$$

Умножим (1) уравнение на λ_k и вычтем из (2). Получим

$$c_1 \lambda_k u_1$$

повторяя эти шаги, получим

$$c_1 (\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_k - \lambda_2) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1}) u_1 = 0$$

т.к. $u_1 \neq 0$, то $c_1 = 0 \Rightarrow$ все коэффициенты в линейной зависимости нулевые

ч.т.д.

2. Если собственные числа $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = \lambda$, то собственному числу λ соответствует не более m линейно независимых собственных векторов.

3. Собственные векторы нормального оператора A , соответствующие различным собственным значениям, ортогональны. То есть если $Ax = \lambda x, Ay = \mu y$ и $\lambda \neq \mu$, то $(x, y) = 0$. (Для произвольного оператора это неверно.)

№9. ИНВАРИАНТЫ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА. КЛАССИФИКАЦИЯ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО ИНВАРИАНТАМ. [наверх](#)

Общий вид кривой 2-го порядка $(Ax, x) + 2(b, x) + C = 0$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, C - \text{число.}$$

Чтобы определить тип кривой, не делая замены коэффициентов, надо найти величины, не меняющиеся при замене коэффициентов - *инварианты*.

Замена $x = Ty$ (поворот), T - ортогональная матрица.

$$\text{Кривая примет вид: } (ATy, Ty) + 2(b, Ty) + C = 0 \Rightarrow (T^t ATy, y) + 2(T^t b, y) + C = 0,$$

видно что $A = T^t AT = T^{-1} AT$ - подобная \Rightarrow не изменились коэффициенты m характеристического полинома матрицы A : $I_1 = a_{11} + a_{22}, I_2 = |A|$.

Рассмотрим матрицу $R = \begin{pmatrix} A & b \\ b^t & C \end{pmatrix}$, при этой же замене получим $\begin{pmatrix} T^t AT & T^t b \\ b^t T & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - подобная матрица и коэффициенты R не меняются при ортогональном преобразовании.

Сделаем замену $x = y + y_0$ (сдвиг),

получим: $(Ay, y) + 2(b - Ay_0, y) + C - 2(b, y_0) + (Ay_0, y_0) = 0$, в результате A переходит в A .

$\Rightarrow I_1, I_2$ - инварианты при любых преобразованиях x ; (определители остались такими же как и до преобразования)

$$R \rightarrow \begin{pmatrix} A & b - Ay_0 \\ b^t - y_0^t A & C - 2(b, y_0) + (Ay_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -y_0^t & 1 \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} E & -y_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

инвариант $I_3 = |R|$,

$$R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & C \end{pmatrix}; k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & C & b_2 \end{vmatrix}$$

k - полуинвариант (не меняется при поворотах и меняется при сдвигах).

Если сопоставить таблицу инвариантов и полуинвариантов то видно, что набор инвариантов соответствует конкретной кривой. Это позволяет определить её тип.

Полуинвариант k появляется только для $y^2 \pm b = 0$ – пара параллельных прямых.

$$I_1 = a_{11} + a_{22},$$

$$I_2 = a_{11} a_{22} - a_{12}^2$$

$$k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & C & b_2 \end{vmatrix}$$

Таблица инвариантов и полуинвариантов 2-го порядка

Название кривой	I_1	I_2	I_3	k
Эллипс	-	+	-	
Мнимый эллипс	+	+	+	
Гипербола		-	$\neq 0$	
Пара пересекающихся прямых		-	0	
Пара мнимых пересекающихся прямых		+	0	
Парабола		0	$\neq 0$	
Пара параллельных прямых		0	0	-
Пара мнимых параллельных прямых		0	0	+
Пара совпадающих прямых		0	0	0

№10. ПОНЯТИЕ МАССЫ И СИЛЫ. ЗАКОНЫ НЬЮТОНА. ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ. [наверх](#)

Масса - это физическая характеристика тела, определяющая его гравитационные и инерционные свойства. Обозначается m , единицы измерения: СИ - кг, СГС - г.

[*Инертность* - свойство тел оставаться в некоторых системах отсчёта в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения в отсутствие или при взаимной компенсации внешних воздействий.

Гравитационное св-во - это вес, сила воздействия тела на опору или подвес.]

Масса проявляется в природе несколькими способами:

- 1) Пассивная гравитационная масса показывает, с какой силой тело взаимодействует с внешними гравитационными полями;
- 2) Активная гравитационная масса показывает, какое гравитационное поле создаёт само это тело;
- 3) Инертная масса характеризует инертность тел. Если произвольная сила в инерциальной системе отсчёта одинаково ускоряет разные исходно неподвижные тела, этим телам приписывают одинаковую инертную массу.

Сила — векторная физическая величина, являющаяся мерой интенсивности воздействия на данное тело других тел, а также полей. Приложенная к массивному телу сила является причиной изменения его скорости или возникновения в нём деформаций и напряжений. Обозначается F , единицы измерения: СИ - ньютон, СГС - дина.

Сила как векторная величина характеризуется модулем, направлением и точкой приложения силы. Также используется понятие линия действия силы, обозначающее проходящую через точку приложения силы прямую, вдоль которой направлена сила.

Законы Ньютона:

1ЗН: существуют системы отсчёта, в которых тела сохраняют состояние покоя или равномерного прямолинейного движения при отсутствии действий на них со стороны других тел или при взаимной компенсации этих воздействий. Такие системы отсчёта называются инерциальными (т.е. инерциальная система отсчёта существует).

2ЗН: в инерциальных системах отсчёта ускорение, приобретаемое материальной точкой, прямо пропорционально вызывающей его силе, совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки.

Обычно этот закон записывается в виде формулы:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

где \vec{a} — ускорение тела, \vec{F} — сила, приложенная к телу, а m — масса материальной точки.

[Формулировка 2ЗН с использованием понятия импульса:

В инерциальных системах отсчёта производная импульса материальной точки по времени равна действующей на неё силе.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

где $\vec{p} = m\vec{v}$ — импульс (количество движения) точки, \vec{v} — её скорость, а t — время.]

3ЗН: материальные точки взаимодействуют друг с другом силами, имеющими одинаковую природу, направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, равными по модулю и противоположными по направлению:

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$$

Закон утверждает, что силы возникают лишь попарно, причём любая сила, действующая на тело, имеет источник происхождения в виде другого тела. Иначе говоря, сила всегда есть результат взаимодействия тел. Существование сил, возникших самостоятельно, без взаимодействующих тел, невозможно. 3ЗН – справедлив только в механике (скорости меньше скорости света).

Закон Всемирного Тяготения гласит, что сила F гравитационного притяжения между двумя материальными точками массы m_1 и m_2 разделёнными расстоянием R , пропорциональна обеим массам и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними — то есть:

$$F = \frac{G * m_1 * m_2}{R^2}$$

Здесь G — гравитационная постоянная, равная $6,67384(80) * 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} * \text{с}^2)$.

Принцип независимого действия.

Если на материальную точку действуют несколько сил, то

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{F}_i}{m} = \sum_{i=1}^n \vec{a}_i$$

Таким образом, если на материальную точку одновременно действуют несколько сил, то каждая из них сообщает м.т. такое же ускорение, как если бы других сил не было. Это утверждение называется принципом независимости действия сил.

Значит, если сумма сил, действующих на материальную точку $=0$, то тело находится в покое.

№11. ЗАКОН ОМА ДЛЯ ОДНОРОДНОГО И НЕОДНОРОДНОГО УЧАСТКА ЦЕПИ. ПРАВИЛА КИРХГОФА. [наверх](#)

Упорядоченное движение свободных носителей электрического заряда называется *электрическим током*. Количественной мерой электрического тока служит *сила тока* I – скалярная физическая величина, равная отношению заряда Δq , переносимого через поперечное сечение проводника за интервал времени Δt , к этому интервалу времени:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

Если сила тока и его направление не изменяются со временем, то такой ток называется *постоянным*. Постоянный электрический ток может быть создан только в *замкнутой цепи*. Для существования постоянного тока необходимо наличие в электрической цепи устройства, способного создавать и поддерживать разности потенциалов на участках цепи за счет работы сил не электростатического происхождения. Такие устройства называются *источниками постоянного тока*. Силы не электростатического происхождения, действующие на свободные носители заряда со стороны источников тока, называются *сторонними силами*.

Физическая величина, равная отношению работы $A_{ст}$ сторонних сил при перемещении заряда q от отрицательного полюса источника тока к положительному к величине этого заряда, называется *электродвижущей силой источника* (ЭДС):

$$\text{ЭДС} = \mathcal{E} = \frac{A_{ст}}{q}.$$

Те участки цепи, на которых не действуют сторонние силы (т. е. участки, не содержащие источников тока), называются *однородными*. Участки, включающие источники тока, называются *неоднородными*.

При перемещении единичного положительного заряда по некоторому участку цепи работу совершают как электростатические (кулоновские), так и сторонние силы. Работа электростатических сил равна разности потенциалов $\Delta\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$ между начальной (1) и конечной (2) точками неоднородного участка. Работа сторонних сил равна по определению электродвижущей силе \mathcal{E}_{12} , действующей на данном участке. Поэтому полная работа равна

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}$$

Г. Ом экспериментально установил, что сила тока I , текущего по однородному металлическому проводнику (т. е. проводнику, в котором не действуют сторонние силы), пропорциональна напряжению U на концах

$$I = \frac{1}{R}U \quad \text{или} \quad RI = U,$$

проводника: Данное соотношение выражает *закон Ома для однородного участка цепи*: сила тока в проводнике прямо пропорциональна приложенному напряжению и обратно пропорциональна сопротивлению проводника.

Исходя из закона Ома, имеем:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{Edl}{\rho \frac{dl}{dS}} = \frac{EdS}{\rho}$$

$$j = \frac{dI}{dS} = \frac{1}{\rho} E \quad \vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$$

А мы знаем, что . Отсюда можно записать

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \tag{1}$$

это запись *закона Ома в дифференциальной форме*.

Для участка цепи, содержащего ЭДС, закон Ома записывается в следующей форме: $IR = U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E} = \Delta\varphi_{12} + \mathcal{E}$. Это соотношение принято называть *обобщенным законом Ома* или *законом Ома для неоднородного участка цепи*.

В дифференциальной форме закон Ома для неоднородного участка цепи: $j = \frac{1}{\rho} \dot{\epsilon}$

Первое правило Кирхгофа гласит, что алгебраическая сумма токов в каждом узле любой цепи равна нулю

$$\sum_{j=1}^n I_j = 0.$$

. При этом направленный к узлу ток принято считать положительным, а направленный от узла — отрицательным.

Второе правило Кирхгофа (правило напряжений Кирхгофа) гласит, что алгебраическая сумма падений напряжений на всех ветвях, принадлежащих любому замкнутому контуру цепи, равна алгебраической сумме ЭДС ветвей этого контура. Если в контуре нет источников ЭДС (идеализированных генераторов напряжения), то суммарное падение напряжений равно нулю:

для постоянных напряжений
$$\sum_{k=1}^n E_k = \sum_{k=1}^m U_k = \sum_{k=1}^m R_k I_k;$$

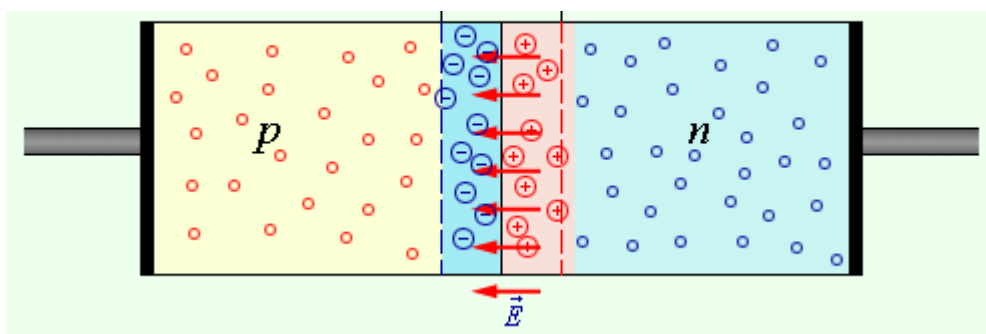
для переменных напряжений
$$\sum_{k=1}^n e_k = \sum_{k=1}^m u_k = \sum_{k=1}^m R_k i_k + \sum_{k=1}^m u_{Lk} + \sum_{k=1}^m u_{Ck}.$$

№12. ЭЛЕКТРОННО-ДЫРОЧНЫЙ (P-N) ПЕРЕХОД. ВЫПРЯМЛЯЮЩИЕ СВОЙСТВА P-N-ПЕРЕХОДА. [наверх](#)

p-n-переход (n — *negative* — отрицательный, электронный, p — *positive* — положительный, дырочный), или **электронно-дырочный переход** — область пространства на стыке двух полупроводников p- и n-типа, в которой происходит переход от одного типа проводимости к другому.

