1.Понятие ДУ с ч.п. Постановка задач. Корректность. Пример Адамара.

Определение: Уравнением линейной функции, линейной относительно неизвестной функции и её частных производных, будем называть:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial U}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial U}{\partial x_i}+C(x)U=f(x)$$

Определение: Уравнение называется квазилинейным, если оно линейно относительно старшей производной:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,U,\frac{\partial U}{\partial x_1},...,\frac{\partial U}{\partial x_n})\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}+F(U,x,\frac{\partial U}{\partial x_1},...,\frac{\partial U}{\partial x_n})=0$$

(2) $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\Delta U(M,t)+f_1(M,t)$ - волновое уравнение, где

Δ - оператор Лапласа; a – скорость звука и света;

$a=\sqrt{\frac{E}{\rho}}, f_1=\frac{f}{\rho}, \Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$,

$\bullet_a U=f(M,t)$ - оператор Даламбера, $\bullet_a=\Delta-1$

(3) $c\rho\frac{\partial U}{\partial t}=div(kgradU)-qU+f(M,t)$ - уравнение описывающее теплообмен, где c – коэффициент удельной теплоёмкости, q – внутреннее поглощение тепла;

(6) $\Delta U=-f_1(M)$ - уравнение Пуассона(7) $\Delta U=0$ - уравнение Лапласа

Определение: Решением уравнения в частных производных называется всякая функция, которая будучи подставленной в уравнение вместе со своими производными, преобразует его в тождество по независимым переменным.

Решение, непрерывное вместе со своими частными производными до заданного порядка, будем называть регулярным. Решение, не являющееся регулярным, будем называть фундаментальным.

Для (1) и (2)→(9),(10)(9) $U\big|_{t=0}=\varphi(M)$ (10) $\frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(M)$ Для (3) и (4)→(9)

Задаются граничные условия вида:

(12) $\left[\alpha\frac{\partial U}{\partial n}+\beta U\right]\Big|_S=g(M,t), M\in S$

Если в (12):

$\alpha\equiv 0,\ U\big|_S=\mu_1$ - граничное условие первого рода (Дирихле);

$\beta\equiv 0,\ \frac{\partial U}{\partial n}\Big|_S=\mu_2$ - граничные условия второго рода (Неймана);

$\beta,\alpha\neq 0,\ \alpha/\beta>0$ - граничные условия третьего рода;

Поставленные задачи должны удовлетворять требованиям:

1) Решение существует;2) Решение задачи единственное;3) Решение задачи должно быть устойчиво к изменению данных;Удовлетворяющие этим условиям задачи называются корректными.

Пример: задача Адамара

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0, y>0, |x|<\infty, U\big|_{y=0}=0, \frac{\partial U}{\partial y}\Big|_{y=0}=e^{-\sqrt{n}}cosnx,$$

$$U\Big|_{y=0}=\varphi_1,\frac{\partial U}{\partial y}\Big|_{y=0}=\psi_1+e^{-\sqrt{n}}cosnx, n\gg 1$$

$$U(x,y)=\frac{e^{-\sqrt{n}}}{n}\cos nxshny$$

2.Вывод уравнения колебания струны. Примеры других уравнений математической физики.

Рассмотрим струну длиной l, тонкую упругую нить, не сопротивляющуюся изгибу, не связанному с изменением длины. Будем считать, что в начальный момент времени струна находится под действием силы T_0 и ориентирована вдоль оси x в положении равновесия. Обозначим через $\rho(x)$ линейную плотность струны $U=(U_1(x,t),U_2(x,t))$

1) Будем считать, что струна колеблется в поперечном направлении, т.е. смещения её точек перпендикулярно оси x. Тогда смещение каждой точки струны в момент времени t будет характеризоваться одной функцией U(x,t). Выберем две произвольные точки x_1 и x_2 так, что $x_2-x_1=\Delta x$. Струна упругая, поэтому сила натяжения в струне подчиняется закону Гука: $(U_x^{'})^2\ll 1$

2) Будем считать, что амплитуды колебаний настолько малы, что первыми производными можно пренебречь. В рамках этого допущения рассмотрим длину производного участка струна AB в начальный момент времени:

Длина дуги:

$$l_{AB}=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(U_x)^2}dx\approx\int_{x_1}^{x_2}dx=x_2-x_1=\Delta x$$

Обозначим f(x,t) – плотность равнодействующей внешних сил. Будем предполагать, что внешние силы и силы инерции так же перпендикулярны оси x.

Рассмотрим проекции всех сил, действующих на участок x_1x_2, ось U, в некоторый момент времени T:

$$\int_{x_1}^{x_2}\rho(x)\frac{\partial^2U(x,t)}{\partial t^2}dx=\int_{x_1}^{x_2}f(x,t)dx+T\left[\frac{\partial U}{\partial x}(x_2,t)-\frac{\partial U}{\partial x}(x_1,t)\right]$$

по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_{x_1}^{x_2}\rho(x)\frac{\partial^2U(x,t)}{\partial t^2}dx=\int_{x_1}^{x_2}f(x,t)dx+T\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2U(x,t)}{\partial x^2}dx\quad\int_{x_1}^{x_2}\left[\rho(x)\frac{\partial^2U(x,t)}{\partial t^2}-f(x,t)-T\frac{\partial^2U}{\partial x^2}\right]dx=0$$

В силу произвольности участка струны можно записать:

$$\rho(x)\frac{\partial^2U(x,t)}{\partial t^2}=T_0\frac{\partial^2U(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t)\qquad(1)$$

<u>Уравнение малых продольных колебаний стержня.</u>

Тогда:

$$(1'')\rho(x)\frac{\partial^2U(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[E(x)\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\right]+f(x,t)$$

Если стержень однородный:

$$(1')\frac{\partial^2U}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+F(x,t)$$

3.Вывод уравнения теплопроводности.

Рассмотрим стержень постоянного сечения площади S длины l. Будем считать стержень достаточно тонким. Все физические характеристики вдоль x одинаковы. Температура в каждой точке сечения в момент времени t описывает функция $U(x,t)$.

Изменим $U(x,t_1)$ до $U(x,t_2)$:

$$\Delta Q = Cm\Delta U$$

$$Q_1 = S\int_{x_1}^{x_2} C(x)\rho(x)\left[U(x,t_2) - U(x,t_1)\right]dx$$

$$\Delta Q = Sq\Delta t, q(x) = -k(x)\frac{\partial U}{\partial x}$$

где q – плотность теплового потока;

количество тепла перенесенное за Δt через рассматриваемый участок:

$$Q_2 = S\int_{t_1}^{t_2}\left[k(x)\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=x_2} - k(x)\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=x_1}\right]dt$$

Предположим в стержне есть распределенные источники тепла, тогда количество выделенного тепла внутренними источниками описывается выражением:

$$Q_3 = S\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} f(x,t)dxdt$$

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

Уравнение баланса энергии для выделенного участка:

$$S\int_{t_1}^{t_2} C(x)\rho(x)\left[U(x,t_2) - U(x,t_1)\right]dx =$$

$$S\int_{t_1}^{t_2}\left[k(x)\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=x_2} - k(x)\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=x_1}\right]dt + S\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} f(x,t)dxdt$$

Воспользуемся дважды теоремой о среднем по x и по t, получим:

(5) $\quad C(x)\rho(x)\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(k(x)\frac{\partial U}{\partial x}) + f(x,t)$ - процесс теплообмена в стержне.

Если стержень однородный:

$(5')$ $\quad \frac{\partial U}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + F(x,t)$, где

a – коэффициент температурапроводности

$$a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}, F = \frac{f(x,t)}{c\rho}$$

Начальное условие для распределения температур:

(6) $\quad U\big|_{t=0} = \varphi(x)$

Если на конце (левом) задано условие вида:

(7) $\quad U\big|_{x=0} = \mu(t)$, то оно описывает температурный режим на конце.

Условие вида:

(8) $\quad \frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \nu(t)$, задает тепловой поток на левом конце

$$-k\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=0} = y(t), \nu = -\frac{g(t)}{k}$$

Если правый конец теплоизолирован:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=l} = 0$$

Рассмотрим теплообмен с окрестной средой на правом конце:

по закону Ньютона $\Delta Q = SH(U(l,t) - Q(t))$

$$-Sk\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=l} = SH(U|_{x=l} - \theta(t))$$

$$\left.\left[\frac{\partial U}{\partial x} + \alpha U\right]\right|_{k=l} = g(t)$$

$$\alpha = \frac{H}{k}, g(t) = \frac{H\theta(t)}{k}$$

где H – коэффициент внешней теплопроводности.

4.Классификация линейных ДУ 2-го порядка в частных производных (общий случай).

Общий вид уравнения второго порядка можно записать:

(1) $$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial U}{\partial x_i}+C(x)U+f(x)=0, x=(x_1,...,x_n)$$

Все последующие рассуждения также справедливы и для частных случаев квазилинейного уравнения.

(2) $$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}+F(x,U,\frac{\partial U}{\partial x_1},...,\frac{\partial U}{\partial x_n})=0$$

Все многообразие уравнений второго порядка вида (2) можно разделить на три типа, в каждом из которых есть свои простейшие уравнения, называемые каноническими. Решения одного и того же класса имеют много общего, поэтому для изучения их свойств достаточно изучить канонические уравнения этого класса. Все остальные могут быть приведены к каноническому виду.

Принадлежность уравнения (2) к тому или иному типу определяется коэффициентами при старших производных. Будем предполагать, что в некоторой области $x\in\Omega\subset R^n$ все функции уравнения (2) являются вещественно значимыми. Будем предполагать непрерывность коэффициентов a_{ij}. Рассмотрим по какому закону меняются коэффициенты при старшей производной при введении некоторой не особой замены переменных.

Введем новые переменные:

$$y=y(x)=(y_1,...,y_n), y_l\in c^2, l=\overline{1,n}$$

$$J(\frac{y}{x})=\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}\neq 0$$

Пусть зафиксировали некоторую точку x^0 рассматриваемой области. Тогда в некоторой окрестности x^0 существует обратная функция $x=x(y), x^0\in\Omega, U(x)=U(\frac{x}{y})=\tilde{U}(y)$.

Перейдем в уравнении (2) к новым переменным.

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial \tilde{U}}{\partial y_l}\frac{\partial y_l}{\partial x_i};\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}=\sum_{l,k=1}^{n}\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial y_l \partial y_k}\frac{\partial y_l \partial y_k}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial \tilde{U}}{\partial y_l}\frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j}$$

Полученные производные подставим в уравнение (2):

$$\sum_{l,k=1}^{n}\tilde{a}_{lk}\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial y_l \partial y_k}+\tilde{F}(\tilde{U},\tilde{y},\frac{\partial \tilde{U}}{\partial y_1},...,\frac{\partial \tilde{U}}{\partial y_n})=0 \qquad (3)$$

$$\tilde{a}_{lk}=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial y_l \partial y_k}{\partial x_i \partial x_j} \qquad (4)$$

Обозначим:

$$a_{ij}=a_{ij}(x_0)$$

$$\alpha_{li}=\frac{\partial y_l}{\partial x_i}(x_0)$$

$$\tilde{a}_{lk} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\alpha_{li}\alpha_{kj} \qquad (*)$$

Очевидно (*) определяет соотношение коэффициентов квадратичной формы (4), если ввести в ней не особую замену вида:

$$P_i = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{lk} q_l, \ \det(\alpha_{lk}) \neq 0$$

в этом случае (4) принимает вид (5):

(5) $\sum_{l,k=1}^{n} \tilde{a}_{lk} q_l q_k$

(6) $\sum_{l=1}^{m} r_l q_l^2, m \leq n$

Из курса линейной алгебры для (4) всегда существует линейная замена, приводящая её к виду (6).

Из линейной алгебры Теорема: Число положительных и отрицательных коэффициентов r,l в (6) не зависит от выбора не особой замены.

Таким образом, для классификации уравнений типа (2) нужно в фиксированной точке x_0 выписать по значениям коэффициентов при старших производных квадратичную форму (4). Подбираем замену приводящую к (6). Нормируем коэффициенты.