Области пространственного заряда

В полупроводнике p-типа концентрация дырок намного превышает концентрацию электронов. В полупроводнике n-типа концентрация электронов намного превышает концентрацию дырок. Если между двумя такими полупроводниками установить контакт, то возникнет диффузионный ток — носители заряда, хаотично двигаясь, перетекают из той области, где их больше, в ту область, где их меньше. При такой диффузии электроны и дырки переносят с собой заряд. Как следствие, область на границе станет заряженной, и область в полупроводнике p-типа, которая примыкает к границе раздела, получит дополнительный отрицательный заряд, приносимый электронами, а пограничная область в полупроводнике n-типа получит положительный заряд, приносимый дырками. Таким образом, граница раздела будет окружена двумя областями пространственного заряда противоположного знака.



Электрическое поле, возникающее вследствие образования областей пространственного заряда, вызывает дрейфовый ток в направлении, противоположном диффузионному току. В конце концов, между диффузионным и дрейфовым токами устанавливается динамическое равновесие и перетекание зарядов прекращается.

Выпрямление

Если приложить внешнее напряжение так, чтобы созданное им электрическое поле было направленным противоположно направлению электрического поля между областями пространственного заряда, то динамическое равновесие нарушается, и диффузионный ток преобладает над дрейфовым током, быстро нарастая с повышением напряжения. Такое подключение напряжения к p-n-переходу называется *прямым смещением*.

Если же внешнее напряжение приложено так, чтобы созданное им поле было одного направления с полем между областями пространства то это приведет лишь к увеличению областей пространственного заряда, и ток через p-n-переход не идет. Такое подключение напряжения к p-n-переходу называется *обратным смещением*.

№13. МЕТОД ФУРЬЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ СТРУНЫ С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КОНЦАМИ. [наверх](#)

Рассмотрим применение метода Фурье к решению задач для гиперболических уравнений на примере задачи о малых свободных поперечных колебаниях струны. Рассмотрим задачу о колебаниях струны с закрепленными концами.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = u(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < \ell, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(\ell, t) = 0, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = \phi(x), \quad 0 < x < \ell,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 < x < \ell. \quad (3)$$

Найдем решение задачи (1),(2), называемой основной вспомогательной задачей. Будем искать решение в

виде $u(x, t) = X(x)T(t) \neq 0$. Подставим в (1) получим

$$T''(t)X(x) = a^2 X''(x)T(t) \quad \text{поделим на} \quad a^2 X(x)T(t)$$

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

Фиксируем t , для любого x правая часть константа, аналогично x , следовательно обе части равенства константы.

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \quad (4)$$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \\ X(\ell) = 0. \end{cases} \quad (5),(6)$$

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля (5),(6)

1. Предположим, что $\lambda < 0$, $k^2 + \lambda = 0$, $k = \pm \sqrt{-\lambda}$

Общий вид решения

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$$\text{Из } X(0) = 0, \quad c_1 + c_2 = 0$$

$$c_2 = -c_1$$

$$\text{Из } X(\ell) = 0, \quad c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\ell} - c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}\ell} = 0 \Rightarrow c_1 = 0, \quad c_2 = 0. \quad \text{Таким образом, при } \lambda < 0$$

нетривиальных (ненулевых) решений нет.

2. Положим $\lambda = 0$, тогда

$$X(x) = c_1 + c_2 x$$

$$X(0) = c_1 = 0$$

$$X(\ell) = c_2 \ell = 0 \Rightarrow c_2 = 0, \quad \text{т.е. нетривиальных решений нет.}$$

3. Рассмотрим теперь $\lambda > 0$, в этом случае решение имеет вид

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x,$$

$$X(0) = c_1 = 0,$$

$$X(\ell) = c_2 \sin \sqrt{\lambda} \ell = 0 \Rightarrow \sin \sqrt{\lambda} \ell = 0, \text{ тогда}$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\ell} \right)^2, \text{ таким образом, с точностью до константы } X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{\ell} x, \quad n = 1, 2, \dots$$

Далее решим уравнение (4), решение запишется в виде

$$T_n(t) = c_n \cos \frac{a\pi n}{\ell} t + d_n \sin \frac{a\pi n}{\ell} t,$$

Тогда общее решение

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \cos \frac{a\pi n}{\ell} t + d_n \sin \frac{a\pi n}{\ell} t \right] \sin \frac{\pi n}{\ell} x. \quad (7)$$

В соответствии с начальными условиями

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{\pi n}{\ell} x, \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{a\pi n}{\ell} \sin \frac{\pi n}{\ell} x,$$

тогда по свойству коэффициентов ряда Фурье

$$c_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \phi(x) \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx, \quad d_n = \frac{\ell}{a\pi n} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx,$$

с учетом того, что

$$\left\| \sin \frac{\pi n}{\ell} x \right\|^2 = \int_0^{\ell} \sin^2 \frac{\pi n}{\ell} x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{\ell} x \right) dx = \frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2\pi n} \sin 2\pi n = \frac{\ell}{2}$$

Таким образом, мы получили решение поставленной задачи (1)–(3).

Тогда ряд примет вид

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi n}{\ell} x \sin \left(\frac{a\pi n}{\ell} t + \phi_n \right)$$

т.о. очевидно, что каждый член ряда (8') представляет собой стоячую волну $(b_n \sin(\omega_n t + \phi_n))$ с

$$\omega_n = \frac{a\pi n}{\ell}, \text{ фазой } \phi_n.$$

амплитудой в каждой точке, зависящей от точки, частотой

В точках, где амплитуды нули, называются узлами стоячей волны, в точках, где амплитуды максимальны, называются точками пучности.

Узлы $x = 0, \frac{\ell}{n}, \frac{2\ell}{n}, \dots, \ell$ - узлы n -ой стоячей волны.

$$x = \frac{\ell}{2n}, \dots, \frac{2\ell-1}{2n}$$

Максимумы:

При колебаниях струна издает звук. При этом самая низкая частота колебания называется основным тоном.

$$\omega_1 = \frac{a\pi}{\ell}$$

Все остальные $\omega_n > \omega_1$ называются обертонами.

Тона, частота которых кратна частоте основного тона, называются гармониками.

№14. ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И СЛЕДСТВИЕ ИЗ НЕГО. [наверх](#)

Уравнения теплопроводности - уравнения параболического типа.

Процесс распространения тепла в объеме с плотностью ρ , коэффициентом теплоемкости c и теплопроводности k , не имеющем внутренних источников тепла, описывается уравнением

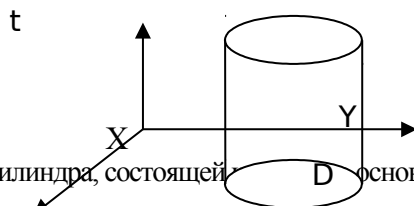
$$\operatorname{div}(p \operatorname{gradu}(U)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p \frac{\partial U}{\partial x_i} \right), \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} - \text{оператор Лапласа,}$$

$$\frac{\rho c \partial u(M, t)}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{gradu}(M, t)), \quad u(M, t), \quad M = (x, y, z)$$

Если среда однородна и изотропна ($\rho, c, k = \text{const}$), то уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial u(M, t)}{\partial t} = a^2 \Delta u(M, t) \quad (1)$$

Будем рассматривать некоторую область $D \subset R^3$, $\partial D = S$, $0 < t \leq T$, $T > 0$. Обозначим Q_T – цилиндр, в основании которого лежит D , а направляющие параллельны оси t .



Часть общей поверхности цилиндра, состоящей из основания и боковой поверхности обозначим через (без верха)

$$\Gamma_T = \left\{ (M, t) : (M, t) \Big|_{(x,y,z) \in S} \cup (M, 0) \Big|_{(x,y,z) \in D} \right\}$$

Рассмотрим в Q_T следующую задачу: найти решение уравнения (1) $(M, t) \in Q_T$, непрерывное вплоть до границы такое, что

$$u(M, 0) = \varphi(M), \quad M \in D \quad (2)$$

$$u(M, t) \Big|_{M \in S} = \psi(M, t), \quad M \in S \quad (3)$$

При этом должны выполняться условия согласования

$$\phi(M) \Big|_{M \in S} = \psi(M, 0)$$

Теорема. Принцип максимума:

Решение задачи (1),(2),(3) в цилиндре Q_T , непрерывные вплоть до границы области, достигает своего наибольшего и наименьшего значения на Γ_T , т.е.

$$\min_{(M, t) \in \Gamma_T} u(M, t) \leq \min_{(M, t) \in Q} u(M, t) \leq \max_{(M, t) \in \Gamma_T} u(M, t)$$

Доказательство: (от противного)

Рассмотрим некоторое решение задачи (1), (2), (3) $u(M, t)$.

Обозначим через $m = \max_{(M, t) \in \Gamma_T} u(M, t)$ при $(M, t) \in \Gamma_T$, $M' = \max_{(M, t) \in Q_T/\Gamma_T} u(M, t)$ при $(M, t) \in Q_T/\Gamma_T$.

Предположим, для этого решения $M' > m$ (максимум внутри). Допустим, наибольшее значение принимается в точке (M_0, t_0) . Таким образом, $u(M_0, t_0) = M'$, $M_0 \in D$, $Q < t_0 \leq T$.

Введем вспомогательную функцию

$$V(M, t) = u(M, t) + \frac{(M - m)((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)}{6d^2}$$

где d – диаметр области D .

Функция V также достигает наибольшего значения не на Γ , т.к. $V(M_0, t_0) = U(M_0, t_0)$

Оценим значение V во внутренних точках и на границе.

$$V(M, t) \leq m + \frac{(M - m)d^2}{6d^2} = \frac{5m}{6} + \frac{M}{6} \leq M'$$

Γ_T :

$V(M_0, t_0) = M'$, следовательно, V не принимает наибольшего значения на Γ_T , а принимает его в некоторой внутренней точке области. Предположим

$$\max V(M, t) = V(M_1, t_1), M_1 \in D, 0 < t_1 \leq T.$$

Но тогда в точке (M_1, t_1) справедливы утверждения

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} < 0, \frac{\partial V}{\partial t} \geq 0$$

Но из этого следует, что

$$\frac{\partial V}{\partial t}(M_1, t_1) - a^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) > 0$$

$$- \frac{a^2 a^2 a^2}{6d^2} (2+2+2) = - \frac{a^6}{d^2} < 0$$

С другой стороны, подставив вид функции $V(M, t)$ в I , будем иметь

Полученное противоречие доказывает, что наше предположение о том, что наибольшее значение может достигаться решением задачи во внутренней точке, неверно.

(Для доказательства утверждения для наименьшего значения достаточно рассмотреть функцию $-u(M, t)$)

Ч.Т.Д.

Следствие 1: Решение задачи (1)-(3) единственно.

Доказательство:

Предположим, что существует два решения задачи (1)-(3).

$u = u_1 - u_2$. В силу линейности задачи, u удовлетворяет:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$$

и граничным условиям:

$$u|_{t=0} = 0$$

$$u|_S = 0$$

По принципу максимума: $0 \leq u \leq 0 \Rightarrow u \equiv 0$, ч.т.д.

Следствие 2: решение задачи (1)-(3) непрерывно зависит от начальных и граничных условий (устойчиво по отношению к начальным и граничным условиям), т.е.

$$u_{1,2}|_{t=0} = \varphi_{1,2}(M)$$

$$u_{1,2}|_S = f_{1,2}(M, t)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |f_1 - f_2| < \varepsilon, \quad |\varphi_1 - \varphi_2| < \varepsilon \Rightarrow |u_1 - u_2| < \varepsilon$$

Доказательство:

Обозначим: $u = u_1 - u_2$.

$$u|_{t=0} = \varphi_1(M) - \varphi_2(M) = \varphi(M)$$

$$u|_S = f_1(M, t) - f_2(M, t) = f(M, t)$$

Из принципа максимума:

$$|u| \leq \max(|f|, |\varphi|) < \varepsilon, \quad \text{ч.т.д.}$$

№15. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ВНУТРЕННИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЛАПЛАСА И ПУАССОНА. [наверх](#)

Основные задачи для уравнения Лапласа и Пуассона – эллиптический тип.

Пусть D – ограниченная область с кусочно-гладкой границей S , а E – неограниченная область ($E = R^3 \setminus D$).

Задача

$$\Delta U(M) = f(M), M \in D \quad (1)$$

$$U|_S = \phi(M), M \in S \quad (2)$$

(1) – уравнение Лапласа, (2) – уравнение Пуассона

Называется *задачей Дирихле* для уравнения Лапласа (Пуассона). Задача Дирихле может быть внутренней, если решается в D , внешней – если в E .

Задача (1), (3)

$$\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_S = \psi(M), M \in S \quad (D \text{ или } E), \quad (3)$$

называется задачей Неймана для уравнения Лапласа (Пуассона), (n – внешняя нормаль к S). Задача (1), (4)

$$\left[\alpha \frac{\partial U}{\partial n} + \beta U \right]_{M \in S} = \mu(M), M \in S \quad (D \text{ или } E), \quad (4)$$

называется третьей краевой задачей для уравнения Лапласа (Пуассона). Различают соответственно внутренние и внешние задачу Неймана и третью краевую задачу.

Теоремы единственности Теорема 1: Первая внутренняя краевая задача для уравнения Лапласа (Пуассона) имеет единственное решение.

Доказательство: \dots

$$\Delta U(M) = f(M), M \in D \quad (1)$$

$$U|_S = \phi(M), M \in S \quad (2)$$

Предположим, что существуют два решения, удовлетворяющих (1), (2) U_1, U_2 . В силу непрерывности решений и линейности задачи $U = U_1 - U_2$ – функция, гармоничная в D и удовлетворяет

$$\Delta U = 0, M \in D \quad U|_S = 0$$

По принципу максимума $\min_{M \in S} U(M) \leq U(M) \leq \max_{M \in S} U(M)$ (Функция $U(M)$, гармоничная в конечной области D , не может достигать даже локального максимума или минимума во внутренних точках D , за исключением, когда $U \equiv \text{const}$). На границе $U|_S = 0$, следовательно $U=0$ во всей области, следовательно решение единственно.

Теорема 2. Решение внутренней задачи Неймана уравнения Лапласа (Пуассона) определяется с точностью до константы.

Доказательство: Рассмотрим внутреннюю задачу Неймана

$$\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_S = \psi(M)$$

Предположим, что существует два решения U_1, U_2 . Обозначим $U = U_1 - U_2$. В силу линейности задачи разность решений будет гармонической в области, а также будет удовлетворять задаче $\Delta U = 0, \left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_S = 0$

$$\iiint_D U \Delta V \, dV = \iint_{\sigma} U \frac{\partial V}{\partial n} \, d\sigma - \iiint_D (\text{grad} U, \text{grad} V) \, dV$$

Вспользуемся первой формулой Грина

, положив $V=U$

$$0 = \iiint_D (\operatorname{grad} U) \cdot dV \Rightarrow \operatorname{grad} U = 0 \Rightarrow U = c = \text{const}$$

т.е. решение внутренней задачи Неймана не единственно.

Рассмотрим третью краевую задачу

$$\Delta U = f(M), \quad M \in D, \quad \partial D = S \quad \left[\alpha \frac{\partial U}{\partial n} + \beta U \right] \Big|_S = \mu(M), \quad M \in S, \quad \frac{\alpha}{\beta} > 0$$

Теорема 3: Решение третьей внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа (Пуассона) единственно.

Доказательство: Предположим, что существуют два решения U_1, U_2 , тогда $U = U_1 - U_2$ гармоническая функция

$$\Delta U = 0, \quad \left[\alpha \frac{\partial U}{\partial n} + \beta U \right] \Big|_S = 0$$

$$\underbrace{\iiint_D u \Delta u dV}_{=0} = \iint_S U \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma - \iiint_D (\operatorname{grad} U)^2 dV$$

Применим к U первую формулу Грина, положив $U=V$,

$$0 = \iint_S U \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma - \iiint_D (\operatorname{grad} U)^2 dV$$

$$0 = \frac{\beta}{\alpha} \iint_S U^2 d\sigma + \iiint_D (\operatorname{grad} U)^2 dV$$

Из граничного условия $\frac{\partial U}{\partial n} \Big|_S = -\frac{\beta}{\alpha} U \Big|_S$,
 Так как оба слагаемых неотрицательны, то $U=0$ на S ,
 $\operatorname{grad} U = 0 \Rightarrow U(M) = c = \text{const}$, но на S $U(M) = 0 \Rightarrow U \equiv 0$.

Для доп. вопросов. Примеры гармонических функций:

$$u = \text{const}$$

$$u = 0$$

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}, \quad M(x_0, y_0, z_0) \notin \text{области} - \text{гармоническая в бесконечности}$$

№16. УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО ЛЯПУНОВУ. (ОПРЕДЕЛЕНИЕ. СВЕДЕНИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОГО НЕНУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ. ЛЕММА ЛЯПУНОВА. ТЕОРЕМА ЛЯПУНОВА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ). [наверх](#)

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1 \dots y_n) \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1 \dots y_n) \end{aligned} \right\}$$

где $(y_1 \dots y_n)$ зависит от x .

$f_1 \dots f_n$ - известные функции своих переменных.

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y) \quad (1) \\ y(x_0) &= y^{(0)} \quad (2) \end{aligned} \right.$$

(1), (2) – Задача Коши.

Решение задачи (1),(2) обозначим через $y(x, y^{(0)})$

Определение: Решение задачи $y(x, y^{(0)})$ устойчиво по Ляпунову:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall \Delta y^{(0)} : \|\Delta y^{(0)}\| < \delta, \forall x > x_0 : \|y(x, y^{(0)} + \Delta y^{(0)}) - y(x, y^{(0)})\| < \varepsilon$$

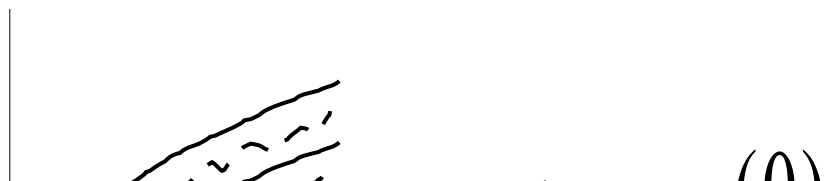
Определение: Решение $y(x, y_0)$ асимптотически устойчиво по Ляпунову, если:

1) оно устойчиво по Ляпунову,

$$\exists \delta_0 > 0 : \forall \|\Delta y^{(0)}\| < \delta_0 \lim_{x \rightarrow \infty} \|y(x, y^{(0)} + \Delta y^{(0)}) - y(x, y^{(0)})\| = 0$$

2)

Геометрическая интерпретация устойчивости:





$y(x, y^0)$

Исследование на устойчивость ненулевого решения можно свести к исследованию на устойчивость нулевого решения некоторой вспомогательной задачи.

В (1) сделаем замену $u(x, y^0 + \Delta y^0) = u + y(x, y^0)$, подставим:

$$\frac{du}{dx} + \frac{du(x, y^0)}{dx} = f(x, u + y(x, y^0)) \quad \frac{dy(x, y^0)}{dx}$$

Обозначим через $F(x, u) = f(x, u + y(x, y^0))$. Заметим, что начальному условию в точке $x^0: y(x^0) = y^0$ будет соответствовать $u(x^0) = 0$, а $y(x^0) = y^0 + \Delta y^0 \Rightarrow u(x^0) = \Delta y^0$. Тогда получаем задачу:

$$\frac{du}{dx} = f(x, u), \text{ где } u^0 = \Delta y^0$$

$$u(x^0) = u^0 \quad (3)$$

Тогда из устойчивости нулевого решения (3) следует устойчивость решения (1) $y(x, y^0)$ и обратно. То же и про асимптотическую устойчивость.

Лемма Ляпунова: \exists непрерывная и дифференцируемая функция $V(y) \geq 0$ обращающаяся в 0 только в начале

координат: $\sum_1^N \frac{dV}{dy_i} f_j \leq 0$. Тогда нулевое решение системы (1) ($y(x) = 0$) устойчиво. Если кроме того выполняется еще более сильное условие при $\|\Delta y^{(0)}\| < \delta$

$$\sum_1^N \frac{dV}{dy_i} f_j \leq -W(y)$$

где $W(y) \geq 0$ некоторая непрерывная функция, равная нулю только в начале координат, тогда 0-е решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Функции V и W – функции Ляпунова.

Теорема Ляпунова: Пусть имеется нормальная система уравнений $F(x, y) = A * y + F(x, y)$, где A – постоянная матрица, у которой все собств. значения имеют отрицательные вещ. части. и $F(x, y)$ – вектор функция с непрерывными компонентами и для всех $x > x_0$ и y достаточно малых по норме выполняется $\|F(x, y)\| \leq M * \|y\|^\alpha$, $M, \alpha - \text{const} > 0$, тогда нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Если у матрицы A есть хотя бы 1-но решение с положительной вещ. частью, то решение неустойчиво; если есть хотя бы 1 знак ≤ 0 и остальные < 0 , то ничего неизвестно об устойчивости решения системы.

№17. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ. (АЛЬТЕРНАТИВА ФРЕДГОЛЬМА. ФУНКЦИЯ ГРИНА И ЕЁ СВОЙСТВА. ТЕОРЕМА О СВОЙСТВАХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ). [наверх](#)

В отличие от задачи Коши, где условие задается в одной точке, в краевых задачах условия задаются более чем в одной точке.

Рассмотрим ДУ:

$$x'' + b(t)x' + a(t)x = f(t)$$

$$\alpha_1 x(t_1) + \beta_1 x'(t_1) = \gamma_1$$

$$\alpha_2 x(t_2) + \beta_2 x'(t_2) = \gamma_2$$

$$t \in [t_1, t_2]$$

T – независимая переменная, $x(t)$ – неизвестная функция.

Если $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, то краевые условия называют однородными, если еще и $f(t) = 0$, то краевая задача называется однородной.

Если $\beta_1 = \beta_2 = 0$, то краевые условия называются *краевыми условиями первого рода*.

Если $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, то краевые условия называются *краевыми условиями второго рода*.

Если $\alpha_i, \beta_i \neq 0$ одновременно, то краевые условия называются *краевыми условиями третьего рода*.

Рассмотрим краевую задачу:

$$x''(t) + a(t)x = f(t) \quad (1)$$

$$x(0) = x(1) = 0, t \in (0, 1) \quad (2)$$

Альтернатива Фредгольма

Либо краевая задача (1), (2) разрешима при любой правой части $f(t)$, либо соответствующая однородная краевая задача имеет не нулевое решение или, если однородная задача имеет только нулевое решение, то неоднородная задача разрешима при любой правой части.

Если однородная задача имеет ненулевое решение $x_1(t)$, то неоднородная задача будет иметь решение только при таких $f(t)$, что

$$\int_0^1 x_1(t) f(t) dt < 0$$

то есть правая часть ортогональна решению и при этом решений будет ∞ много.

Функция Грина

Определение: ϕ -я, непрерывная в квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$ называется функцией Грина, если при любой функции $f(t)$ решение задачи (1), (2) представляется в виде

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s) ds$$

Теорема: если однородная задача (1) имеет только нулевое решение, то для задачи (1-2) существует функция Грина.