Вводим замену $\tilde{q}_l = \sqrt{|r_l|} q_l$, преобразуем (6) в (7):

(7) $\sum_{l=1}^{s} \tilde{q}_l^2 - \sum_{l=s+1}^{m} \tilde{q}_l^2$

Дифференциальные уравнения, соответствующие форме (7), принимает вид (8):

(8) $\sum_{l=1}^{s} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial y_l^2} - \sum_{l=s+1}^{m} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial y_l^2} + \overline{F}(y, \tilde{U}, \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y_n}) = 0, m \leq k$ - это канонический вид уравнения, для n независимых переменных. (В каноническом виде коэффициенты нормированы).

Обозначим:

n_+ - количество положительных коэффициентов в (8)

n_- - количество отрицательных коэффициентов в (8)

n_0 – количество нулевых коэффициентов в (8)

Тогда, (8) относится к типу (n_+, n_-, n_0) (и в некоторой области, если относится в каждой точке этой области.)

Примеры:

1) Волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x,t) - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - f(x,t) = 0$$

Замена:

$\xi = x, \tau = at$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a \neq 0$$

$$U(x,t) = \tilde{U}(\xi,\tau)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi}; \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \xi^2};$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tau} a; \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tau^2};$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \xi^2} - \tilde{f}(\xi,\tau) = 0$$

$(1,1,0)$

2) Уравнение теплопроводности:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{f}{a^2}(x,t) = 0$$

$(0,1,1)$

3) Уравнение Пуассона на плоскости

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f(x,y)$$

$(2,0,0)$

Уравнения с постоянными коэффициентами сохраняют тип во всей области изменения независимых переменных.

Определение: Уравнение (8) относится к гиперболическому типу в точке (области), если оно имеет тип (n-1,1,0) или (1,n-1,0). (Волновое уравнение – гиперболический тип).

Определение: Уравнение (8) относится к параболическому типу в точке (области), если оно имеет тип (n-1,0,1) или (0,n-1,1).

Определение: Уравнение (8) относится к эллиптическому типу, если оно имеет тип (n,0,0) или (0,n,0).

Уравнения с переменными коэффициентами могут менять тип:

уравнение Трикоми:

$$y\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

$(x,y) \in R^2$

y>0 – эллиптический;

y<0 – гиперболический;

y=0 – параболический;

Уравнения с постоянными коэффициентами можно привести к каноническому виду одной и той же заменой, в любой точке (области) изменения независимых переменных.

Ответим на вопрос: Всегда ли возможно подобрать не особую замену, позволяющую приводить уравнения к каноническому виду хотя бы в некоторой окрестности рассматриваемой точки?

Для приведения (2) к (8) необходимо подобрать n новых переменных, таким образом, что удовлетворяют условия:

$\tilde{a}_{ij} = 0, i \neq j; i, j = \overline{1,n}$ таких условий: $\dfrac{n(n-1)}{2}$

$\tilde{a}_{ii} = b\tilde{a}_{11}, b \in \{1, -1, 0\}; i = \overline{2,n}$ таких условий $(n-1)$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_i}, 2a_j \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}$$

⇒ всего условий:

$$\frac{n(n-1)}{2} + n - 1 \leq 0$$

$$n^2 - n - 2 \leq 0$$

$$n \leq 2$$

Таким образом, только в случае двух независимых переменных уравнение (2) может быть приведено к каноническому виду одним и тем же преобразованием в некоторой окрестности точки x_0.

Замечание: Рассмотрим квадратичную форму (4) соответствующую (2) в x_0. Коэффициенты (4) образуют симметричную вещественно значимую матрицу.

Из курса линейной алгебры: с симметрично вещественно значимыми коэффициентами, квадратичная форма (7) может быть приведена в виду (**), где λ_i- собственные числа матричных коэффициентов.

(**) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_i^2$

Пример:

1) Рассмотрим волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \Delta U(M) + f(M,t), M(x,y,z) \in R^3$$

Выпишем характеристическое уравнение:

$$(\frac{\partial \omega}{\partial t})^2 - a^2((\frac{\partial \omega}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \omega}{\partial y})^2 + (\frac{\partial \omega}{\partial t})^2) = 0$$

Поверхность $a^2(t-t_0)^2 - ((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2) = 0$, где $(t_0, M_0(x_0, y_0, z_0))$- фиксированная точка, является характеристической поверхностью волнового уравнения.

Эта поверхность носит название характеристического конуса:

Кроме того, существует еще одно семейство характеристик для волнового уравнения, где $|b_i| = 1$

$at + b_1 x + b_2 y + b_3 z = c$ - семейство касательных плоскостей.

Таким образом, волновое уравнение имеет два семейства характеристик.

2) Рассмотрим уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \Delta U(M) + f(M,t)$$

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 = 0$$

$$\omega(x,y,z,t), t = c$$

Уравнение параболического типа имеет одно семейство характеристик.

3) Уравнение Пуассона:

$$\Delta U(M) = f(M), M(x,y,z) \in R^3$$

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 = 0$$

Уравнение эллиптического типа не имеет семейств характеристик.

5. Классификация линейных ДУ 2-го порядка с двумя независимыми переменными.

Рассмотрим уравнение следующего вида:

$$a_{11}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})=0 \quad (1).$$

Будем считать, что $\begin{array}{l} a_{ij}\in c^2, \quad a_{11}\neq 0, \\ (x,y)\in D\subset R^2. \end{array}$

Покажем, что уравнение (1) всегда можно привести к каноническому виду, не особой заменой в некоторой окрестности точки $(x^0,y^0)\in D$.

Введем новые переменные $\xi,\ \eta$ такие, что:

$$y=\begin{vmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y} \\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y} \end{vmatrix}\neq 0, \quad \xi,\eta\in \mathrm{c}^2;$$

$$u(x,y)=u(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))=\tilde{u}(\xi,\eta).$$

Тогда уравнение (1) в новых переменных принимает вид (2):

$$(2) \qquad \tilde{a}_{11}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}+2\tilde{a}_{12}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\,\partial\eta}+\tilde{a}_{22}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}+\tilde{f}(\xi,\eta,\tilde{u},\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi},\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta})=0,$$

Где коэффициенты имеют вид:

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{11}&=a_{11}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\\
\tilde{a}_{12}&=a_{11}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+a_{12}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+a_{22}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} \qquad (3).\\
\tilde{a}_{22}&=a_{11}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2
\end{aligned}$$

Потребуем, чтобы ξ и η удовлетворяли условиям:

$$\begin{cases} a_{11}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2=0 \\ a_{11}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2=0 \end{cases} - (4); \quad \frac{\partial\xi}{\partial y}\neq 0,\ \frac{\partial\eta}{\partial y}\neq 0.$$

Рассматривая уравнения как квадратные, относительно $\frac{\partial\xi}{\partial x}$ и $\frac{\partial\eta}{\partial x}$, получим:

$$(5) \qquad \begin{cases} \frac{\partial\xi}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial\xi}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial\eta}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial\eta}{\partial y}=0 \end{cases}; \qquad \text{где} \quad \begin{array}{l} \lambda_{1,2}=\dfrac{a_{12}\mp\sqrt{d}}{a_{11}} \\ d=a_{12}^2-a_{11}a_{22} \end{array}$$

В соответствии с классификацией уравнений возможны случаи:

d>0 – гиперболический тип,

d=0 – параболический тип,

d<0 – эллиптический тип.

6.Лемма о характеристиках.

<u>**Лемма**</u>(о характеристиках): Пусть функция $\omega(x,y)\in c^1$, $\frac{\partial\omega}{\partial y}\neq 0$. Тогда, для того, чтобы кривая $\omega(x,y)=c$ была характеристикой уравнения (1), необходимо и достаточно, чтобы она была общим интегралом одного из дифференциальных уравнений: $\frac{dy}{dx}=\lambda_1$, $\frac{dy}{dx}=\lambda_2$ (6).

Уравнения (6) носят названия дифференциальных уравнений характеристик.

Доказательство:

Пусть $\omega(x,y)=c$ (*) – характеристика уравнения (1). Тогда по определению, она удовлетворяет уравнению:

$$a_{11}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2=0.$$

Но тогда она удовлетворяет одному из уравнений (5):

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial\omega}{\partial y}=0$$

Через каждую точку, рассматриваемой окрестности, проходит одна характеристическая кривая.

Продифференцируем (*) по x: $\frac{\partial\omega}{\partial x}(x,y)=c$, $\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$.

Тогда: $-\lambda_1\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$; так как по условию $\frac{\partial\omega}{\partial y}\neq 0$, тогда

$\frac{dy}{dx}=\lambda_1$ – решение обыкновенного дифференциального уравнения;

$\omega(x,y)=c$ – общее решение.

Обратно: Пусть $\omega(x,y)=c$ – общий интеграл одного из уравнений (6).

Через каждую точку рассматриваемой окрестности проходит одна интегральная кривая.

$$\frac{d\omega}{dx}=\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

Тогда $\frac{\partial\omega}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial\omega}{\partial y}=0$, т.е. $\omega(x,y)$ удовлетворяет одному из уравнений (5) $\Rightarrow$ удовлетворяет для характеристически уравнения (2).

Т.к. $\frac{\partial\omega}{\partial y}\neq 0$ $\Rightarrow$ $grad\,\omega\neq 0$, таким образом, кривая $\omega(x,y)=c$ является характеристикой уравнения (2), ч. т. д.

Таким образом, для приведения уравнения к каноническому виду следует выбирать замену по характеристикам.

7.Приведение к каноническому виду ДУ 2-го порядка с двумя независимыми переменными гиперболического типа.

$d>0$ – **гиперболический тип**; $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ – два семейства характеристик; очевидно, замена является не особой.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y} \\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x} = -\lambda_1 \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{2\sqrt{d}}{a_{11}}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} \neq 0$$

Найдем коэффициенты:

$\tilde{a}_{11} = 0$, $\tilde{a}_{22} = 0$;

$$\tilde{a}_{12} = a_{11}\lambda_1\lambda_2 \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + a_{12}(-\lambda_1 - \lambda_2)\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} + a_{22}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} = \left(\frac{a_{12}^2 - d - 2a_{12}^2 + a_{11}a_{22}}{a_{11}}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}$$

$$= \left(\frac{-d - a_{12}^2 + a_{11}a_{22}}{a_{11}}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} = -\frac{2d}{a_{11}}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} \neq 0$$

$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\,\partial\eta} + \tilde{f}_1(\xi,\eta,\tilde{u},\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi},\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}) = 0$ – (7) – канонический вид уравнения гиперболического типа.

<u>Замечание:</u> Замена $\alpha = \xi + \eta$, $\beta = \xi - \eta$ – приведет уравнение (7) к виду:

(8) $\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\beta^2} + \tilde{f}(\alpha,\beta,\tilde{u},\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\alpha},\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\beta}) = 0$ – будем считать каноническим.

8. Приведение к каноническому виду ДУ 2-го порядка с двумя независимыми переменными параболического типа.

$d=0$ **– параболический тип,** $\lambda_1=\lambda_2=\dfrac{a_{12}}{a_{11}}$.

Уравнения (5) совпадают $\Rightarrow$ существует только одна хар-ка $\xi(x,y)$, $\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\neq 0$.

Выберем в качестве 2[ой] замены, например, $x=c$.

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\xi}{\partial y} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial\xi}{\partial y}\neq 0;$$

$\tilde{a}_{11}=0$;
$\tilde{a}_{22}=a_{11}\neq 0$;
$\tilde{a}_{12}=-a_{12}\dfrac{\partial\xi}{\partial y}+a_{12}\dfrac{\partial\xi}{\partial y}=0$.

(9) $\dfrac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}+\tilde{f}_1(\xi,\eta,\tilde{u},\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi},\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta})=0$ – канонический вид уравнения параболического типа.

9. Приведение к каноническому виду ДУ 2-го порядка с двумя независимыми переменными эллиптического типа.

$d<0$ **− эллиптический тип.**

Будем считать, что $a_{ij}(x,y)$ − аналитические функции в рассматриваемой окрестности.

Вещественных характеристик нет.

Из теоремы обыкновенного дифференциального уравнения известно, что уравнение:

$\frac{\partial\omega}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial\omega}{\partial y}=0$, λ_1− аналитическая функция, имеет в некоторой окрестности точки x_0 аналитическое частное решение:

$\omega(x,y)=\xi(x,y)+i\eta(x,y)$

Принимая во внимание, что $\lambda_2=\overline{\lambda}_1$, можно утверждать, что существует и

$\overline{\omega}(x,y)=\xi(x,y)-i\eta(x,y)$− аналитическое частное решение второго уравнения (5).

Так как ξ и η − вещественные функции, то

$$\xi=\frac{\omega(x,y)+\overline{\omega}(x,y)}{2}\ ,\quad \eta=\frac{\omega(x,y)-\overline{\omega}(x,y)}{2i}.$$

Выберем вещественные и мнимые части частных решений в виде замены:

$$J=J\left(\frac{\xi,\eta}{\omega,\overline{\omega}}\right)J\left(\frac{\omega,\overline{\omega}}{x,y}\right)=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2i} & -\frac{1}{2i}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\frac{\partial\omega}{\partial x} & \frac{\partial\omega}{\partial y}\\ \frac{\partial\overline{\omega}}{\partial x} & \frac{\partial\overline{\omega}}{\partial y}\end{vmatrix}= \;=-\frac{1}{2i}\left(-\lambda_1\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial y}\right)=$$

$$-\frac{\sqrt{d}}{ia_{11}}\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial y}\neq 0.$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}\neq 0,\qquad \frac{\partial\overline{\omega}}{\partial y}\neq 0$$

По построению, $\omega(x,y)$ удовлетворяет уравнению:

$$a_{11}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2=0$$

$$\omega(x,y)=\xi(x,y)+i\eta(x,y)$$

Подставим в уравнение представление ω , получим:

$$\frac{d\omega}{dx}=\frac{\partial\xi}{\partial x}+i\frac{d\eta}{dx}=0$$

$$\frac{d\omega}{dy}=\frac{\partial\xi}{\partial y}+i\frac{d\eta}{dy}=0$$

$$a_{11}\left(\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right)+2a_{12}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)+a_{22}\left(\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right)=0;$$

$$i\left[2a_{11}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+2a_{12}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)+2a_{22}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right]=0;$$

$$\tilde{a}_{11}=\tilde{a}_{22};$$

$$\tilde{a}_{12}=0;$$

$$\tilde{a}_{11}\neq 0.$$

Тогда, уравнение (2) принимает вид:

$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}+\tilde{f}\,(\xi,\eta,\tilde{u},\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi},\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta})=0$ − канонический вид уравнения эллиптического типа.

10.Решение задачи Коши для одномерного волнового уравнения. Формула Д’Аламбера.

Рассмотрим уравнения малых поперечных колебаний струны, т.е. свободные колебания.

Однородное уравнение:

(1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, где a − скорость распределения колебаний, $u(x,t)$ − смещение точки.

Приведем его к каноническому виду:

$d = 0 + a^2 = a^2 > 0$ − гиперболический тип.

$\dfrac{\partial x}{\partial t} = a$; $\dfrac{\partial x}{\partial t} = -a$

Характеристики: $x - at = c_1$; $x + at = c_2$.

Введем замены: $\begin{matrix} \xi = x - at \\ \eta = x + at \end{matrix}$;

Подставим новые переменные в уравнение: $u(x,t) = \tilde{u}(\xi,\eta)$.

В результате замены уравнение принимает вид: $\dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

Решим уравнение, проинтегрировав дважды по ξ и по η:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = u(\xi,\eta);$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial \eta} = 0;$$

$$\upsilon(\xi,\eta) = f(\xi);$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = f(\xi);$$

$$\tilde{u}(\xi,\eta) = \int f(\xi)d\xi + G(\eta);$$

$$\tilde{u}(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta) \qquad (*).$$

Перейдем в решении (*) к старым переменным:

(2) $u(x,t) = F(x - at) + G(x + at)$

Представление (2) − общее решение уравнения (1), где F и G − произвольные дважды дифференцируемые функции.

Это решение также называют решением Даламбера.

Первое слагаемое в (2) описывает «прямую волну», т.е. возмущение, движущееся со скоростью a в направлении оси х. Соответственно, второе слагаемое описывает обратную волну. Таким образом, решение волнового уравнения – это суперпозиция прямой и обратной волн.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1).

(3) $U\big|_{t=0} = \varphi(x)$, $-\infty < x < \infty$ − начальное отклонение для всех точек струны.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$$

Для (1) $-\infty < x < \infty$, $t > 0$.

Подставим общее решение (2) в начальное условие (3):

при $t = 0$: $\begin{cases} F(x) + G(x) = \varphi(x) \\ -aF'(x) + aG'(x) = \psi(x) \end{cases}$

Проинтегрируем второе выражение от 0 до x:

$$-\int_0^x F'(y)dy+\int_0^x G'(y)dy=\frac{1}{a}\int_0^x \psi(y)dy$$

$$-F(x)+G(x)=\frac{1}{a}\int_0^x \psi(y)dy+c$$

Система принимает вид:

$$F(x)+G(x)=\varphi(x)$$

$$-F(x)+G(x)=\frac{1}{a}\int_0^x \psi(y)dy+c$$

Сложим и получим:

$$G(x)=\frac{\varphi(x)}{2}+\frac{1}{2a}\int_0^x \psi(y)dy+\frac{c}{2}$$

$$F(x)=\frac{\varphi(x)}{2}-\frac{1}{2a}\int_0^x \psi(y)dy-\frac{c}{2}$$

Подставим эти функции в (2), получим:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)}{2}-\frac{1}{2a}\int_0^x \psi(y)dy-\frac{c}{2}+\frac{\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{x+at}\psi(y)dy+\frac{c}{2};$$

(4) $$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}-\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\psi(y)dy\ .$$

Представление (4) будем называть формулой Даламбера.
Убедимся в существовании решения:

При $\begin{matrix}\varphi\in c^2\\ \psi\in c^1\end{matrix}$ решение задачи (1)−(3) существует.

В силу построения, существует единственное решение.

11. Корректность постановки задачи Коши для одномерного волнового уравнения.

Лемма: Решение задачи (1)−(3) устойчиво.

$$u_{1,2}\big|_{t=0} = \varphi_{1,2}(x), \quad -\infty < x < \infty$$

$$\left.\frac{\partial u_{1,2}}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_{1,2}(x)$$

Справедливо:

$$\forall \varepsilon > 0,\ T > 0,\ \exists\, \delta(\varepsilon T):\ \left|\varphi_1 - \varphi_2\right| < \delta, \quad \left|\psi_1 - \psi_2\right| < \delta \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left|u_1 - u_2\right| < \varepsilon, \quad \forall\ \left|x\right| < \infty, \quad \forall\ t < T.$$

Доказательство:

Решения задач представляется формулой (4).

Оценим разность $\left|u_1 - u_2\right|$:

$$\left|u_1 - u_2\right| \le \left|\frac{\varphi_1(x - at) - \varphi_2(x - at)}{2}\right| + \left|\frac{\varphi_1(x + at) - \varphi_2(x + at)}{2}\right| +$$

$$+ \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \left|\psi_1(y) - \psi_2(y)\right| dy < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2a}\cdot 2at < \delta(1 + T) < \varepsilon$$, ч.т.д.

Таким образом, задача Коши для волнового уравнения поставлена корректно.

12.Обобщённое решение задачи Коши для одномерного волнового уравнения.

Пусть в условиях (3) φ − непрерывна и имеет кусочно-непрерывную первую производную, а ψ − кусочно-непрерывна. Пусть φ и ψ отличны от нуля на конечных отрезках. Тогда можно построить последовательности $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ и $\psi_n \rightrightarrows \psi$, причем $\varphi_n \in c^2,\ \ \psi_n \in c^1$. В таком случае, если начальные данные задачи описываются функциями φ_n и ψ_n , то

$$u_n = \frac{\varphi_n(x+at)+\varphi_n(x-at)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi_n(y)dy$$

Рассмотрим два решения задачи Коши:

$$|u_n - u_{n+k}| < \left|\frac{\varphi_n(x+at)-\varphi_{n+k}(x+at)}{2}\right| + \left|\frac{\varphi_n(x-at)-\varphi_{n+k}(x+at)}{2}\right| +$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-a\,t}^{x+a\,t}|\psi_1(y)-\psi_2(y)|dy\,,$$

С другой стороны из условия $\rightrightarrows$

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\mathrm{N},\ \ \forall n>N,\ \mathrm{k}>0:\ \ |\varphi_n-\varphi_{n+k}|<\frac{\varepsilon}{1+T},\quad |\psi_n-\psi_{n+k}|<\frac{\varepsilon}{1+T}.$$

Тогда $\forall n>N,\ \mathrm{k}>0:\ \ |u_n(x,t)-u_{n+k}(x,t)|<\varepsilon,\ \ \forall x,t<T$.

Таким образом, u_n образуют $\rightrightarrows$ последовательность

$$\lim_{n\to\infty}u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{u_n(x+at)+u_n(x-at)}{2} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi_n(y)dy =$$

$$=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi_n(y)dy\,.$$

Таким образом, в случае меньшей гладкости функций описывающей начальные условия, формула Даламбера дает обобщенное решение задачи Коши (1)−(3). Формула Даламбера (4) описывает суперпозицию прямой и обратных волн.

13.Решение задачи Коши для неоднородного волнового уравнения.

Рассмотрим задачу Коши для неоднородного волнового уравнения:

$$(1') \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty .$$

$(1')$,(3) – задача.

В силу линейности задачи, ее решение можно представить в виде суммы двух решений: $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$.

u_2 − решение задачи $(1'),(3')$, где $(3')$ − однородные начальные условия:

$$\left. u(x,t)\right|_{t=0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|_{t=0} = 0 \qquad (3').$$

Для решения $(1'),(3')$ рассмотрим вспомогательную задачу:

$$(\overline{1}) \quad \partial^2 \omega(x,t,\tau) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > \tau, \quad -\infty < x < \infty$$

$$(\overline{3}) \quad \omega \left.\right|_{t=\tau} = 0$$

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial t}\right|_{t=\tau} = f(x,\tau)$$

Решение задачи $(\overline{1}),(\overline{3})$ может быть представлено с помощью формулы (4):

$$\omega(x,t,\tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(x,\tau)dy; \quad t \geq 0, \;\; t - \tau \geq 0 .$$

<u>Лемма:</u> Решение задачи $(1'),(3')$ представляется в виде:

$$u(x,t) = \int_0^t \omega(x,t,\tau)d\tau \qquad (**) \quad .$$

Доказательство.

Непосредственная подстановка этого решения $(**)$ в уравнение и начальное условие.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \int_0^t \frac{\partial^2 \omega(x,t,\tau)d\tau}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_0^t \frac{\partial \omega}{\partial x}(x,t,\tau)d\tau + \omega(x,t,t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \int_0^t \partial^2 \omega(x,t,\tau)d\tau + \frac{\partial \omega}{\partial t}(x,t,t), \qquad f(x,t) = \frac{\partial \omega}{\partial t}(x,t,t).$$

Подставим производные в $(1')$:

$$\int_0^t \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right] d\tau + f(x,t) = f(x,t);$$

$$u(x,0) = 0$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \qquad - \qquad \text{условия удовлетворяют.}$$

Тогда решение $(1'),(3')$ имеет вид: $(5) \quad u(x,t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y,\tau)dyd\tau$.

14.Решения задачи Коши для двумерного и трехмерного волновых уравнений. Физический смысл решения.

Рассмотрим однородное волновое уравнение:

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u(M,t),\ \ m(x,y,z)\in R^3,\ \ t>0$$

Характеристическое уравнение для (1) имеет вид:

$$a^2\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2\right]-\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2=0.$$

Не трудно убедиться, что поверхность

ω: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-a^2(t-t_0)^2=0$ – является характеристической для уравнения (1), $(x_0,y_0,z_0)\in R^3,\ \ t_0>0$.