Свойства функции Грина:

1) при любом фиксированном S функция $G(t, s)$ как функция от t , является решением при $t \in [0, S) \cup (S, 1]$

однор. диф. уравнения $x''(t) + a(t)x = 0$

2) при любом фиксированном S функция $G(t, s)$, как ϕ -я от t , удовлетворяет однородным граничным

условиям (2): $x(0) = x(1) = 0$

3) функция $G(t, s)$ непрерывна в квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$, а первая производная на линии $t = S$ испытывает скачок

равный единице: $G'_t(t, t-0) - G'_t(t, t+0) = 1$

Утверждение: если $\bar{G}(t, s)$ удовлетворяют свойствам 1, 2, 3, то эта функция является функцией Грина задачи (1), (2). Задача (1), (2) имеет единственную функцию Грина.

Рассмотрим краевую задачу

$$x''(t) + (a(t) + \lambda)x(t) = 0 \quad (1)$$

$$x(0) = x(1) = 0, t \in (0, 1) \quad (2)$$

Значение параметра λ , при котором существует ненулевое решение задачи 1,2 называется собственным значением, а ненулевое решение – собственной функцией, соответствующей этому собственному числу. Множество собственных значений задачи – спектр. Задача на собственные значения – спектральная задача Штурма – Лиувилля.

Теорема о свойствах собственных значений и собственных функций:

Краевая задача (1), (2) имеет бесконечное множество собственных значений, причем на каждом ограниченном интервале находится не более конечного числа собственных значений. Собственные функции, соответствующие одному собственному значению пропорциональны; а собственные функции, соответствующие различным собственным значениям – ортогональны.

№18. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ. ТЕОРЕМА ПУАССОНА. [наверх](#)

Формула Бернулли позволяет находить вероятность появления события A при независимых испытаниях.
Теорема.

Если вероятность P наступления события A в каждом испытании постоянна, то вероятность $P_{k,n}$ того, что событие A наступит k раз в n независимых испытаниях, равна: $P_{k,n} = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, где $q = 1 - p$.

Доказательство:

Пусть проводится n независимых испытаний, причём известно, что в результате каждого испытания событие A наступает с вероятностью $P(A) = p$ и, следовательно, не наступает с вероятностью $P(\bar{A}) = 1 - p = q$.

Пусть, так же, в ходе испытаний вероятности P и Q остаются неизменными. Вероятность того, что в результате n независимых испытаний, событие A наступит ровно k раз - это количество сочетаний из n по k :

$$C_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

В то же время, так как все испытания независимы и их исходы несовместимы (событие A либо наступает, либо нет), то вероятность получения "удачной" комбинации в точности равна: $p^k \cdot q^{n-k}$.

Окончательно, для того чтобы найти вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A наступит ровно k раз, нужно сложить вероятности получения всех "удачных" комбинаций. Вероятности получения всех "удачных" комбинаций одинаковы и равны $p^k \cdot q^{n-k}$, количество "удачных" комбинаций равно $C_n(k)$, поэтому окончательно получаем:

$$P_{k,n} = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Последнее выражение есть не что иное, как **Формула Бернулли**.

При большом количестве испытаний вычисления по формуле Бернулли становятся затруднительными. Однако в ряде случаев их можно заменить более простыми *асимптотическими* формулами. Одна из них основана на теореме Пуассона.

Теорема Пуассона.

Если число испытаний $n \rightarrow \infty$ и $p \rightarrow 0$ так, что $n \cdot p \rightarrow \lambda$, $\lambda > 0$, то

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \rightarrow p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

при любых $k = 0, 1, 2, \dots$

Доказательство:

Положим $\lambda_n = n \cdot p_n \rightarrow \lambda > 0$.

Тогда $p_n = \lambda_n/n$ и

$$\begin{aligned} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} &= C_n^k \frac{\lambda_n^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \underbrace{\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}}_{\downarrow 1} \frac{\lambda_n^k}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n}_{\downarrow e^{-\lambda}} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k}}_{\downarrow 1} \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{aligned} \quad (1)$$

В соотношении (1) мы воспользовались тем, что $\lambda_n^k \rightarrow \lambda^k$ и замечательным пределом $\left(1 - \lambda_n/n\right)^n \rightarrow e^{-\lambda}$. Докажем последнее свойство:

$$\ln \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n = n \ln \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right) = n \left(-\frac{\lambda_n}{n} + O\left(\frac{\lambda_n^2}{n^2}\right)\right) \rightarrow -\lambda.$$

№19. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА. [наверх](#)

Случайное событие – это событие, которое при выполнении определенного комплекса условий, может как произойти так и не произойти. Мера возможности осуществления такого события и есть его **вероятность**.

Два события A и B называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление другого.

Суммой двух событий A и B называется третье событие $C = A + B$, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий.

Произведением двух событий A и B называется третье событие $C = AB$, которое происходит тогда, когда происходит и событие A , и событие B .

Событие \bar{A} называется **противоположным** событию A , если оно не совместно с A и вместе (в сумме) образуют достоверное событие, т.е. $\bar{A} + A = \Omega$.

В общем случае, когда имеется n равновозможных исходов, вероятность наступления любого события A , состоящего из m исходов определяется как отношение числа исходов благоприятствующих наступлению события A , к общему числу:

$$P(A) = m/n. \quad (1)$$

T1 (сложения вероятностей). Если два составных события $A = \{\omega_{i1}, \omega_{i2}, \dots, \omega_{im}\}$ и $B = \{\omega_{i1}, \omega_{i2}, \dots, \omega_{ik}\}$ являются несовместными, то

$$P(A + B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (1)$$

Док-во. Так как события A и B несовместны, событие $A + B$ состоит из $m + k$ элементов. При этом все множество элементарных событий состоит из n элементов. Тогда по классическому определению вероятности

$$P(A + B) = (m + k)/n = m/n + k/n = P(A) + P(B).$$

Тогда из теоремы сложения вероятностей вытекает, что $P(\Omega) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$, следовательно,

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad (2)$$

T2 (сложения вероятностей совместных событий). Если два составных события являются совместными, то вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Док-во.

Нетрудно видеть, что событие $A + B$ состоит из $(m + k - r)$ элементов, тогда по формуле.

$$P(A + B) = (m + k - r)/n = m/n + k/n - r/n = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Очевидно, что при изменении комплекса условий изменится и вероятность $P(A)$. Так, если к комплексу условий, при котором определяли $P(A)$, добавить новое условие, состоящее в появлении события B , то получим другое значение вероятности, которое обозначим $P(A/B) = P_B(A)$. Вероятность $P(A/B)$ называется **условной** вероятностью наступления события A , при условии, что произойдет событие B .

Тогда по формуле (1, лекция 1) $P(A) = m/n$, $P(B) = k/n$. Пусть событию A при условии, что произойдет событие B благоприятствует r исходов, очевидно, что такими исходами могут быть только исходы принадлежащие $A \cap B$. Тогда, согласно формуле $P(A) = m/n$ (m - число исходов, благоприятствующих наступлению события A , n - общее число исходов):

$$P(A/B) = r/k. \quad (4)$$

Разделим числитель и знаменатель полученной дроби на n

$$P(A/B) = (r/n)/(k/n) = P(A \cap B)/P(B), \text{ т.е.}$$

$$P(A/B) = P(A \cap B)/P(B). \quad (5)$$

Формула (4) называется формулой **нахождения условной вероятности** наступления события A при условии, что произойдет событие B .

Событие A не зависит от события B , если

$$P(A/B) = P(A).$$

T1. Независимость событий взаимна, т.е. если событие A не зависит от B , то и событие B не зависит от A .

Док-во

$$P(B/A) = P(B \cap A)/P(A) = P(A \cap B)/P(A) = \{P(A/B)P(B)\}/P(A) = \{P(A)P(B)\}/P(A) = P(B).$$

Из определения 4 вытекают формулы умножения вероятностей для зависимых и независимых событий.

$$P(AB) = P(A \cap B) = P(A/B)P(B). \quad (7)$$

Фрмула (7) называется формулой **умножения для зависимых** событий.

Из (6) и (7) следует

$$P(AB) = P(A) P(B) \quad (8)$$

Формула (7) называется теоремой умножения для **независимых** событий.

Следствие 1. Вероятность **совместного появления** нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3) \dots P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n).$$

Об. События A_1, A_2, \dots, A_n **независимы в совокупности**, если независимы любые два из них и независимы любое из этих событий и любые комбинации (произведения) остальных событий.

Следствие 2. Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) P(A_2) \dots P(A_n).$$

Док-во

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1 \cdot A_2 \dots A_n) = P(A_1) P(A_2 \dots A_n) = \dots = P(A_1) P(A_2) \dots P(A_n).$$

О7. События A_1, A_2, \dots, A_n образуют **полную группу** событий, если они попарно несовместны ($A_i \cap A_j = \emptyset$,

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$$

для любого $i \neq j$) и в совокупности образуют Ω , т.е.

Т2. Если события A_1, A_2, \dots, A_n образуют полную группу событий, $P(A_i) > 0$ (так как не будет определено $P(B/A_i)$), то вероятность некоторого события $B \in S$ определяется, как сумма произведений безусловных вероятностей наступления события A_i на условные вероятности наступления события B , т.е.

$$P(B) = \sum_{i=1}^n [P(A_i) P(B/A_i)] \quad (1)$$

Док-во. Так как события A_i попарно несовместны, то их пересечение с событием B также попарно несовместны, т.е. $B \cap A_i$ и $B \cap A_j$ – несовместны при $i \neq j$. Используя свойство дистрибутивности $((\cup A_i) \cap B =$

$$B = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B)$$

$\cup (A_i \cap B))$, событие B можно представить как $\cup (A_i \cap B)$. Воспользуемся аксиомой сложения 3 и формулой умножения вероятностей, получим

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B)\right) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(BA_i) = \sum_{i=1}^n [P(A_i) P(B/A_i)]$$

Формула (1) называется формула **полной вероятности**.

Из формулы полной вероятности легко получить **формулу Байеса**, при дополнительном предположении, что $P(B) > 0$

$$P(A_k/B) = \frac{P(A_k) P(B/A_k)}{\sum_{i=1}^n [P(A_i) P(B/A_i)]} = \frac{P(A_k) P(B/A_k)}{P(B)}$$

где $k = 1, 2, \dots, n$.

$$= \frac{P(A_k) P(B/A_k)}{\sum_{i=1}^n [P(A_i) P(B/A_i)]} = \frac{P(A_k) P(B/A_k)}{P(B)}$$

Доказательство. $P(A_k/B) = P(A_k \cap B)/P(B)$

Вероятности событий $P(A_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ называются *априорными* вероятностями, т.е. вероятностями событий до выполнения опыта, а условные вероятности этих событий $P(A_k/B)$, называются *апостериорными* вероятностями, т.е. уточненными в результате опыта, исходом которого послужило появление события B .

№20. ВЫБОРОЧНОЕ СРЕДНЕЕ, СВОЙСТВА. ТЕОРЕМА ОБ АБСОЛЮТНОЙ КОРРЕКТНОСТИ ВЫБОРОЧНОЙ СРЕДНЕЙ. [наверх](#)

Определение 1. Средним арифметическим вариационного ряда называется сумма произведений всех вариантов на соответствующие частоты, деленные на сумму всех частот

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \sum x_i w_i, \quad (1)$$

где $n = \sum n_i$, для не сгруппированного ряда формула (1) примет вид

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i. \quad (2)$$

Свойства среднего арифметического

1. Среднее арифметическое константы есть константа (аналог - $Mc = c$).

Доказательство. $(\frac{1}{n} \sum c = c)$, т.е. $\bar{c} = c$.

2. Если все варианты увеличить (уменьшить) в k раз, то и среднее арифметическое увеличится (уменьшится) в k раз – $k\bar{x} = \overline{kx}$.

Доказательство. $\frac{1}{n} \sum (k x_i) n_i = k \frac{1}{n} \sum x_i n_i$.

3. Если все варианты увеличить (уменьшить) на одно и то же число, то среднее

арифметическое увеличится (уменьшится) на то же число – $\bar{c+x} = c + \bar{x}$.

Док-во сам-но.

4. Среднее арифметическое отклонения варианты от средней арифметической равно нулю – $\overline{x - \bar{x}} = 0$

Доказательство. $\bar{x} = c \Rightarrow \overline{x - c} = \bar{x} - c = \bar{x} - \bar{x} = 0$.