Обозначим: $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$

Тогда: $r^2-a^2(t-t_0)=0$

$$(r-a(t-t_0))(r+a(t-t_0))=0$$

$$(r-at-at_0)(r+at-at_0)=0$$

$$const=t_0=t+\frac{r}{a};\qquad const=t_0=t-\frac{r}{a}$$

Введем два новых набора независимых переменных:

$\boxed{I}$ $x_1=x-x_0;$

$y_1=y-y_0;$

$z_1=z-z_0\ ;$

$t_1=t+\dfrac{r}{a}\ ;$

$r_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2};$

$\boxed{II}$ $x_2=x-x_0;$

$y_2=y-y_0;$

$z_2=z-z_0\ ;$

$t_2=t+\dfrac{r}{a}\ ;$

$r_2=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2};$

Перейдем в (1) к переменным:

$$u(x,y,z,t)=u_1(x_1,y_1,z_1,t_1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial t_1};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u_1}{\partial t_1{}^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\cdot\frac{x_1}{ar_1};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1{}^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial t_1}\cdot\frac{2x_1}{ar_1}+\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\cdot\frac{1}{ar_1}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial t_1{}^2}\cdot\frac{x_1^2}{a^2r_1^2}-\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\cdot\frac{x_1^2}{a^2r_1^3}$$

Подставим в уравнение:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t_1{}^2}=a^2\left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1{}^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1{}^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial t_1{}^2}+\frac{2}{ar_1}\left(x_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial t_1}+y_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1\partial t_1}+z_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1\partial t_1}\right)+2\frac{\partial^2 u}{\partial r_1\partial t_1}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial t_1{}^2}\cdot\frac{1}{a^2}\right]$$

$$\Delta_1 u_1+\frac{2}{ar_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial t_1}$$

$$\frac{2}{a}\cdot\frac{\partial'}{\partial t_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\cdot\frac{x_1}{r_1}+\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\cdot\frac{y_1}{r_1}+\frac{\partial u_1}{\partial z_1}\cdot\frac{z_1}{r_1}\right)$$

$$\frac{2}{a}\cdot\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\cdot\cos(r_1,x_1)+\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\cdot\cos(r_1,y_1)+\frac{\partial u_1}{\partial z_1}\cdot\cos(r_1,z_1)\right)$$

Используя это, можно записать

$$\Delta_1 u_1+\frac{2}{ar_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial t_1}+\frac{2}{a}\cdot\frac{\partial^2 u_1}{\partial t_1\partial r_1}=0$$

$$\frac{2}{ar_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t_1}+r_1\frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\right)\right)$$

$$\frac{2}{ar_1}\cdot\frac{\partial}{\partial r_1}\left(r_1\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\right)$$

Для уравнения (1)принимают вид:

$$\boxed{I}\qquad \Delta_1 u_1+\frac{2}{ar_1}\cdot\frac{\partial}{\partial r_1}\left(r_1\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\right)=0 \qquad (2)$$

Не трудно убедиться, что функция

$u_1=\dfrac{\Phi_1(t_1)}{r_1}$ − является решением уравнения (2)

$$\frac{\partial u_1}{\partial t_1}=\frac{1}{r_1}\cdot\frac{d\Phi_1(t_1)}{dr_1}$$

$$r_1\frac{\partial u_1}{\partial t_1}=\frac{d\Phi_1(t_1)}{dr_1}\qquad\Rightarrow\qquad\frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{d\Phi_1(t_1)}{dr_1}\right)=0$$

Найдем: $\Delta_1 u_1=\Phi_1(t_1)\Delta_1\left(\dfrac{1}{r_1}\right)$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{r_1}\right)=-\frac{1}{r_1^2}\cdot\frac{2x_1}{2r_1}=-\frac{x_1}{r_1^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1}\left(\frac{1}{r_1}\right)=-\frac{1}{r_1^3}+\frac{3x_1^{\ 2}}{r_1^5}$$

Получим: $\Delta_1 u_1==-\dfrac{3}{r_1^3}+\dfrac{3}{r_1^5}\left(x_1^{\ 3}+y_1^{\ 2}+z_1^{\ 2}\right)=0$.

Таким образом $u_1=\dfrac{\Phi_1(t_1)}{r_1}$ − общее решение уравнения (2)

$u_1=\dfrac{\Phi_1\left(t+\dfrac{r}{a}\right)}{r}$, Φ − произвольная функция.

Нетрудно убедиться, что переход к новым переменным $\boxed{II}$ приводит уравнение (1) к виду (3)

$$\boxed{II}\qquad \Delta_2 u_2+\frac{2}{ar_2}\cdot\frac{\partial}{\partial r_2}\left(r_2\frac{\partial u_2}{\partial t_2}\right)=0 \qquad (3)$$

Общим решением которого будет $u_2 = \dfrac{\Phi_2(t_2)}{r_2}$.

Тогда в новых переменных: $u_2 = \dfrac{\Phi_2\left(t + \dfrac{r}{a}\right)}{r}$ – также является решением уравнения (1).

Таким образом общее решение уравнения (1) можно представить в виде:

$$(4) \quad u(M,t) = \frac{\Phi_1\left(t + \dfrac{r}{a}\right)}{r} + \frac{\Phi_2\left(t + \dfrac{r}{a}\right)}{r}.$$

Первое слагаемое в (4) описывает сферическую волну, сходящуюся в точке $r = 0$.
При этом амплитуда ее с приближением к центру растет.
Второе слагаемое описывает сферическую волну, распространяющуюся от точки $r = 0$ на бесконечности, с удалением от центра амплитуда волны убывает.
Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1).
Пусть заданы начальные условия вида:

$$(5) \quad u(M,t)\big|_{t=0} = \varphi(M), \quad \varphi \in c^3$$

$$\left.\frac{\partial u(M,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(M), \quad \psi \in c^2$$

Покажем, что интеграл вида:

$$(6) \quad u(M,t) = \frac{1}{4\pi a}\iint_{S_r}\frac{\omega(p)}{r}d\sigma_r = \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{S_{at}}\omega(p)d\sigma_{a\,t}$$ – является решением уравнения (1).

$M(x,y,z), \quad p(\xi,\eta,\chi)$

$S_{at}: \quad (x-\xi)^2 + (x-\eta)^2 + (x-\chi)^2 = a^2t^2$

$\xi = x + \alpha at$

$\eta = y + \beta at$

$\chi = z + \gamma at$

Рассмотрим сферу единичного радиуса с центром в точке M

S_{at} и S

$d\sigma_{at} = a^2t^2 d\sigma_1$

$$u(M,t) = \frac{t}{4\pi}\iint_{S_1}\omega(x+\alpha at, y+\beta at, z+\gamma at)d\sigma_1$$

Найдем частные производные u:

$$\Delta u = \frac{t}{4\pi}\iint_{S_1}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial\chi^2}\right)d\sigma_1 = \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{S_{at}}\Delta\xi\omega d\sigma_{at}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\iint_{S_1}\omega(\xi,\eta,\chi)d\sigma_1 + \frac{t}{4\pi}\iint_{S_1}\left[\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\alpha a + \frac{\partial\omega}{\partial\eta}\beta a + \frac{\partial\omega}{\partial\chi}\gamma a\right]d\sigma_1 =$$

$$= \frac{u}{t} + \frac{1}{4\pi at}\iint_{S_{at}}\left[\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\alpha + \frac{\partial\omega}{\partial\eta}\beta + \frac{\partial\omega}{\partial\chi}\gamma\right]d\sigma_{at} = \frac{u}{t} + \frac{1}{4\pi at}\iiint_{D_{at}}\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial\chi^2}\right]dV_{at}$$

$D_{at}: \quad (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\chi)^2 \le a^2t^2$

Обозначим этот интеграл через J_{at}

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{u}{t}+\frac{1}{4\pi at}\cdot J_{at};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{t}\left[\frac{u}{t}+\frac{1}{4\pi at}\cdot J_{at}\right]-\frac{u}{t^2}-\frac{1}{4\pi at^2}\cdot J_{at}+\frac{1}{4\pi at}\cdot\frac{\partial J_{at}}{\partial t};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{4\pi at}\cdot\frac{\partial J_{at}}{\partial t};$$

Перейдем к сферическим координатам в интервале по шару

$$r,\varphi,\psi \qquad \begin{aligned} x&=r\cos\varphi\sin\psi\\ y&=r\sin\varphi\sin\psi\\ z&=r\cos\psi\end{aligned}$$

$$\iiint\limits_{D_{at}}\Delta\xi\omega dV=\int\limits_0^{at}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}r^2\sin\psi\Delta_r\omega d\psi\,d\varphi dr$$

$$\frac{\partial J_{at}}{\partial t}=a\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}a^2t^2\sin\psi\Delta_r\omega d\psi\,d\varphi=a\iint\limits_{S_{at}}\Delta_\xi\omega d\sigma_{at}$$

Таким образом, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{4\pi at}\cdot\frac{\partial J_{at}}{\partial t}=\frac{t}{4\pi t}\iint\limits_{S_{at}}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial\chi^2}\right)d\sigma_{at}$

$$\frac{t}{4\pi t}\iint\limits_{S_{at}}\Delta_\xi\omega d\sigma_{at}=a^2\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{S_{at}}\Delta_\xi\omega d\sigma_{at}$$

Посмотрим, каким начальным условиям удовлетворяет условие вида (6):

Очевидно, что $u\big|_{t=0}=0$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\frac{\omega(x,y,z)}{4\pi}\iint\limits_{\sigma_1}d\sigma_1=\omega(M).$$

Очевидно, что функция $u_1(M,t)=\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{S_{at}}\psi(p)d\sigma_{at}$ удовлетворяет

$$u_1\big|_{t=0}=0;\qquad \left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(M).$$

Рассмотрим функцию $\nu(M,t)=\frac{\partial u(M,t)}{\partial t}$, очевидно, ν также является решением уравнения (1).

$$\frac{\partial^2\nu}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(a^2\Delta u\right)=a^2\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=a^2\Delta\nu\text{, ч.т.д.}$$

$$\nu\big|_{t=0}=\left.\frac{\partial\nu}{\partial t}\right|_{t=0}=\omega(M)$$

$$\left.\frac{\partial\nu}{\partial t}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{t=0}=\frac{a^2 t}{4\pi}\iint\limits_{S_1}\Delta\omega d\sigma_1\big|_{t=0}=0$$

Тогда решение $u_2(M,t) = \frac{1}{4\pi a^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t} \iint\limits_{S_{at}} \varphi(p)\, d\sigma_{at} \right)$ удовлетворяет начальным условиям: $u_2\big|_{t=0} = \varphi(M)$; $\left.\frac{\partial u_2}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$.

В силу линейности задачи (1),(5) ее решение записывается в виде:

$$(7) \qquad u(M,t) = \frac{1}{4\pi a^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t} \iint\limits_{S_{at}} \varphi(p)\, d\sigma_{at} \right) + \frac{1}{4\pi a^2 t} \cdot \iint\limits_{S_{at}} \psi(p)\, d\sigma_{at}$$

– формула Кирхгофа (или Пуассона).

Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения на плоскости:

$$(\tilde{1}) \qquad \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \qquad M(x,y) \in R^2, \ \ t > 0$$

$$(\tilde{5}) \qquad u\big|_{t=0} = \varphi(x,y)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x,y)$$

Воспользуемся решением пространственной задачи (7) применив метод покоординатного спуска:

Спроектируем верхнюю и нижнюю части сферы на ее сечение плоскостью $\chi = z$.

Обозначим : Q_{at} : $(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \le a^2 t^2$ – круг.

Рассмотрим интеграл:

$\psi = \psi(\xi,\eta)$

$$I_1 = \iint\limits_{S_{at}^1} \psi(\xi,\eta,\chi)\, d\sigma_{at} = \iint\limits_{Q_{at}} \psi(\xi,\eta) \frac{dS_{at}}{\cos\gamma}$$

из $\triangle MPP_1$: $\cos\gamma = \cos(\vec{PM}, \vec{PP_1}) = \frac{|PP_1|}{|MP|} = \frac{\sqrt{a^2t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}{at}$

$MP = at$

$|PP_1| = \sqrt{a^2t^2 - |MP_1|^2}$

$|MP_1|^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$

Таким образом, $\cos\gamma = \frac{\sqrt{a^2t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}{at}$

$$I_1 = \iint\limits_{Q_{at}} \frac{\psi(\xi,\eta)\, at}{\sqrt{a^2t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}\, dS$$

Тогда решение задачи $(\tilde{1}),(\tilde{5})$ примет вид:

$$(8) \qquad u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \left[\iint\limits_{Q_{at}} \frac{\varphi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}\, dS \right] +$$

$$+ \frac{1}{2\pi a} \iint\limits_{Q_{at}} \frac{\psi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}\, dS \quad - \quad \text{формула Пуассона.}$$

Физическая интерпретация решения.

Рассмотрим задачу Коши для случая когда заданы начальные локальные возмущения:

$$(\tilde{1})\qquad \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \qquad M(x,y)\in R^2,\ \ t>0$$

$$(\tilde{5})\qquad u\big|_{t=0} = \varphi(x,y)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x,y)$$

$$\varphi(M)\neq 0;\ \ M\in\Omega\subset R^3,\quad \varphi(M)\equiv 0,\quad M\in\Omega$$

$$\psi(M)\neq 0;\ \ M\in\Omega\subset R^3,\quad \psi(M)\equiv 0,\quad M\in\Omega$$

Пусть в начальный момент точка находится вне Ω ($M\notin\Omega$).

Обозначим d – наименьшим расстоянием от M до Ω, и D - наибольшее.

$$t_1 = \frac{d}{a};\quad t<t_1,\ \ \mathrm{u}(M,t)\equiv 0$$

Момент t_1 − прохождение переднего фронта волны.

$$t_2 = \frac{D}{a};\quad t_1<t<t_2$$

Момент t_2 − прохождение заднего фронта волны.

Для сферических волн выполняется принцип Гюйгенса.

Рассмотрим решение задачи $(\tilde{1}),(\tilde{5})$ при заданных локальных нагрузках.

По-прежнему, область не попадает в область интегрирования

$$t_1 = \frac{d}{a};\quad t<t_1,\ \ u\equiv 0$$

При $t>t_1$: $\quad u\neq 0$

Прохождение цилиндрической волны характеризуется продолжительным эффектом последействия.

С течением времени колебания затухают. Для цилиндрических волн принцип Гюйгенса не выполняется.

15.Решение смешанных задач для одномерного волнового уравнения на полупрямой (однородное граничное условие 1-го рода).

<u>Лемма 1:</u> Если в задаче Коши (1),(3) функции φ и ψ являются нечетными относительно нуля, т.е. $\varphi(x)=-\varphi(-x),\ \ \psi(x)=-\psi(-x)$, то решение этой задачи обращается в ноль при $x=0$.

Доказательство.

Действительно, подставим в (4) $x=0$ и получим:

$$u(0,x)=\frac{\varphi(-at)+\varphi(at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\psi(y)dy=0$$, ч.т.д.

Рассмотрим следующую задачу:

$$(\tilde{1})\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad x>0,\ \ t>0$$

$$(\tilde{3})\qquad u(x,t)\Big|_{t=0}=\varphi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\Bigg|_{t=0}=\psi(x),\quad x>0$$

$$(\tilde{4})\qquad u\Big|_{x=0}=0\quad \text{(конец закреплен)}$$

Для решения $(\tilde{1}),(\tilde{3}),(\tilde{4})$, доопределим начальные данные нечетным образом на всю ось:

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\geq 0\\ -\varphi(-x), & \text{x}<0\end{cases};\qquad \Psi(x)=\begin{cases}\psi(x), & x\geq 0\\ -\psi(-x), & \text{x}<0\end{cases}$$

Будем рассматривать задачу Коши вида (1), (3) для U и вновь определенных начальных данных:

$$U(x,t)=\frac{\Phi(x+at)+\Phi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(y)dy\qquad (***).$$

$U(x,t)$ совпадает с решением $(\tilde{1}),(\tilde{3})$ при $x>0$.

В соответствии с <u>леммой 1</u> : $U(0,t)=0=u(0,t)$.

Тогда решение $(\tilde{1}),(\tilde{3}),(\tilde{4})$ можно записать, воспользовавшись (4):

$$t\leq\frac{x}{a}$$

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(y)dy$$

$$t>\frac{x}{a}$$

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)-\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(y)dy$$

15.Решение смешанных задач для одномерного волнового уравнения на полупрямой (однородное граничное условие 2-го рода).

__Лемма 2:__ Если в задаче (1),(3) функции φ и ψ являются четными относительно нуля, то $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$.

Доказательство.

Действительно: $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\varphi'(-at)+\varphi'(at)}{2} + \frac{1}{2a}\left[\psi(at)-\psi(-at)\right]$, ч.т.д.

Рассмотрим следующую задачу:

$$(\tilde{1}) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x>0, \ \ t>0$$

$$(\tilde{3}) \qquad u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|_{t=0} = \psi(x), \quad x>0$$

$(\hat{4})$ $\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$ (конец не закреплен).

Зададим четное продолжение начальных данных и воспользуемся формулой (4) для решения задачи Коши:

решение имеет вид (***)

$U(x,t)$ совпадает с $u(x,t)$ при $x>0$ и по __лемме 2__,

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$$

Тогда решение $(\tilde{1}),(\tilde{3}),(\hat{4})$ можно записать в виде:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_x^{x+at}\psi(y)dy \qquad \left(t \le \frac{x}{a}\right)$$

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\left[\int_0^{at-x}\psi(y)dy + \int_0^{x+at}\psi(y)dy\right] \qquad \left(t > \frac{x}{a}\right).$$

16.Задачи на полупрямой о распределении краевого режима.

Рассмотрим задачу на полупрямой для однородного уравнения:

$(\tilde{1}')$ $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad x > 0, \quad t > 0$$

$(\tilde{3}')$ $$u(x,t)\Big|_{t=0} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\Bigg|_{t=0} = 0$$

$(\tilde{4}')$ $$u\Big|_{x=0} = 0$$

Очевидно, для решения задачи нужно использовать нечетное продолжение:

$$F(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & t > 0 \\ -f(x,t), & t < 0 \end{cases}$$

Следуя приведенной схеме построения решения, нетрудно получить:

$$t \le \frac{x}{a}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y,\tau)dyd\tau \ ;$$

$$t > \frac{x}{a}$$

$$x - a(t-\tau) < 0$$

$$x - at + a\tau < 0$$

$$t < t - \frac{x}{a}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2a} \int\limits_{t-\frac{x}{a}}^{t} \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y,\tau)dyd\tau + \frac{1}{2a} \int\limits_0^{t-\frac{x}{a}} \left[\int\limits_0^{x+a(t-\tau)} f(y,\tau)dy - \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{0} f(-y,\tau)dy \right] d\tau;$$

$$y = -\xi$$ При

$$u(x,t) = \frac{1}{2a} \int\limits_{t-\frac{x}{a}}^{t} \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y,\tau)dyd\tau + \frac{1}{2a} \int\limits_0^{t-\frac{x}{a}} \int\limits_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)} f(y,\tau)dyd\tau;$$

распределении краевого режима (случай неоднородных уравнений) задачи $(\tilde{1}'),(\tilde{3}'),(\tilde{4}')$, где

$(\tilde{4}')$ $$u\Big|_{x=0} = \mu(t), \quad t > 0$$

$(\hat{4}')$ $$\frac{\partial u}{\partial x}\Bigg|_{x=0} = \nu(t).$$

Задачи $(\tilde{1}'),(\tilde{3}),(\tilde{4}')$ и $(\tilde{1}'),(\tilde{3}),(\hat{4}')$ могут быть решены с использованием решений двух задач: рассматриваемые ранее задач с однородным граничным условием соответствующего вида и задач с неоднородным условием вида: $(\tilde{1}),(\tilde{3}'),(\tilde{4}') \vee (\hat{4}')$.

Очевидно, вдоль струны будет распространяться только прямые волны, значит, $(\tilde{1}),(\tilde{3}'),(\tilde{4}')$ следует искать в виде $u(x,t) = F(x - at)$.

Подставим это представление в начальные граничные условия:

$F(x)=0, \quad x \ge 0$

$-aF'(x)=0$

Очевидно: $F(x)\equiv 0, \quad x \ge 0.$

$F(-at)=\mu(t);$

$-at=x<0;$

$$F(x)=\begin{cases}\mu\left(-\dfrac{x}{a}\right), & x<0\\ 0, & x\ge 0\end{cases};$$

$$u(x,t)=\begin{cases}0, & t\le \dfrac{x}{a}\\ \mu\left(t-\dfrac{x}{a}\right), & t>\dfrac{x}{a}\end{cases};$$

Рассмотрим неоднородное граничное условие второго рода:

$$(\hat{4}')\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{t=0}=\nu(t).$$

Рассуждения аналогичны.

Решение задачи $(\tilde{1}'),(\tilde{3}'),(\hat{4}')$ также ищется в виде прямой волны:

$u(x,t)=F(x-at)$.

$$\begin{cases}F(x)=0, & x>0\\ -aF'(x)=0\end{cases} \quad \Rightarrow \quad F(x)\equiv 0,\ x\ge 0.$$

$F'(-at)=\nu(t)$

$$\int_0^t F'(-at)d\tau=\int_0^t \nu(\tau)d\tau$$

$$F(-at)=-a\int_0^t \nu(\tau)d\tau$$

$-at=x<0$

$$F(x)=-a\int_0^{-\frac{x}{a}} \nu(\tau)d\tau$$

Тогда решение задачи $(\tilde{1}),(\tilde{3}'),(\hat{4}')$:

$$u(x,t)=\begin{cases}0, & t\le \dfrac{x}{a}\\ -a\displaystyle\int_0^{t-\frac{x}{a}} \nu(\tau)d\tau, & t>\dfrac{x}{a}\end{cases}$$

17. Формулы Грина. Единственность решения смешанных задач для волнового уравнения (пространственный случай).

(1) $\dfrac{\partial^2 U(M,t)}{\partial t^2} = a^2 \Delta U(M,t) + f(M,t);\ \mathrm{M} \in \Omega \subset \mathrm{R}^3,\ t>0,\ \partial\Omega = \mathrm{S}$

(2) $U\big|_{t=0} = \varphi(M)$

$\dfrac{\partial U}{\partial t}\Big|_{=0} = \psi(M)$

(3) $\left[\alpha \dfrac{\partial U}{\partial n} + \beta U\right]\Big|_S = \mu(M,t)$

<u>Лемма</u>: Если функции $U(M), V(M) \in C^2_\Omega \cap \mathrm{C}^1_{\bar{\Omega}}$ - непрерывны вместе со своими частными производными до второго порядка и непрерывно дифференцируемы вплоть до границы, то справедливое следующее представление:

$$(I) \quad \iiint_\Omega U(M)\Delta V(M)\,dV = \iint_S U(M)\frac{\partial V}{\partial n}d\sigma - \iiint_\Omega (gradU, gradV)\,dV \text{ -}$$

первая формула Грина.

<u>Доказательство:</u>

$$\{\ div(f(M), a(M)) = fdiva + (gradf, a)\}$$

$$U\Delta V = Udiv(gradV) = div(UgradV) - gradU, gradV)$$

подставим в правую часть, получим:

$$\iiint_\Omega U\Delta V dV = \iiint_\Omega div(UgradV)dV - \iiint_\Omega (gradU, gradV)dV +$$

$$+ \iiint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial}\left(U\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(U\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right] dV =$$

=|â ï ðàâî é ÷àñòè âî ñïî ëüçóåì ñÿ ôî ðì óëî é Î ñòðî ãðàäñêî ãî -Ãàóñà| =

$$= \iint_S U\left[\frac{\partial U}{\partial x}Cos(n,x) + \frac{\partial V}{\partial y}Cos(n,y) + \frac{\partial V}{\partial z}Cos(n,z)\right]d\sigma - \iiint_\Omega (gradU, gradV)dV =$$

$$= \iint_S U\frac{\partial V}{\partial n}d\sigma - \iiint_\Omega (gradU, gradV)dV$$

Теорема:

Решение задачи (1)-(3), $U(M) \in \tilde{N}^2_\Omega, t \geq 0$ единственно

<u>Доказательство:</u>

Предположим, имеется два решения: U_1 и U_2. Их разность $V=U_1-U_2$

Удовлетворяет однородному уравнению (1_0) в силу линейной задачи, начального условия (2_0).