В зависимости от решаемой задачи могут быть использованы другие формулы среднего, которые можно получить из средней степенной k -го порядка

$$\bar{x}_k = \sqrt[k]{\frac{\sum x_i^k n_i}{n}}, \quad x_i > 0 \quad (3)$$

При $k = 1$ – среднее арифметическое;

$k = 2$ – среднее квадратическое;

$k = -1$ – среднее гармоническое;

Иногда применяется среднегеометрическое – $\bar{x}_k = \sqrt[n]{x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_n^{n_k}}$, $n = \sum_{i=1}^k n_i$.

Помимо этих средних, которые называются аналитическими, применяются структурные или порядковые средние.

Определение 2. Медианой M_e вариационного ряда называется значение признака, приходящееся на середину несгруппированного (не по считано, сколько чего) ряда наблюдений.

Для дискретного вариационного ряда с нечетным числом медиана равна срединному варианту. Для ряда с четным числом – полусумме двух срединных вариантов.

Определение 3. Модой M_o сгруппированного вариационного ряда называется значение признака, соответствующее наибольшей частоте.

Определение 4. Оценка $\bar{\Theta}_n$ параметра Θ называется несмещенной, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру, т.е.

$$M \bar{\Theta}_n = \Theta \quad (11)$$

Определение 5. Оценка $\bar{\Theta}_n$ параметра Θ называется состоятельной, если она удовлетворяет закону больших чисел, т.е. сходиться по вероятности к оцениваемому параметру:

$$\bar{\Theta}_n \overset{P}{\rightarrow} \Theta \quad \text{или} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{\Theta}_n - \Theta| < \varepsilon) = 1, \forall \varepsilon > 0$$

Если оценка состоятельная, то оправдывается увеличение объема выборки для получения более точной оценки.

Определение 6. Оценка $\bar{\Theta}_n$ параметра Θ называется эффективной, если она имеет наименьшую дисперсию $\sigma_{\bar{\Theta}_n}^2$ среди всех возможных оценок параметра Θ , вычисленных по выборке одного и того же объема n , при этом

$$\sigma_{\bar{\Theta}_n}^2 = M(\bar{\Theta}_n - M\bar{\Theta}_n)^2$$

Определение 7. Если для эффективной оценки выполнены условия

$M\bar{\Theta}_n = \Theta$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\bar{\Theta}_n}^2 = 0$, то оценка называется абсолютно корректной или несмещенной состоятельной.

Теорема. Среднее арифметическое \bar{x} является абсолютно корректной оценкой математического ожидания генеральной совокупности.

Доказательство. Пусть X – генеральная совокупность и $MX = \alpha_1 = \Theta$, X_1, X_2, \dots, X_n – выборка из генеральной совокупности. Из определения выборки следует, что X_i – независимы и $MX_i = \alpha_1$, $DX_i = \sigma^2$, тогда

$$M\bar{\Theta}_n = M\bar{x} = M\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i n_i}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m M(x_i) n_i = \frac{1}{n} \alpha_1 \sum_{i=1}^n n_i = \alpha_1 = \Theta$$

, следовательно $M\bar{\Theta}_n = \Theta$

$$D(\bar{\Theta}_n) = \sigma_{\bar{\Theta}_n}^2 = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i n_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum \sigma^2 n_i^2 = \frac{\sigma^2 \sum n_i^2}{(\sum n_i)^2}$$

, из анализа известно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum n_i^2}{(\sum n_i)^2} = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\bar{\Theta}_n}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2 \sum n_i^2}{(\sum n_i)^2} = 0$$

поэтому . Учитывая, что \bar{x} является также и эффективной оценкой, получим, что среднее арифметическое \bar{x} является абсолютно корректной оценкой математического ожидания.

Ч.Т.Д.

№21. ОБУСЛОВЛЕННОСТЬ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ (МЕТОД ГАУССА, ПРОГОНКИ ВРАЩЕНИЙ). ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ. [наверх](#)

Пусть $Ax = b$ (1), A – невырожденная матрица $n \times n$, x, b – n -мерные вектора, ищем x .

Пусть b получит возмущение Δb . Тогда решение (1) с $b + \Delta b$ обозначим $x + \Delta x$, т.е.

$$A(x + \Delta x) = b + \Delta b \quad (2)$$

Вопрос: как при изменении $\|\Delta b\|/\|b\|$ изменяется $\|\Delta x\|/\|x\|$? Получим оценку относительной погрешности решения, через относительную погрешность правой части.

$$Ax + A\Delta x = b + \Delta b$$

$$A\Delta x = \Delta b$$

$$\Delta x = A^{-1} \Delta b$$

$$\|\Delta x\| \leq \|A^{-1} \Delta b\| \text{ и } \|b\| \leq \|A\| \|x\|, \text{ перемножим эти неравенства:}$$

$$\|\Delta x\| \|b\| \leq \|A\| \|x\| \|A^{-1}\| \|\Delta b\|, \text{ разделим на } \|b\| \text{ и } \|x\|:$$

$$\|\Delta x\|/\|x\| \leq \|\Delta b\|/\|b\| \|A\| \|A^{-1}\| - \text{ получили оценку.}$$

Определение. Число $\nu(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ – **число обусловленности** матрицы A или число обусловленности СЛАУ.

Если $\nu(A) \gg 1$, то плохо обусловленная система, иначе хорошо обусловленная.

Св-ва числа обусловленности:

$$1) \nu(A) \geq 1, \text{ т.к. } \nu(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \geq \|A A^{-1}\| = \|E\| = 1.$$

$$2) \nu(cA) = \nu(A), \text{ где } c = \text{const}, \text{ т.к. } (cA)^{-1} = 1/c A^{-1}$$

$$3) \nu(AB) \leq \|A\| \|B\| \|A^{-1}\| \|B^{-1}\|$$

Прямые методы решения СЛАУ – те, которые приводят к решению за конечное число арифметических операций. Если вычисления производятся точно, то мы получим точное решение.

Итерационные – те, в которых решение получается как предел бесконечной последовательности. На практике такая последовательность обрывается на заданной точности.

Метод Гаусса.

Запишем СЛАУ в виде:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

Пусть $a_{i1} \neq 0$, умножим i -ое уравнение на $m_{i1} = a_{i1}/a_{11}$, $i = 2, n$; Получим

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a^{(1)}_{22}x_2 + \dots + a^{(1)}_{2n}x_n = b^{(1)}_2$$

.....

$$a^{(1)}_{n2}x_2 + \dots + a^{(1)}_{nn}x_n = b^{(1)}_n$$

здесь $a^{(1)}_{ij} = a_{ij} - m_{i1}a_{1j}$; $b^{(1)}_i = b_i - m_{i1}b_1$; $i, j = 2, n$;

Пусть $a^{(1)}_{22} \neq 0 \dots$. Продолжая этот процесс приходим к системе с верхней треугольной матрицей

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a^{(1)}_{22}x_2 + \dots + a^{(1)}_{2n}x_n = b^{(1)}_2$$

.....

$$a^{(n-1)}_{nn}x_n = b^{(n-1)}_n$$

здесь $a^{(i-1)}_{ij} = a^{(i-2)}_{ij} - m_{ij-1} a^{(i-1)}_{i-1,j}$; $j = i, n$;

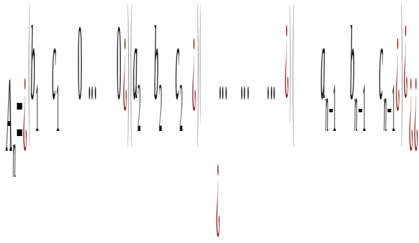
$$b^{(i-1)}_i = b^{(i-2)}_i - m_{i,j-1} b^{(i-2)}_{i-1}; i = 3, n;$$

Решение может быть получено по формулам:

$$x_n = b^{(n-1)}_n / a^{(n-1)}_{nn}, x_i = (b_i - \text{сумма_по_j_от_i+1_до_n}(a^{(i-1)}_{ij} x_j)) / a^{(i-1)}_{ii}, i = n-1, \dots, 1.$$

Метод прогонки.

Применяется для решения СЛАУ с трехдиагональной матрицей ($a_{ij} = 0$ для всех i, j таких что $|i-j| > 1$)



Основным его преимуществом является экономичность (примерно $8n$ операций). Недостатком метода является то, что с каждой итерацией накапливается ошибка округления.

Запишем i -ое уравнение системы $a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i$, где $i=1..n$, $a_1 = c_n = 0$.

После выполнения прямого хода метода Гаусса, получим систему, содержащую в каждом уравнении уже не три, а две неизвестные: x_i и x_{i+1} . Поэтому формулы обратного хода можно представить в виде:

$$x_i = \delta_i + \gamma_i x_{i+1}, \quad i=n, \dots, 1, \quad \text{где } \gamma_i \text{ и } \delta_i \text{ показаны формулами}$$

$$\delta_i = \frac{d_i - a_i \delta_{i-1}}{b_i + a_i \gamma_{i-1}}, \quad \gamma_i = \frac{-c_i}{b_i + a_i \gamma_{i-1}}, \quad i=1, \dots, n, \quad a_1 = c_n = 0.$$

Заметим, что $\gamma_n = 0$, так как $c_n = 0$.

Условие диагонального преобладания является достаточным условием для устойчивости прогонки, но не является необходимым:

$$|b_i| \geq |a_i| + |c_i|, \quad i=1, \dots, n, \quad \text{причем } a_i \neq 0, \quad i=2, \dots, n, \quad c_i \neq 0, \quad i=1, \dots, n-1.$$

При этом хотя бы для одного уравнения должно выполняться строгое неравенство.

Метод вращений.

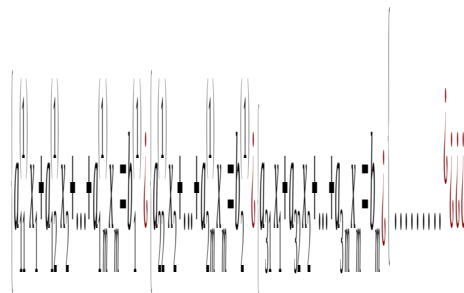
Прямой ход метода. Исключаем неизвестное x_1 из всех уравнений, кроме первого. Для исключения x_1 из 2-го уравнения вычисляют числа

$$\alpha'_{12} = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}, \quad \beta'_{12} = \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}$$

где α и β такие, что $\alpha'^2_{12} + \beta'^2_{12} = 1$, $-\beta'_{12} \alpha_{11} + \alpha'_{12} \alpha_{21} = 0$. Первое уравнение системы заменяем

линейной комбинацией первого и второго уравнений с коэффициентами α'_{12} и β'_{12} , а второе уравнение

такой же комбинацией с α'_{12} и $-\beta'_{12}$. В результате получим систему



(2.6)

$$a_{1j}^{(1)} = \alpha'_{12} a_{1j} + \beta'_{12} a_{2j}, \quad a_{2j}^{(1)} = \alpha'_{12} a_{2j} - \beta'_{12} a_{1j}, \quad b_1^{(1)} = \alpha'_{12} b_1 + \beta'_{12} b_2,$$

Здесь $b_2^{(1)} = \alpha'_{12} b_2 - \beta'_{12} b_1,$

где $j = \overline{1, m}$.

Преобразование системы (2.1) к системе (2.6) эквивалентно умножению матрицы A и вектора B слева на матрицу C_{12} вида

$$C_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Аналогично для исключения x_1 из третьего уравнения вычисляем числа

$$\alpha'_{13} = \frac{a_{11}^{(1)}}{\sqrt{(a_{11}^{(1)})^2 + (a_{31})^2}} \quad \text{и} \quad \beta'_{13} = \frac{a_{31}}{\sqrt{(a_{11}^{(1)})^2 + (a_{31})^2}}$$

$$\alpha_{13}^2 + \beta_{13}^2 = 1, \quad \alpha_{13} a_{31} - \beta_{13} a_{11}^{(1)} = 0$$

такие, что

Затем первое уравнение системы (2.6) заменяем линейной комбинацией первого и третьего уравнений с коэффициентами α'_{13} , β'_{13} , а третье уравнение системы (2.6) тоже заменяем линейной комбинацией с α'_{13} , β'_{13} . Это преобразование эквивалентно умножению слева на матрицу

$$C_{13} = \begin{pmatrix} \alpha'_{13} & 0 & \beta_{13} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\beta_{13} & 0 & \alpha'_{13} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Исключая неизвестное x_1 из всех последующих уравнений получим систему

$$A^{(1)} \mathbf{x} = B,$$

где матрица $A^{(1)} = C_{1m} \dots C_{13} C_{12} A$, а вектор правых частей $B^{(1)} = C_{1m} \dots C_{13} C_{12} B$.