(1_0) $\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \Delta V$

(2_0) $V\big|_{t=0} = 0$

$\dfrac{\partial V}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$

$$(3^*)\quad \left[\alpha\frac{\partial V}{\partial n}+\beta V\right]\Big|_S=0$$

Воспользуемся первой формулой Грина, взяв $U=\dfrac{\partial V}{\partial t}$

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial V}{\partial t}\Delta V dV=\iint\limits_S\frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial n}d\sigma-\iiint\limits_V\left(grad\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right),gradV\right)dV$$

$$\frac{1}{a^2}\iiint\limits_{\Omega}2\frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}dV=-\frac{\beta}{\alpha}\iint\limits_S 2\frac{\partial V}{\partial t}Vd\sigma-\iiint\limits_V\left(\frac{\partial}{\partial t}(gradV),gradV\right)dV$$

$$\frac{\partial V}{\partial n}\Big|_S=-\frac{\beta}{\alpha}V\Big|_S$$

Из (1_0), (3*) получим: (правую и левую части умножим на 2)

$$2\frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2$$

$$2V\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(V)^2$$

$$2\left(\frac{\partial}{\partial t}(gradV),gradV\right)=\frac{\partial}{\partial t}(gradV)^2$$

$$\frac{1}{a^2}\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2dV=-\frac{\beta}{\alpha}\iint\limits_S\frac{\partial}{\partial t}\left(V^2\right)d\sigma-\iiint\limits_V\frac{\partial}{\partial t}(gradV)^2dV$$

Проинтегрируем правую и левую части: [0, T]; T>0

$$\frac{1}{a^2}\int\limits_0^T\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2dVdt=-\frac{\beta}{\alpha}\int\limits_0^T\iint\limits_S\frac{\partial}{\partial t}(V)^2d\sigma dt-\int\limits_0^T\iiint\limits_V\frac{\partial}{\partial t}(gradV)^2dVdt$$

Поменяем порядок интегрирования:

$$\frac{\partial V}{\partial t}=0,\quad \forall T>0,\ M\in\Omega$$

$$V\Big|_S=0,\quad \forall T>0 \qquad\Rightarrow\quad V\equiv 0 \text{ ч.т.д.}$$

$$gradV=0,\quad \forall T>0,\ M\in\Omega$$

18.Метод Фурье решения смешанных задач для волнового уравнения (для однородного уравнения и граничных условий).

(1) $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \Delta U(M,t), M(x,y,z) \in \Omega \subset R^3, \partial\Omega = S, t > 0$

(2) $U\big|_{t=0} = \varphi(M), M \in \overline{D}$

$\frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(M), M \in \overline{D}$

(3) $[\alpha \frac{\partial U}{\partial n} + \beta U]\Big|_{S=0}$

Рассмотрим краевую задачу (1), (3). Будем искать ее нетривиальные решения в виде:

(4) $U(M,t) = \Phi(M)T(t) \neq 0$

Подставим вид (4) в (1), (3):

$\Phi(M)T''(t) = a^2 \Delta\Phi(M)T(t)$

$\frac{\Phi(M)T''(t)}{a^2\Phi(M)T(t)} = \frac{a^2\Delta\Phi(M)T(t)}{a^2\Phi(M)T(t)}$

$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{\Delta\Phi(M)}{\Phi(M)} = -\lambda$

$T(t)[\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \beta\Phi])\Big|_{S=0}$

$[\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \beta\Phi]\Big|_{S=0}$

(5) $T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0$

$$\begin{array}{l} (6) \\ (7) \end{array} \begin{cases} \Delta\Phi(M) + \lambda\Phi(M) = 0 \\ \quad [\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \beta\Phi]\Big|_{S=0} \end{cases}$$

(7) задача Штурма - Лиувилля.

<u>**Теорема**</u>: Задача Штурма – Лиувилля (6)-(7) имеет счетное множество $\{\lambda_n\}$, для которых существует соответствующее им счетное множество нетривиальных решений Φ_n. ($\lambda_n > 0$).

λ_n - собственные числа (значения) значения (6)-(7), соответствующие им Φ_n – собственные функции.

<u>Доказательство:</u>

Без доказательства.

Пусть $\{\Phi_n\}$ - система ортогональных функций и $f(M \in L_\Omega)$ интегрируема в области Ω).

$f(M) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \Phi_k(M)$

$C_k = \frac{1}{\|\Phi_k\|^2} \iiint_\Omega f(M)\Phi_k(M)dV$

$\|\Phi_k\|^2 = \iiint_\Omega \Phi_k^2(M)dV$

Обратим внимание:

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos^2 kx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1 + cos 2kx)dx = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\pi + \frac{1}{2}\frac{1}{2k} sin 2kx\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$$

Таким образом, для решения задачи (1)-(3) необходимо проделав приведенные выше выкладки и :

1) Решить задачу Лиувилля – Штурма (6)-(7): λ_n, Φ_n

2) Решить уравнение (5) для каждого λ_n:

$$T_n''(t) + a^2\lambda_n T_n(t) = 0$$

$$T_n(t) = A_n cos a\sqrt{\lambda_n} t + B_n sin a\sqrt{\lambda_n} t$$

(т.к. $\lambda_n > 0$)

3) Выписать частное решение:

$$U_n(M,t) = [A_n cos a\sqrt{\lambda_n} t + B_n sin a\sqrt{\lambda_n} t]\Phi_n(M)$$

4) Выписать общее решение в виде линейной комбинации:

(8) $$U(M,t) = \sum_{n=1}^{\infty}[A_n cos a\sqrt{\lambda_n} t + B_n sin a\sqrt{\lambda_n} t]\Phi_n(M)$$

Общее решение содержит два набора неизвестных констант, которые находятся из начального условия (2).

5) Подставим (8) в начальное условие (2)

$$\varphi(M) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \Phi_n(M)$$

по свойству коэффициентов ряда Фурье:

(9) $$A_n = \frac{1}{\|\Phi_n\|^2}\iiint_{\Omega}\varphi(M)\Phi_n(M)dV$$

(10) $$\psi(M) = \sum_{n=1}^{\infty} a\sqrt{\lambda_n} B_n \Phi_n(M)$$

Отсюда:

$$B_n = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}\|\Phi_n\|^2}\iiint_{\Omega}\psi(M)\Phi_n(M)dV$$

Таким образом получили решение задачи (1)-(3) в виде ряда (8), которое выражается по формулам (9)-(10).

19.Задача о свободных колебаниях ограниченно струны с закрепленными концами. Физическая интерпретация.

Рассмотрим задачу о свободных колебаниях струны с закрепленными концами.

$(\tilde{1})\quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, 0 < x < l, t > 0$

$(\tilde{2})\quad U\big|_{t=0} = \varphi(x)$

$\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$

$(\tilde{3})\quad U\big|_{x=0} = 0$

$U\big|_{x=l} = 0$

Применим к задаче $(\tilde{1})$, $(\tilde{3})$ метод Фурье.

Найдем все нетривиальные решения $(\tilde{1})$, $(\tilde{3})$. Будем искать решение в виде:

$(\tilde{4})\quad U(x,t) = X(x)T(t)$

Подставим $(\tilde{4})$ в $(\tilde{1})$, $(\tilde{3})$:

$$\frac{T''(t)X(x)}{a^2T(t)X(x)} = \frac{a^2T(t)X''(x)}{a^2T(t)X(x)}$$

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

$(\tilde{5})T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0$

$$\begin{matrix}(\tilde{6})\\(\tilde{7})\end{matrix}\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0; X(l) = 0 \end{cases}$$

Решим $(\tilde{6}),(\tilde{7})$. Рассмотрим λ.

1) $\lambda > 0; \alpha^2 - (-\lambda) = 0$

$\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$

$x(x) = A_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + A_2 e\sqrt{-\lambda}x$

Подставим решение в граничное условие:

$A_1 + A_2 = 0 \Rightarrow A_2 = -A_1;$

$A_1[e^{-\sqrt{-\lambda}l} - e^{\sqrt{-\lambda}l}] = 0;$

$-2A_1 sh\sqrt{-\lambda}l = 0 \Rightarrow (sh = 0$ только в "0")

$\Rightarrow A_1 = 0, A_2 = 0;$

$X(x) \equiv 0$

При отрицательных λ ненулевых решений нет.

2) $\lambda = 0$

$\alpha^2 = 0;\ \alpha_1 = \alpha_2 = 0;\ \lambda(\mathrm{x}) = \mathrm{A}_1 + A_2 x;$

$A_1 = 0;\ \mathrm{A}_2 l = 0 \Rightarrow \mathrm{A}_2 = 0 \Rightarrow \mathrm{X(x)} \equiv 0 \Rightarrow$ ненулевого решения нет.

3) $\lambda > 0$

$\alpha^2 + \lambda = 0;\ \alpha_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda};$

$X(x) = A_1 cos\sqrt{\lambda}x + A_2 sin\sqrt{\lambda}x$

$X(0) = A_1 = 0;\ \mathrm{A}_2 sin\sqrt{\lambda}l = 0$

$A_2 \neq 0,\ \sin\sqrt{\lambda}l = 0;\ \sqrt{\lambda}l = \pi k;\ \sqrt{\lambda k} = \dfrac{\pi k}{l}$

$\lambda_k = \left(\dfrac{\pi k}{l}\right)^2$

$X_k(x) = A_{2k} sin\dfrac{\pi k}{l}x,\ \mathrm{k}=1,2,...$

Будем искать собственные функции с точностью до константы.
Решим уравнение для T:

$$(\tilde{5})\ \ T_k''(t) + \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 T(t) = 0$$

Частное решение:

$$U_k(x,t) = [A_k cos\frac{a\pi k}{l}t + B_k sin\frac{a\pi k}{l}t]sin\frac{\pi k}{l}x$$

Общее решение:

$$(\tilde{8})\ \ U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}[A_k cos\frac{a\pi k}{l}t + B_k sin\frac{a\pi k}{l}t]sin\frac{\pi k}{l}x$$

Подставим $(\tilde{8})$ в $(\tilde{2})$ для определения A_k и B_k :

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k sin\frac{\pi k}{l}x$$

По свойству ряда :

$$(\tilde{9})\ \ \mathrm{A}_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) sin\frac{\pi k}{l}xdx$$

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a\pi k}{l}B_k sin\frac{\pi k}{l}x$$

$$(\tilde{1}0)\ \mathrm{B}_k = \frac{2}{a\pi k}\int_0^1 \psi(x) sin\frac{\pi k x}{l}dx$$

При условии равномерной сходимости ряда $(\tilde{8})$ он определяет функцию непрерывную.

20.Задача о колебаниях круглой мембраны (без свойств функций Бесселя).

Задача о свободных колебаниях круглой мембраны.

Рассмотрим (круглую) мембрану радиуса l:

(1) $$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right),\ \ x^2 + y^2 < l,\ t>0$$

$$U\Big|_{t=0} = F_1(x,y) \text{ - начальное смещение}$$

(2) $$\frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t=0} = F_2(x,,y) \text{ - начальная скорость}$$

(3) $$U\Big|_{x^2+y^2=l} = 0 \text{ - край закреплен}$$

Перейдем к полярным координатам:

$x = rcos\varphi$

$y = rsin\varphi$

Тогда $U(x,y,t) = U(r,\varphi,l)$

$(\bar{1})$ $$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\right)$$

$$0 \le r<l,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ t>0$$

$$U\Big|_{t=0} = f_1(r,\varphi)$$

$(\bar{2})$ $$\frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t=0} = f_2(r,\varphi)\ \ ,f_i(r,\varphi+2\pi n) = f_i(r,\varphi),\ i=1,2;\ n\in z$$

$(\bar{3})$ $U(l,\varphi,t) = 0$

$(\bar{4})$ $U(r,\varphi+2\pi n,t) = U(r,\varphi,t),\ n\in z$

Будем решать $(\bar{1})$ - $(\bar{4})$.