Здесь и далее через C_{kj} обозначена матрица элементарного преобразования, отличающаяся от единичной матрицы E только четырьмя элементами. Действие матрицы C_{kj} на вектор \mathbf{x} эквивалентно

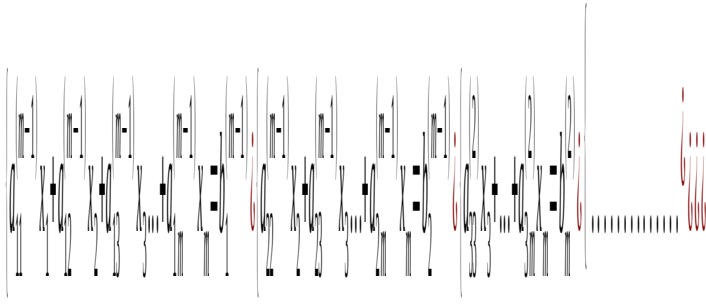
повороту вектора \mathbf{x} вокруг оси перпендикулярной плоскости $Ox_k \quad X_i$ на угол ϕ'_{kj} такой, что $\alpha'_{ki} = \cos \phi'_{ki}$, $\beta_{ki} = \sin \phi_{ki}$.

Операцию умножения на матрицу C_{kj} называют плоским вращением. Первый этап состоит из $m-1$ шагов, в результате чего получается система

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} x_1 + \dots + a_{1m} x_m = b_1 \\ \dots \\ a_{m-1,1} x_1 + \dots + a_{m-1,m} x_m = b_{m-1} \\ a_m x_m = b_m \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

В матричной форме $A^{(1)} \mathbf{x} = B^{(1)}$.

На втором этапе, состоящем из $m-2$ шагов, из уравнений системы (2.7) с номерами $3, 4, \dots, m$ исключают неизвестное x_2 . В результате получим систему



В матричной форме получаем $A^{(2)}x=B^{(2)}$, где $A^{(2)}=C_{2m}\dots C_{23}A^{(1)}$, $B^{(2)}=C_{2m}\dots C_{23}B^{(1)}$.

После завершения (m-1)-го шага приходим к системе с верхней треугольной матрицей вида

$$A^{(m-1)}x=B^{(m-1)}, \text{ где } B^{(m-1)}=C_{m-1,m}B^{(m-2)}.$$

Обратный ход метода вращения проводится точно также, как и для метода Гаусса.

Всего метод вращения требует примерно $\frac{4m^3}{3}$ операций умножения и деления.

Метод Якоби (простых итераций)

Исходную систему

$$Ax=B \quad (1.11)$$

преобразуем к виду:

$$x_i = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j - \sum_{j=i+1}^m \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad (1.12) \text{ где } i=1,2,\dots,m; a_{ii} \neq 0.$$

Первая сумма равна нулю, если верхний предел суммирования меньше нижнего.

$$x_1 = -\sum_{j=2}^m \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j + \frac{b_1}{a_{11}}.$$

Так (1.12) при i=1 имеет вид

По методу Якоби (метод простых итераций) x_i^{n+1} (n+1 приближение x_i) ищем по формуле

$$x_i^{n+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^n - \sum_{j=i+1}^m \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^n + \frac{b_i}{a_{ii}}. \quad (1.13)$$

где n – номер итерации (0,1,...); $i \in \overline{1,m}$.

Итерационный процесс (1.13) начинается с начальных значений x_i^0 , которые в общем случае задаются произвольно, но предпочтительнее, если за x_i^0 взять свободные члены исходной системы.

$$\max_i |x_i^{n+1} - x_i^n| < \varepsilon$$

Условие окончания счета: $i \in \overline{1,m}$.

№22. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (МЕТОДЫ РУНГЕ-КУТТА, АДАМСА, МЕТОДЫ ДЛЯ ЖЕСТКИХ СИСТЕМ). [наверх](#)

Метод Рунге-Кутты

$$y' = f(x, y)$$

$$y_{x_0} = y_0$$

на равномерной сетке $[x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_m = b]$ отрезка $[a, b]$ с шагом $h = (b - a) / m$ являются методами Рунге-Кутты, если, начиная с данных (x_0, y_0) , решение ведётся по следующим рекуррентным формулам:

$$x_i = x_{i-1} + h, y_i = y_{i-1} + \Delta y_{i-1} \quad (i = \overline{1, m}) \quad \Delta y_{i-1} = \sum_{j=1}^p d_j k_j^{[i-1]}, k_j^{[i-1]} = hf(x_{i-1} + c_j h, y_{i-1} + c_j k_{j-1}^{[i-1]})$$

(8.6)

Метод называют методом Рунге-Кутты порядка p если он имеет p -й порядок точности по шагу h на сетке.

Порядок точности p достигается с помощью формул (8.6) при определённых значениях коэффициентов c_j и d_j ($j = \overline{1, p}$) коэффициент c_1 всегда полагают равным нулю. Эти коэффициенты вычисляют по следующей схеме:

1) точное решение $\varphi(x_0 + h)$ и его приближение

$y_1 = y_0 + \Delta y_0(h)$ представляют в виде разложения по формуле Тейлора с центром x_0 вплоть до слагаемого порядка h^{p+1}

2) из равенств подобных членов при одинаковых степенях h в двух разложениях получают уравнения, решая которые находят коэффициенты c_j и d_j .

Заметим, что метод Эйлера можно называть методом Рунге-Кутты первого порядка. Действительно, для

$p=1, c_1=0, d_1=1$ формулы (8.6) преобразуются в соотношения (8.4):

$$x_i = x_{i-1} + h, y_i = y_{i-1} + \Delta y_{i-1} \quad (i = \overline{1, m}) \quad \Delta y_{i-1} = d_1 k_1^{[i-1]} = k_1^{[i-1]} = hf(x_{i-1}, y_{i-1}) \text{ или}$$

$x_i = x_{i-1} + h, y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})$ Метод Рунге-Кутты второго порядка называют методом Эйлера-Коши,

если $p=2, c_1=0, c_2=1, d_1=d_2=\frac{1}{2}$ Алгоритм метода Эйлера-Коши следует из формул (8.6):

$$x_i = x_{i-1} + h, y_i = y_{i-1} + \Delta y_{i-1} \quad (i = \overline{1, m}) \quad \Delta y_{i-1} = \frac{1}{2} (k_1^{[i-1]} + k_2^{[i-1]}), (i = \overline{1, m})$$

$$k_1^{[i-1]} = hf(x_{i-1}, y_{i-1}), k_2^{[i-1]} = hf(x_{i-1} + h, y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}))$$

(8.7)

Для практической оценки погрешности решения можно применять правило Рунге, полагая в формуле (8.5)

$p=2$

Метод Адамса

$$\frac{du}{dt} = f(t, u)$$

$$u(t_0) = u$$

Введем сетку с шагом τ : $t_j = t_0 + j\tau$; $y_j = y(t_j)$; $f_j = f(t_j, y_j)$

Проинтегрируем дифференциальное уравнение в пределах от t_j, t_{j+1}

$$u(t_{j+1}) = u(t_j) + \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t, u(t)) dt \quad (2)$$

Пусть $y_j, y_{j-1}, \dots, y_{j-m+1}$ уже найдены

Заменим $F(t) = f(t, u(t))$.

Приблизительно интерполяционный многочлен $(m-1)$ степени, т. е. $P_{m-1}(t)$ построенного по значениям функции $F(t)$ в узлах $y_j, y_{j-1}, \dots, y_{j-m+1}$, тогда подставим в (2) и получаем:

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + \int_{t_j}^{t_{j+1}} P_{m-1}(t) dt = y(t_j) + \tau \sum_{i=1}^m \beta_i f_{j-i+1}$$

Таким образом мы получим явную формулу Адамса:

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{\tau} = \beta_1 f_j + \dots + \beta_m f_{j-m+1} \quad (3)$$

Заменим подынтегральную функцию в равенстве (2) $F(t) = f(t, u(t))$ интерполяционной степенью $Q_m(t)$ совпадающую со значениями $f_{j+1}, f_j, \dots, f_{j-m+1}$ в узлах $y_{j+1}, y_j, \dots, y_{j-m+1}$

Вычисляя интеграл, получим неявную m -шаговую формулу метода Адамса:

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{\tau} = \beta_0 f_{j+1} + \dots + \beta_m f_{j-m+1}$$

Можно показать, что при определенной гладкости f в (1), m -шаговый явный метод Адамса и $m-1$ -шаговый неявный метод Адамса сходится с m -тым порядком точности при $\tau \rightarrow 0$

Приведем расчетные формулы явного метода Адамса p -ого порядка точности:

$$y_{j+1} = y_j + \frac{\tau}{2} (3f_j - f_{j-1}), p=2$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{\tau}{12} (23f_j - 16f_{j-1} + 5f_{j-2}), p=3$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{\tau}{24} (55f_j - 59f_{j-1} + 37f_{j-2} - 9f_{j-3}), p=4$$

Приведем расчетные формулы неявного метода Адамса p -ого порядка точности:

$$y_{j+1} = y_j + \frac{\tau}{2} (f_{j+1} + f_j), p=2$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{\tau}{12} (5f_{j+1} + 8f_j - f_{j-1}), p=3$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{\tau}{24} (9f_{j+1} + 19f_j - 5f_{j-1} + f_{j-2}), p=4$$

Не явные методы содержат искомое значение y_{j+1} нелинейно поэтому для их реализации на каждом шаге нужно решать нелинейное уравнение каким-нибудь итерационным методом.

Численное интегрирование жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Будем рассматривать: $\frac{du}{dt} = f(t, u)$ (1)

$$u(0) = u_0, t > 0$$

Предположим, что заранее известно характерное особенное поведение решение исходной дифференциальной задачи, тогда естественно требовать, чтобы это особенность сохранялась и у решения численной задачи.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{du}{dt} = Au \quad (9)$$

$$\text{Где } u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \dots \\ u_n(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Если матрица A этой системы имеет большой разброс собственных значений.

Рассмотрим систему (9) с постоянной матрицей A.

Def. Системы дифференциальных уравнений (9) с постоянной матрицей A называется *жесткой* если

$$1) \Re \lambda_k < 0, k = 1, \dots, n$$

$$2) s = \frac{\max_{1 \leq k \leq n} |\Re \lambda_k|}{\min_{1 \leq k \leq n} |\Re \lambda_k|} - \text{велико}$$

s – называется жесткостью системы (9)

Если матрица A зависит от t изменяется (0, T), тогда $\lambda_k = \lambda_k(t)$ можем определить

$$s = \frac{\max_{1 \leq k \leq n} |\Re \lambda_k(t)|}{\min_{1 \leq k \leq n} |\Re \lambda_k(t)|}$$

Для решения жестких систем обычно используют неявные устойчивые методы у которых шаг интегрирования τ выбирается из соображений точности, а не устойчивости.

Для интегрирования жестких систем часто используют чисто неявный метод Гира, который имеет вид:

$$a_0 y_j + a_1 y_{j-1} + \dots + a_m y_{j-m} = \tau f(t_j, y_j)$$

Конкретно:

При m=1, метод Гира совпадает с неявным методом Эйлера.

При m=2 расчетные формулы имеют вид: $\frac{3}{2} y_j - 2 y_{j-1} + \frac{1}{2} y_{j-2} = \tau f(t_j, y_j)$ второго порядка точности.

Методы Гира обладают хорошими свойствами устойчивости, что позволяет решать жесткие системы.

№23. ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ. ТЕОРЕМА КУНА-ТАККЕРА. [наверх](#)

Определение:

Множество $U \subset E^n$ называется *выпуклым множеством*, если $\forall x, y \in U \Rightarrow z = \alpha x + (1 - \alpha)y \in U \quad \forall \alpha \in [0, 1]$

Функция многих переменных $f(x)$ определенная на выпуклом множестве $U \subset E^n$ называется *выпуклой функцией*, если $\forall x, y \in U \quad \forall \alpha \in [0, 1] \Rightarrow f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \quad (1)$

Таким образом, можно сказать, что функция выпуклая, если ее график лежит всегда ниже секущей между точками пересечения.

Теорема:

Если в выражении (1) знак неравенства \geq , то такие функции называются *вогнутыми*

Теорема:

Пусть $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на выпуклом множестве $U \subset E^n$, тогда, для того, чтобы она была выпуклой \Leftrightarrow чтобы $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in U$

Теорема:

Пусть $f(x)$ один раз непрерывно дифференцируема на выпуклом множестве $U \subset E^n$, тогда, для того, чтобы она была выпуклой \Leftrightarrow чтобы $\forall x, y \in U$ выполнялось $f(x, y) \geq f(x) + (f'(x), y)$

Теорема:

Пусть функция $f(x)$ выпуклая и дифференцируемая в E^n , для того, чтобы функция достигала в точке x^* своего глобального минимума \Leftrightarrow чтобы $\text{grad } f(x^*) = 0$

Доказательство:

1. Необходимость

Следует из теоремы о необходимом условии безусловного минимума

2. Достаточность

Пусть x^* некоторая точка, в которой $f'(x^*) = 0$. Докажем, что x^* -глобальный минимум. Для этого воспользуемся предыдущей теоремой, полагая $x = x^*$, тогда получим:

$$f(x^* + y) \geq f(x^*) + (f'(x^*), y)$$

В силу предположения теоремы $f'(x^*) = 0$ мы получаем:

$$f(x^* + y) \geq f(x^*), \text{ т.к. } y \text{ произвольная, то } z = x^* + y \text{ тоже произвольная}$$

$$f(z) \geq f(x^*) \quad \forall z \in E^n$$

Ч.т.д.

Определение:

Задача $f(x) \rightarrow \min_{x \in U}$ называется задачей выпуклого программирования, если $f(x)$ и U выпуклые. Если при этом U определено следующим образом:

$$U = \{x \in E^n: \varphi_1(x) \geq 0, \dots, \varphi_m(x) \geq 0\}, \text{ то мы имеем основную задачу выпуклого программирования}$$

Определение:

Основная задача выпуклого программирования называется *регулярной*, если существует такая точка \bar{x} , для которой $\varphi_i(\bar{x}) \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (1)$

Условие (1) называется *условием регулярности Слейтера*. Условие регулярности Слейтера означает, что U имеет внутренние точки.

Из теоремы 2 (необходимого условия условного минимума) мы получаем, что необходимое условие для основной задачи выпуклого программирования:

Для того, чтобы точка $x^* \in U$ была решением основной задачи выпуклого программирования необходимо, чтобы $\exists \nu_i^* > 0$, что выполняется равенство:

$$f'(x^*) = \sum_{i \in I(x^*)} v_i^* \varphi_i'(x^*) \quad (2)$$

При этом предполагается, что градиенты активных ограничений линейно не зависимы.

1. Условие дополняющей нежесткости.

$$i \in I(x^*) \Rightarrow \varphi_i(x^*) = 0, v_i^* \geq 0 \Rightarrow \varphi_i(x^*)v_i^* = 0$$

$$i \notin I(x^*) \Rightarrow v_i^* = 0, \varphi_i(x^*) > 0, \Rightarrow \varphi_i(x^*)v_i^* = 0$$

Таким образом, получаем, что $\varphi_i(x^*)v_i^* = 0 \quad i = 1, \dots, m$ (3)

Условие (3) называется *условием дополняющей нежесткости*.

2. Функция Лагранжа

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_m(x) \end{pmatrix}$$

Введем в рассмотрение вектор v и функцию $\varphi(x)$, тогда условие (3) можно записать в виде:

$$(v^*, \varphi(x^*)) = 0 \quad (4)$$

$$L(v, x) = f(x) - (v, \varphi(x))$$

$$E^{m \times n} \rightarrow R$$

Такая функция называется *функцией Лагранжа выпуклого программирования*.

$f(x)$ - выпуклая, $\varphi_i(x)$ - выпуклые ($-\varphi_i(x)$ - выпуклые), $v_i \leq 0 \Rightarrow L(v, x)$ - выпуклая функция по x

$$L_x(v, x) = \frac{dL}{dx} = f'(x) - \sum_{i \in I(x^*)} v_i^* \varphi_i'(x)$$

Возьмем точку (v^*, x^*)

$$L_x(v^*, x^*) = f'(x^*) - \sum_{i=1}^m v_i^* \varphi_i'(x^*) = 0$$

согласно равенству (2).

Таким образом, мы получили, что $\frac{dL}{dx} = 0$, откуда следует, что $L_1(v^*, x)$ по x достигает своего условного минимума в точке x^* :

$$L_1(v^*, x) \geq L(v^*, x^*) = f(x^*) - (v^*, \varphi(x^*)) = f(x^*)$$

Определение:

Точка (v^*, x^*) называется *седловой точкой функции Лагранжа*, если эта функция имеет минимум по x и максимум по v в этой точке.

Теорема Куна-Таккера:

Для того, чтобы $x^* \in U$ была решением основной задачи выпуклого программирования необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор $v^* \geq 0$, что точка (v^*, x^*) была седловой точкой $L(x, v)$.

Доказательство:

1. Необходимость.

Была выше доказана, в предположении дифференцируемой целевой функции, градиенты активных ограничений линейно независимы.

2. Достаточность.

Требуется доказать, что если точка (v^*, x^*) седловая точка функции Лагранжа, то x^* - решение основной задачи выпуклого программирования, т.е. доказать, что

$$\text{a) } \varphi_i(x^*) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\text{b) } f(x^*) \leq f(x) \quad x \in U$$

a) Поскольку (v^*, x^*) седловая точка, то $L(v^*, x^*) \geq L(v^*, x) \quad \forall v \leq 0$

$$f(x^*) - (v, \varphi(x^*)) \leq f(x^*) - (v^*, \varphi(x^*))$$

$$-(v, \varphi(x^*)) \leq -(v^*, \varphi(x^*))$$

$$(v, \varphi(x^*)) \geq (v^*, \varphi(x^*)) \quad \forall v \geq 0 \tag{5}$$

Из (5) следует, что $\varphi_i(x^*) \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$

Предположим, что существует $i_0: \varphi_{i_0}(x^*) < 0$. Возьмем в качестве $v = (0, \dots, v_{i_0}, \dots, 0)$

И $v_{i_0} \rightarrow \infty$, тогда из неравенства (5) получаем противоречие:

Конечное число $\leq -\infty$, следовательно $x^* \in U$

Положим в неравенстве (5) $v=0$, тогда получаем, что $0 \leq (v^*, \varphi(x^*)) \leq 0 \Rightarrow (v^*, \varphi(x^*)) = 0$

Следовательно, условие дополняющей жесткости выполняется.

$$\text{b) } L(x^*, v^*) \leq L(x, v^*)$$

$$f(x^*) - (v^*, \varphi(x^*)) \leq f(x) - (v^*, \varphi(x))$$

$$f(x^*) \leq f(x) - (v^*, \varphi(x))$$

Если предположить, что т. $x \in U$, то $\varphi(x) \geq 0$, тогда $(v^*, \varphi(x)) \geq 0$

Получаем:

$$f(x^*) \leq f(x) - (v^*, \varphi(x)) \leq f(x)$$

Ч.т.д.

№24. АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ СЕТЕВЫХ ГРАФИКОВ. [наверх](#)

Сетевой график – это граф, вершины которого отображают состояния некоторого объекта (например, строительства), а дуги - работы, ведущиеся на этом объекте. Каждой дуге сопоставляется время, за которое осуществляется работа и/или число рабочих, которые осуществляют работу. Часто сетевой график строится так, что расположение вершин по горизонтали соответствует времени достижения состояния, соответствующего заданной вершине.

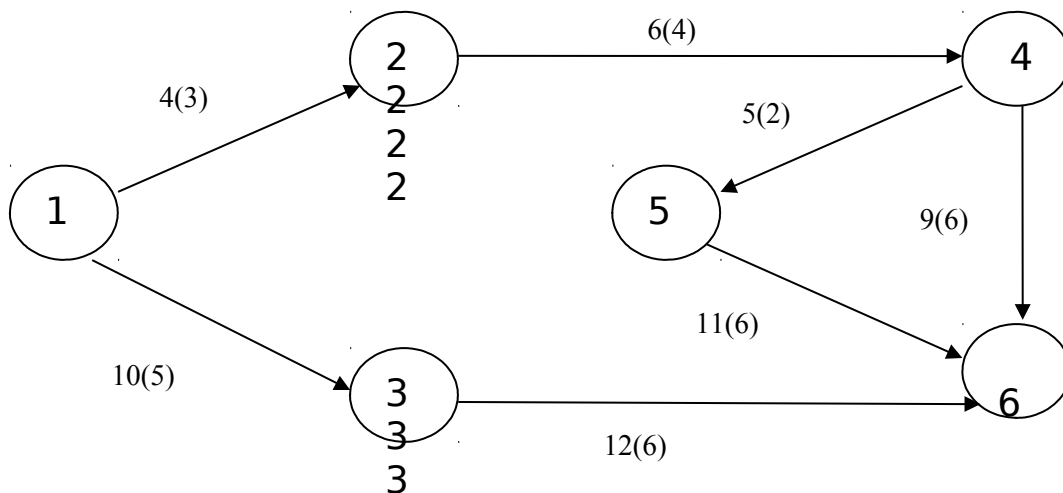
Анализ сетевого графика

Полный путь – это путь от исходного до завершающего события или любой путь от истока к стоку.

Критический путь – максимальный по продолжительности полный путь; работы, лежащие на этом пути, также называются критическими. Именно длительность критического пути определяет наименьшую общую продолжительность работ по проекту в целом.

Длительность выполнения всего проекта в целом может быть сокращена за счет сокращения длительности задач, лежащих на критическом пути. Соответственно, любая задержка выполнения задач критического пути повлечет увеличение длительности проекта. Концепция критического пути обеспечивает концентрацию внимания менеджера на критических работах. Однако основным достоинством метода критического пути является возможность манипулирования сроками выполнения задач, не лежащих на критическом пути.

Расчет полных путей:



При нормальном режиме

- 1) 1 - 2 - 4 - 6 $\Rightarrow 4 + 6 + 9 = 19$
- 2) 1 - 3 - 6 $\Rightarrow 10 + 12 = 22$
- 3) 1 - 2 - 4 - 5 - 6 $\Rightarrow 4 + 6 + 5 + 11 = 26$

При ускоренном режиме

- 1) 1 - 2 - 4 - 6 $\Rightarrow 3 + 4 + 6 = 13$
- 2) 1 - 3 - 6 $\Rightarrow 5 + 6 = 11$
- 3) 1 - 2 - 4 - 5 - 6 $\Rightarrow 3 + 4 + 2 + 6 = 15$

Критическим путем будет путь 1-2-4-5-6, продолжительность которого при нормальном режиме составит 26 суток, а при ускоренном режиме – 15 суток.

Максимальный срок завершения всей совокупности работ составит 26 суток, а минимальный – 15 суток. Требуется довести продолжительность работ при нормальном режиме с 26 до 17 суток, а при ускоренном режиме с 15 суток до 17 суток.

Оптимизация сетевого графика

После расчета сетевого графика любым из указанных способов его анализируют с целью установления соответствия полученных сроков продолжительности установленным срокам. Корректировку сетевого графика называют *оптимизацией графика*.

Корректировка графика по продолжительности преследует цель сократить критический путь. Сокращения продолжительности критического пути в результате использования резервов времени, выявленных на некритических работах благодаря привлечению дополнительных ресурсов.

Оптимизация сетевого графика может осуществляться по следующим критериям:

- минимизация времени выполнения комплекса работ при заданных затратах на это выполнение;
- минимизация затрат на выполнение комплекса работ при заданном времени этого выполнения.