Рассмотрим $(\bar{1}),(\bar{3}),(\bar{4})$.

Представим все нетривиальные решения. Представим:

$U(r,\varphi,t) = W(r,\varphi)T(t)$

$T''(t)W(r,\varphi) = a^2\Delta W(r,\varphi)T(t)$

$$\frac{T''(t)\cancel{W(r,\varphi)}}{a^2T(t)\cancel{W(r,\varphi)}} = \frac{\cancel{a^2}\Delta W(r,\varphi)\cancel{T(t)}}{\cancel{a^2}W(r,\varphi)\cancel{T(t)}}$$

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{\Delta W(r,\varphi)}{W(r,\varphi)} = -\lambda^2$$

Отсюда:

(5) $$T''(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \lambda W = 0$$

$W(l,\varphi) = 0,\ W(r,\varphi+2\pi n) = W(r,\varphi)$

$W(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$

$$R''(r)\Phi(\varphi) + \frac{R'(r)\Phi(\varphi)}{r} + \frac{R(r)\Phi''(\varphi)}{r^2} + \lambda R(r)\Phi(\varphi) = 0$$

Умножим на r^2 и поделим на W:

$$\frac{r^2R''(r)\cancel{\Phi(\varphi)}}{R(r)\cancel{\Phi(\varphi)}} + \frac{rR'(r)\cancel{\Phi(\varphi)}}{R(r)\cancel{\Phi(\varphi)}} + \frac{\cancel{R(r)}\Phi''(\varphi)}{\cancel{R(r)}\Phi(\varphi)} + \frac{\lambda r^2\cancel{R(r)}\cancel{\Phi(\varphi)}}{\cancel{R(r)}\cancel{\Phi(\varphi)}} = 0$$

$$\frac{r^2R''(r)}{R(r)}+\frac{rR'(r)}{R(r)}+\lambda r^2=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\upsilon^2$$

Разделим и получим:

(6) $\Phi''(\varphi)+\upsilon^2\Phi(\varphi)=0$

(7) $\Phi(\varphi+2\pi n)=\Phi(\varphi),\ n\in z$

(6)-(7) - задача для φ

(8) $r^2R''(r)+rR'(r)+(\lambda^2r^2-\upsilon^2)R(r)=0$

(9) $R(r)=0$ - граничное условие

Общий вид решения уравнения (5) можно записать:

$$T_\lambda(t)=A_\lambda cos(a\lambda t)+B_\lambda sin(a\lambda t) \qquad (*)$$

Общий вид решения уравнения (6):

$$\Phi_\lambda(\varphi)=C_\upsilon cos\upsilon\varphi+D_\upsilon sin\upsilon\varphi \qquad (**)$$

$C_\upsilon cos(\upsilon\varphi+2\pi n\upsilon)+D_\upsilon sin(\upsilon\varphi+2\pi n\upsilon)$

Из условия (7): $\upsilon=m\in z$

Рассмотрим уравнение (8). Введем замену: $x=\lambda r$, $y(x)=R(r)=R\left(\frac{x}{\lambda}\right)$

$$\left\{\begin{matrix} R'(r)=y'(x)\lambda \\ R''(r)=y''(x)\lambda^2 \end{matrix}\right\}$$

(10) $x^2y''(x)+xy'(x)+(x^2-\upsilon^2)y(x)=0$ - уравнение Бесселя.

ν - порядок уравнения Бесселя.

Будем искать решение (10) в виде ряда:

$$y(x)=x^\mu\sum_{k=0}^{\infty}C_kx^k$$

для нахождения коэффициентов, подставим ряд в (10):

$$y'(x)=x^\mu\sum_{k=0}^{\infty}C_k(\mu+k)x^{k-1}$$

$$y''(x)=x^\mu\sum_{k=0}^{\infty}C_k(\mu+k)(\mu+k-1)x^{k-2}$$

Подставляем:

$$\sum_{k=0}^{\infty}C_k(\mu+k)(\mu+k-1)x^k+\sum_{k=0}^{\infty}C_k(\mu+k)x^k-\upsilon^2\sum_{k=0}^{\infty}C_kx^k+\sum_{k=0}^{\infty}C_kx^{k+2}=0$$

Соберем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$C_0(\mu^2-\upsilon^2)+xC_1\left[(\mu+1)^2-\upsilon^2\right]+x^2\left[C_2((\mu+2)^2-\upsilon^2)+C_0\right]+$$

$$...+x^n\left[C_n((\mu+n)^2-\upsilon^2)+C_{n-2}\right]+...=0$$

- полином при любых x равен 0, если все коэффициенты равны 0.

Очевидно:

$C_0(\mu^2-\upsilon^2)=0$

$C_1\left[(\mu+1)^2-\upsilon^2\right]=0$

.....

$C_n\left[(\mu+n)^2-\upsilon^2\right]+C_{n-2}=0$

.....

так как $C_0\neq0,\ \mu^2-\upsilon^2=0\Rightarrow\ \mu=\pm\upsilon$

Будем рассматривать случай $\mu = \upsilon > 0$

$$C_1\left[2\upsilon + 1\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

$$C_2 = -\frac{C_0}{2^2(\upsilon + 1)}$$

.....

$$C_n = -\frac{C_{n-2}}{2\upsilon n + n^2}$$

.....

Ненулевыми остаются только коэффициенты для $n = 2k$

$$C_{2k} = -\frac{C_{2k-2}}{2^2 k(\upsilon + k)}$$

$$C_{2k} = \frac{(-1)^k C_0}{2^{2k} k!(\upsilon + 1)(\upsilon + 2)...(\upsilon + k)}$$

$\Gamma(\upsilon) = \int\limits_0^\infty e^{-x} x^{\upsilon - 1} dx$ - гамма функция

$$\Gamma(1) = 1; \quad \Gamma(k + 1) = k\Gamma(k) = k!$$

Выберем в качестве $C_0 = \dfrac{1}{2^\upsilon \Gamma(\upsilon + 1)}$

Тогда: $C_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{2^{2k+\upsilon} k!\Gamma(\upsilon + k + 1)}$

Решение уравнения принимает вид:

(11) $\quad y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k+\upsilon}}{k!\Gamma(\upsilon + k + 1)} = J_\upsilon(x)$ - функция Бесселя первого рода, для $\upsilon > 0$

Для $\upsilon < 0$: $\mu = -\upsilon$

$$J_{-\upsilon}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\upsilon}}{k!\Gamma(k - \upsilon + 1)}$$

Если υ - не целое, то J_υ и $J_{-\upsilon}$ - линейно независимые функции.

Рассмотрим $\upsilon = m$; введем замену: $k - m = n$

$$J_{-m}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m}}{k!\Gamma(k - m + 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}}{(n+m)!\Gamma(n + 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}}{n!\Gamma(n + m + 1)} = (-1)^m J_m(x)$$

Из асимптотического поведения Г-функции для целого порядка функции Бесселя первого рода линейно зависимы.

Введем функцию Бесселя второго рода:

$$Y_\upsilon(N_\upsilon, W_\upsilon) = \frac{J_\upsilon(x)\cos\pi\upsilon - J_{-\upsilon}(x)}{\sin\pi\upsilon}$$

21.Функции Бесселя. Свойства функций Бесселя.

$$J_\upsilon(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\upsilon}}{k!\Gamma(\upsilon+k+1)}$$ - Бессель 1-го рода

$$Y_\upsilon(N_\upsilon,W_\upsilon)=\frac{J_\upsilon(x)\cos\pi\upsilon-J_{-\upsilon}(x)}{\sin\pi\upsilon}$$ - Бессель 2-го рода

<u>Теорема:</u> Функции Бесселя первого и второго рода линейно независимы для любого υ (без доказательства).

Таким образом, уравнение (10) может быть представлено в виде:

(12) $y(x)=C_mJ_m(x)+D_mY_m(x)$

Свойства функции Бесселя:

1^0. Поведение в нуле:

$$J_\upsilon(x)\xrightarrow{x\to0}\begin{cases}0, & \upsilon>0,\ \upsilon=-m,\ m\in\mathrm{N}\\ 1, & \upsilon=0\\ \infty, & \upsilon<0,\ \upsilon\neq-m,\ m\in\mathrm{N}\end{cases}$$

$$Y_\upsilon(x)\xrightarrow{x\to0}\begin{cases}0, & \upsilon>0,\ \upsilon=-m,\ m\in\mathrm{N}\\ 1, & \upsilon=0\\ \infty, & \upsilon<0,\ \upsilon\neq-m, m\in\mathrm{N}\end{cases}$$

2^0. Асимптотическое поведение:

$$J_\upsilon(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Y_\upsilon(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\upsilon\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

Очевидно, из асимптотического поведения функции Бесселя первого и второго рода имеют счетное множество нулей.

Обозначим: $J_\upsilon(\mu_{\upsilon n})\overset{n\in N}{=}0$.

3^0. Рекуррентные формулы дифференцирования:

$$J'_\upsilon(x)=\frac{\upsilon}{x}J_\upsilon(x)-J_{\upsilon+1}(x)$$ (через себя и старшего порядка)

$$J'_\upsilon(x)=-\frac{\upsilon}{x}J_\upsilon(x)+J_{\upsilon+1}(x)$$ (через себя и младшего порядка)

Вычтем их, получим:

$$J_{\upsilon+1}(x)=\frac{2\upsilon}{x}J_\upsilon(x)-J_{\upsilon-1}(x)$$

Вернемся к решению (10) в виде (12).

Из условий непрерывности решения при $x=\lambda r=0$

$D_m=0$

$y(x)=C_m^0J_m(x)$

Тогда: $R(r)=C_m^0J_m(\lambda r)$

Из граничного условия (9) $R(l)=0$:

$C_m^0J_m(\lambda l)=0\ \Rightarrow\ \lambda_n l=\mu_{mn}\ \Rightarrow\ \lambda_n=\frac{\mu_{mn}}{l}$ - нули функции Бесселя порядка m.

$$R_{nm}=C_m^0 J_m\left(\frac{\mu_{mn} r}{l}\right)$$

Соберем частное решение:

$$U_{nm}=T_{mn}(t)\Phi_m(\varphi)R_{mn}(r)=$$

$$=J_m\left(\frac{\mu_{mn} r}{l}\right)\left[C_m\cos m\varphi+dm\sin m\varphi\right]\times\left[A_{nm}\cos\frac{a\mu_{mn}}{l}t+B_m\sin\frac{a\mu_{mn}}{l}t\right]$$

$$U(r,\varphi,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}J_m\left(\frac{\mu_{mn} r}{l}\right)\left\{\left[C_{mn}\cos m\varphi+d_{mn}\sin m\varphi\right]\times\cos\frac{a\mu_{mn}}{l}t+\right.$$

(13)

$$\left.+\left[a_{mn}\cos m\varphi+b_{mn}\sin m\varphi\right]\sin\frac{a\mu_{mn}}{l}t\right\}$$

Для определения неизвестных коэффициентов, подставим (13) в $(\overline{2})$

$$f_1(r,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}J_m\left(\frac{\mu_{mn} r}{l}\right)\left[C_m\cos m\varphi+d_m\sin m\varphi\right]$$

$$f_1(r,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[J_m\left(\frac{\mu_{mn} r}{l}\right)C_m\cos m\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}J_m\left(\frac{\mu_{mn} r}{l}\right)d_m\sin m\varphi\right]$$

Используя разложение в ряд Фурье по тригонометрическим функциям, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}J_0\left(\frac{\mu_{0n} r}{l}\right)C_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_1(r,\varphi)d\varphi\\
&\sum_{n=1}^{\infty}J_m\left(\frac{\mu_{mn} r}{l}\right)C_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_1(r,\varphi)\cos m\varphi d\varphi\\
&\sum_{n=1}^{\infty}J_m\left(\frac{\mu_{mn} r}{l}\right)d_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_1(r,\varphi)\sin m\varphi d\varphi
\end{aligned}\right|\quad(14)$$

Подставим ряд во второе условие, производная по t:

$$f_2(r,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}J_m\left(\frac{\mu_{mn} r}{l}\right)\frac{a\mu_{mn} r}{l}a_{mn}\cos m\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}J_m\left(\frac{\mu_{mn} r}{l}\right)\frac{a\mu_{mn}}{l}b_{mn}\sin m\varphi\right]$$

Отсюда:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}J_0\left(\frac{\mu_{0n} r}{l}\right)\mu_{0n}a_{0n}=\frac{l}{2\pi a}\int_0^{2\pi}f_2(r,\varphi)d\varphi\\
&\sum_{n=1}^{\infty}J_m\left(\frac{\mu_{mn} r}{l}\right)\mu_{mn}a_{mn}=\frac{l}{\pi a}\int_0^{2\pi}f_2(r,\varphi)\cos m\varphi d\varphi\\
&\sum_{n=1}^{\infty}J_m\left(\frac{\mu_{mn} r}{l}\right)\mu_{mn}a_{mn}=\frac{l}{\pi a}\int_0^{2\pi}f_2(r,\varphi)\sin m\varphi d\varphi
\end{aligned}\right|\quad(15)$$

Рассмотрим разложение интегрируемой функции в ряд по функциям Бесселя: возьмем две функции Бесселя: (υ - пока произвольное)

$$J_\upsilon(\lambda_1,r),\ J_\upsilon(\lambda_2,r)$$

$$\lambda_i=\frac{\mu\upsilon_i}{l}$$

Обе эти функции удовлетворяют уравнению Бесселя (8).