Целью оптимизации по критерию является сокращение времени выполнения проекта в целом. Эта оптимизация имеет смысл только в том случае, когда длительность выполнения работ может быть уменьшена за счет дополнительных ресурсов, что влечет к повышению затрат на выполнение работ. Для оценки величины дополнительных затрат, связанных с ускорением выполнения той или иной работы, используются либо нормативы, либо данные о выполнении аналогичных работ в прошлом.

Исходными данными для проведения оптимизации являются:

- нормальная длительность работы;
- ускоренная длительность;
- затраты на выполнение работы в нормальный срок;
- затраты на выполнение работы в ускоренный срок.

Сделаем оптимизацию по критерию минимизации затрат сетевого графика при заданной продолжительности выполнения всего комплекса работ за 17 суток. Оптимизацию можно провести двумя способами.

Первый способ заключается в уменьшении продолжительности выполнения работ, осуществляемых в нормальном режиме, начиная с тех, которые дают наименьший прирост затрат.

Второй способ заключается в увеличении продолжительности выполнения работ, осуществляемых в ускоренном режиме, начиная с тех, которые дают наибольший прирост затрат.

№25. МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ И ИХ СВЕДЕНИЕ К ЗАДАЧАМ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. [наверх](#)

Общее описание матричной игры. У игрока 1 имеется набор из m стратегий, нумеруемых числами $i = \overline{1, m}$; у игрока 2 имеется n стратегий, нумеруемых числами $j = \overline{1, n}$. Если игрок 1 выбрал стратегию i , а игрок 2 - стратегию j , то выигрыш 1-го игрока равен числу $a_{i,j}$ (это может быть и проигрыш, если $a_{i,j} < 0$). Матрица $A = \{a_{i,j}\}_{m \times n}$ называется *матрицей игры*, упорядоченная пара стратегий (i, j) - *ситуацией*. Ситуация (i, j) называется *приемлемой* для игрока 1, если $a_{i,j} \geq a_{i',j}$ ($i' = \overline{1, m}$). Аналогично, ситуация (i, j) приемлема для игрока 2, если $a_{i,j} \leq a_{i,j'}$ ($j' = \overline{1, n}$). Ситуация, приемлемая для обоих игроков, называется *равновесной*, т.е. (i, j) - равновесная, если $a_{i,j} \leq a_{i',j} \leq a_{i,j}$, $i' = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

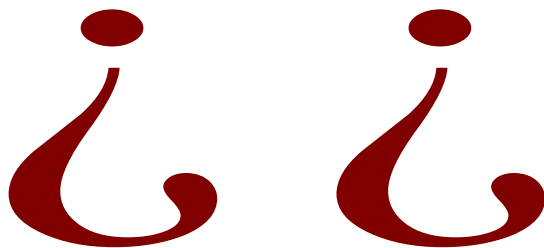
Из (1) следует, что равновесная ситуация представляет собой седловую точку матрицы A . Стратегии i и j , входящие в равновесную ситуацию (i, j) , называются соответственно *оптимальными* стратегиями 1-го и 2-го игроков.

Число $\alpha = \max_i \min_j a_{i,j}$ называется *нижним значением* игры, а число $\beta = \min_j \max_i a_{i,j}$ - её *верхним значением*.

Пусть (i, j) - ситуация приемлемая для игрока 1, тогда $a_{i,j} = \min_j a_{i,j} = \alpha$; если же (i, j) приемлема для игрока 2, то $a_{i,j} = \max_i a_{i,j} = \beta$. Указанные стратегии i и j будем называть *гарантирующими* соответственно для игроков 1 и 2.

Теорема 1. Для того чтобы матрица A имела седловую точку, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\alpha = \beta$.

Процесс отыскания седловой точки в матрице A можно представить схемой:



Под *смешанной* стратегией игрока 1 будем понимать такой вектор $x = (x_1, \dots, x_m)$, что

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1, \quad (2)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (3)$$

Аналогично, под смешанной стратегией игрока 2 будем понимать вектор $y = (y_1, \dots, y_n)$ такой, что

$$\sum_{j=1}^n y_j = 1, \quad (4)$$

$$y_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Определим билинейную функцию

$$E(x'; y) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i y_j$$

где x и y - произвольные смешанные стратегии игроков 1 и 2 соответственно. Функция $E(x'; y)$ называется *функцией выигрыша* для игрока 1.

Пусть X и Y - множества смешанных стратегий 1-го и 2-го игроков соответственно.

Решением матричной игры называется такая пара смешанных стратегий (x^i, y^i) , что

$$E(x'; y^i) \leq E(x^i; y^i) \leq E(x^i; y')$$

для $x' \in X, y' \in Y$.

При этом x^i и y^i называются *оптимальными смешанными стратегиями* соответствующих игроков, а величина $v = E(x^i; y^i)$ - *ценой игры*.

Теорема 2. Для того чтобы $x \in X$ была оптимальной смешанной стратегией 1-го игрока матричной игры с матрицей A и ценой игры v , необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq v, \quad j = \overline{1, n} \quad (6)$$

Аналогично для 2-го игрока: чтобы $y \in Y$ была оптимальной смешанной стратегией 2-го игрока, необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq v, \quad i = \overline{1, m} \quad (7)$$

Сведение матричной игры к задаче ЛП. Пусть дана матричная игра с матрицей $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Будем предполагать, что цена игры положительная.

Согласно теореме 3 оптимальные смешанные стратегии x и y соответственно 1-го и 2-го игроков и цена игры v должны удовлетворять соотношениям (2), (3), (6) и (4), (5), (7) соответственно. Разделим все эти уравнения и неравенства на v и введем обозначения:

$$p_i = \frac{x_i}{v} \quad (i = \overline{1, m}), \quad q_j = \frac{y_j}{v} \quad (j = \overline{1, n})$$

Тогда получим задачи:

$$\sum_{i=1}^m p_i = \frac{1}{v}, \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i \geq 1, \quad p_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$$

$$\sum_{j=1}^n q_j = \frac{1}{v}, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \leq 1, \quad q_j \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$$

Поскольку первый игрок стремится найти такие значения x_i и, следовательно, p_i , чтобы цена игры v была максимальна, то решение первой задачи сводится к задаче ЛП:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m p_i \rightarrow \min, \\ & \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i \geq 1, \quad (j = \overline{1, n}), \\ & p_i \geq 0, \quad (i = \overline{1, m}). \end{aligned} \quad (8)$$

Аналогично вторая задача сводится к задаче ЛП:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n q_j \rightarrow \max, \\
& \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \leq 1, \quad (i = \overline{1, m}), \\
& q_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, n}).
\end{aligned} \tag{9}$$

Решив эти задачи, получим значения p_i ($i = \overline{1, m}$) и q_j ($j = \overline{1, n}$), а также величину v . Тогда смешанные стратегии, т.е. значения x_i и y_j , получаются по формулам:

$$x_i = v \cdot p_i, \quad (i = \overline{1, m}); \quad y_j = v \cdot q_j, \quad (j = \overline{1, n}). \tag{10}$$

При этом заметим, что достаточно решить лишь одну задачу ЛП например, (9). Решение другой (двойственной к исходной) задачи получаем исходя из теории двойственности.

№26. УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА И ОСНОВНАЯ ЛЕММА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.

[наверх](#)

Уравнение Эйлера является основной формулой ВИ, с помощью которой ищутся стационарные точки и экстремумы функционалов. Эти ур-я используются в задачах оптимизации широко.

Пусть задан функционал $J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx$, с подинт-й ф-ей $F(x, y, y')$, обладающей непр. частн. производными 1го порядка. Если этот функционал достигает экстремума на некоторой ф-ии F , то для нее должно вып-ся обыкн. диф. ур-е

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \text{ - уравнение Эйлера.}$$

Вариация функционала будет наз-ся так: $\delta J = \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y}_0 \Delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \dot{y}_0 \Delta y'$.

Теорема. (Необходимое условие экстремума). Для того чтобы функционал $J(y)$ при $y = y_0$ достигал экстремума, необходимо, чтобы его вариация (если она существует) обращалась в ноль при $y = y_0$, т.е. $\delta J \equiv 0$ при $y = y_0$.

Доказательство. Рассм. для определенности минимум. Если $J(y)$ при $y = y_0$ достигает минимума, то это значит, что $\Delta J = J(y_0(x) + \delta y) - J(y_0(x)) \geq 0$ для всех δy , для которых $\|\delta y\|_1$ достаточно мала. Но, по определению вариации, $\Delta J = \delta J(y_0(x), \delta y) + \alpha(y_0(x), \delta y) \cdot \|\delta y\|_1$ и $\alpha(y_0(x), \delta y) \|\delta y\|_1 \rightarrow 0$. Если $\delta J \neq 0$, то, при достаточно малых $\|\delta y\|_1$, знак выражения ΔJ определяется знаком главной части приращения δJ . Но δJ - линейный функционал, поэтому $\delta J(y_0(x), -\delta y) = -\delta J(y_0(x), \delta y)$, и, следовательно, при $\delta J \neq 0$ выражение ΔJ может быть, как положит., так и отриц. при сколь угодно малых $\|\delta y\|_1$, т.е. экстремум в данном случае невозможен. **Чтд.**

Теорема (уравнение Эйлера). Для того, чтобы функционал $J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx$, определенный на множестве функций $y(x)$ из $C^1[a, b]$ и удовлетворяющих условиям $y(a) = A, y(b) = B$, достигал экстремума на данной функции $y(x)$, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$.

Доказательство. Дадим функции $y(x)$ некоторое приращение δy . Для того чтобы функция $y(x) + \delta y$ по-прежнему удовлетворяла граничным условиям, нужно, чтобы $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$. $dF \dot{y}_0 \Delta x \dot{y}_0 = F'(x_0) \Delta x, d^2 F \dot{y}_0 \Delta x \dot{y}_0 = F''(x_0) \Delta x^2$

$\Delta F = dF + \frac{1}{2} d^2 F + \dots$ Вычислим приращение функционала

$$\Delta J[y] = \delta J + \frac{1}{2} \delta^2 J + \dots = \int \left(\frac{\partial F}{\partial y} \dot{y}_0 \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \dot{y}_0 \delta y' \right) dx + \frac{1}{2} \int \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \delta y \delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \delta y'^2 \right) dx, \text{ где}$$

многоточие обозначает члены порядка выше первого, относительно δy и $\delta y'$.

$$x_0 - \dot{y}_0 \text{ экстр. } \square \Rightarrow dF = 0 \forall \Delta x \text{ и } y_0 - \dot{y}_0 \text{ экстр. } \square \Rightarrow \delta J[y_0, \delta y] = 0 \forall \delta y$$

$$\Delta J[y] = \int \frac{\partial F}{\partial y} \dot{y}_0 \delta y dx + \int \frac{\partial F}{\partial y'} \dot{y}_0 \delta y' dx = \dot{y}_0 \dot{y}_0$$

$$= \dot{y}_0 = \int \left(\frac{\partial F}{\partial y} \dot{y}_0 - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \dot{y}_0 \right) \delta y dx.$$

При этом по теореме о необх. усл-ии будет: необходимое усл-е $= 0 \forall \delta y \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} \dot{y}_0 - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \dot{y}_0 = 0$. **Чтд.**

Интегральные кривые уравнения Эйлера называются *экстемальями*.

Основная лемма ВИ

Если для каждой непрерывной функции $\eta(x)$, $\int_{x_0}^x \phi(x) \eta(x) dx$, где $\phi(x)$ - непрерывна на отрезке $[x_0, x_1]$, то

$\phi(x) \equiv 0$ на том же отрезке.

Доказательство. Предположим, что $\phi(\bar{x}) \neq 0$, $x_0 \leq \bar{x} \leq x_1$. Тогда из непрерывности $\phi(x)$ следует, что существует окрестность точки $x = \bar{x}$, где $\phi(x)$ сохраняет знак $x_0 \leq \bar{x} \leq x_1$. Выбрав функцию $\eta(x)$, сохраняющую такой же знак в этой окрестности, и равной нулю вне этой окрестности, получим $\int_{x_0}^x \phi(x)\eta(x)dx = \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1} \phi(x)\eta(x)dx \neq 0$.
Пришли к противоречию. Следовательно, $\phi(x) \equiv 0$.