Представим в виде:

$$\frac{d}{dr}\left[r\frac{dR}{dr}\right]+\left(\lambda r-\frac{\upsilon^2}{r}\right)R(r)=0$$

Подставим функцию Бесселя в уравнение и домножим первое уравнение на $J_v(\lambda_2 r)$, а второе на $J_v(\lambda_1 r)$.

$$J_v(\lambda r)\frac{d}{dr}\left[r\frac{dJ_v(\lambda_1 r)}{dr}\right]+\left(\lambda_1^2 r-\frac{\upsilon^2}{r}\right)J_v(\lambda_1 r)J_v(\lambda_2 r)=0$$

$$J_v(\lambda_1 r)\frac{d}{dr}\left[r\frac{dJ_v(\lambda_2 r)}{dr}\right]+\left(\lambda_2^2 r-\frac{\upsilon^2}{r}\right)J_v(\lambda_1 r)J_v(\lambda_2 r)=0$$

Вычтем из первого второе:

$$J_v(\lambda_2 r)\frac{d}{dr}\left[rJ_v'(\lambda_1 r)\lambda_1\right]-J_v(\lambda_1 r)\frac{d}{dr}\left[rJ_v'(\lambda_2 r)\lambda_2\right]=r\left(\lambda_2^2-\lambda_1^2\right)J_v(\lambda_1 r)J_v(\lambda_2 r)$$

Проинтегрируем правую и левую части от 0 до l по r:

$$J_v(\lambda_2 r)r\lambda_1 J_v'(\lambda_1 r)\Big|_0^l-\lambda_1\lambda_2\int_0^l rJ_v'(\lambda_1 r)J_v'(\lambda_2 r)dr-J_v(\lambda_1 r)rJ_v'(\lambda_2 r)\lambda_2\Big|_0^l+$$

$$+\lambda_2\lambda_1\int_0^l rJ_v'(\lambda_2 r)J_v'(\lambda_1 r)dr=\left(\lambda_2^2-\lambda_1^2\right)\int_0^l rJ_v(\lambda_1 r)J_v(\lambda_2 r)dr$$

(#) $$l\lambda_1 J_v(\lambda_2 l)J_v'(\lambda_1 l)-l\lambda_2 J_v(\lambda_1 l)J_v'(\lambda_2 l)=\left(\lambda_2^2-\lambda_1^2\right)\int_0^l rJ_v(\lambda_1 r)J_v(\lambda_2 r)dr$$

Подставим значение λ, получим:

$$0=\mu_{\upsilon_1}J_v(\mu_{\upsilon_2})J_v'(\mu_{\upsilon_1})-\mu_{\upsilon_2}J_v(\mu_{\upsilon_1})J_v'(\mu_{\upsilon_2})=\frac{(\mu_{\upsilon_2}^2-\mu_{\upsilon_1}^2)}{l^2}\int_0^l rJ_v\left(\frac{\mu_{\upsilon_1}r}{l}\right)J_v\left(\frac{\mu_{\upsilon_2}r}{l}\right)dr$$ Таким образом:

$\int_0^l rJ_v\left(\frac{\mu_{\upsilon_1}r}{l}\right)J_v\left(\frac{\mu_{\upsilon_2}r}{l}\right)dr$, то есть, функции Бесселя $J_v\left(\frac{\mu_{\upsilon_1}r}{l}\right)$ и $J_v\left(\frac{\mu_{\upsilon_2}r}{l}\right)$, $i\neq j$ в пространстве суммируемых функций с весом r.

Рассмотрим некоторые функции в ряд по функциям Бесселя:

$$g(r)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n J_v\left(\frac{\mu_{\upsilon_n}}{l}r\right)\quad (*)$$

Умножим правую и левую части на r и на какую0нибудь произвольную $J_n\left(\frac{\mu_{\upsilon_i}}{l}r\right)$.

$$rg(r)=\sum_{n=1}^{\infty}rg_n J_v\left(\frac{\mu_{\upsilon_n}}{l}r\right)$$

$$rg(r)J_v\left(\frac{\mu_{\upsilon_i}}{l}r\right)=\sum_{n=1}^{\infty}rg_n J_v\left(\frac{\mu_{\upsilon_n}}{l}r\right)J_v\left(\frac{\mu_{\upsilon_i}}{l}r\right)$$

Проинтегрируем правую и левую части от 0 до l по r:

Пользуясь ортогональностью функции Бесселя, будем иметь:

$$\int_0^l rg(r)J_v\left(\frac{\mu_{\upsilon_i}}{l}r\right)dr=g_i\int_0^l rJ_v^2\left(\frac{\mu_{\upsilon_i}}{l}r\right)dr$$

Введем обозначения:

$$\left\|J_\upsilon\left(\frac{\mu_{\upsilon_i} r}{l}\right)\right\|^2=\int_0^l rJ_\upsilon^2\left(\frac{\mu_{\upsilon_i} r}{l}\right)dr$$

Тогда для (*) коэффициенты g_n

$$g_n=\frac{1}{\left\|J_\upsilon\left(\frac{\mu_{\upsilon_i} r}{l}\right)\right\|^2}\int_0^l rg(r)J_\upsilon^2\left(\frac{\mu_{\upsilon_i} r}{l}\right)dr \qquad (**)$$

Для вычисления нормы воспользуемся соотношением (#):

Положим $\lambda_1=\frac{\mu_{\upsilon_n}}{l}, \lambda_2\to\lambda_1$.

Тогда:

$$\int_0^l rJ_\upsilon(\lambda_1 r)J_\upsilon(\lambda_2 r)dr=\frac{l\lambda_1 J_\upsilon(\lambda_2 r)J_\upsilon'(\lambda_1 r)}{\lambda_2^2-\lambda_1^2}$$

Найдем:

$$\lim_{\lambda_2\to\lambda_1}\int_0^l rJ_\upsilon(\lambda_1 r)J_\upsilon(\lambda_2 r)dr=\lim_{\lambda_2\to\lambda_1}\frac{l\lambda_1 J_\upsilon(\lambda_2 r)J_\upsilon'(\lambda_1 r)}{\lambda_2^2-\lambda_1^2}=\lim_{\lambda_2\to\lambda_1}\frac{l^2\lambda_1 J_\upsilon'(\lambda_2 r)J_\upsilon'(\lambda_1 r)}{2\lambda_2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\|J_\upsilon(\lambda_1 r)\right\|^2=\frac{l^2}{2}\left(J_\upsilon'(\lambda_1 r)\right)^2=\frac{l^2}{2}\left[\frac{\upsilon}{\lambda_1 l}J_\upsilon(\lambda_1 r)-J_{\upsilon+1}(\lambda_1 r)\right]^2$$, тогда

$$\left\|J_\upsilon\left(\frac{\mu_{\upsilon_n} r}{l}\right)\right\|^2=\frac{l^2}{2}J_{\upsilon+1}^2(\mu_{\upsilon_n}) \qquad (***)$$

Вернемся к (14), таким образом:

$$C_{0n}=\frac{1}{\pi l^2 J_1^2(\mu_{0n})}\int_0^l\int_0^{2\pi} rf_1(r,\varphi)J_0\left(\frac{\mu_{0n}}{l}r\right)d\varphi dr$$

$$C_{mn}=\frac{2}{\pi l^2 J_{m+1}^2(\mu_{mn})}\int_0^l\int_0^{2\pi} rf_1(r,\varphi)J_m\left(\frac{\mu_{mn}}{l}r\right)Cosm\varphi d\varphi dr$$

$$d_{mn}=\frac{2}{\pi l^2 J_{m+1}^2(\mu_{mn})}\int_0^l\int_0^{2\pi} rf_1(r,\varphi)J_m\left(\frac{\mu_{mn}}{l}r\right)Sinm\varphi d\varphi dr$$

Коэффициенты a_{0n}, a_{mn}, b_{mn} - вычисляются аналогично.

22.Задачи для волнового уравнения со стационарными условиями.

Рассмотрим следующую задачу:

(1) $$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x), \quad 0 < x < l, \ t > 0$$

(2) $$U\big|_{t=0} = \varphi(x)$$
$$\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$$

(3) $$U\big|_{x=l} = \mu_1$$
$$U\big|_{x=0} = \mu_2$$

Представим решение задачи в виде:

$U(x,t) = U_1(x,t) + U_2(x)$, где $U_1(x,t)$ - решение задачи:

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$
$$U_1\big|_{t=0} = \varphi(x)$$
$$\left.\frac{\partial U_1}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$$
$$U_1\big|_{x=0} = 0$$
$$U_1\big|_{x=l} = 0$$

А $U_2(x,t)$ - решение задачи:

$$a^2 \frac{d^2 U_2}{dx^2} = -f(x) \quad (4)$$

$$U_2\big|_{x=l} = \mu_1$$
$$U_2\big|_{x=0} = \mu_2 \quad (5)$$

Составляющую U_2 называют «статическим прогибом».

Проинтегрируем уравнение (4) дважды:

$$\frac{d^2 U_2}{dx^2} = -\frac{f(x)}{a^2}$$

$$\frac{dU_2}{dx} = -\frac{1}{a^2}\int_0^x f(y)dy + C_1$$ - (первый раз)

$$U_2(x) = -\frac{1}{a^2}\int_0^x\int_0^z f(y)dydz + C_1 x + C_2$$ - (второй раз)

Поменяем порядок интегрирования:

$$-\frac{1}{a^2}\int_0^x f(y)\int_y^x dzdy = -\frac{1}{a^2}\int_0^x (x-y)f(y)dy$$

$$U_2(x) - \frac{1}{a^2}\int_0^x (x-y)f(y)dy + C_1 x + C_2$$

Подставим решение в граничные условия:

Из граничного условия $C_2 = \mu_2$

$$\mu_1 = -\frac{1}{a^2}\int_0^l (l-y)f(y)dy + C_1 l + \mu_2$$

$$C_1 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{l} + \frac{1}{a^2 l}\int_0^l (l - y) f(y) dy$$

Подставим:

$$U_2(x) = \mu_2 + (\mu_1 - \mu_2)\frac{x}{l} + \frac{1}{a^2}\left[\frac{x}{l}\int_0^l (l - y) f(y) dy - \int_0^x (x - y) f(y) dy\right]$$

Разобьем интеграл:

$$\frac{x}{l}\int_0^l (l - y) f(y) dy + \int_0^x f(y)\left[\frac{x(l - y)}{l} - x + y\right] dy$$

$$\frac{xl - xy - xl + ly}{l}$$

Окончательное решение:

$$U_2(x) = \mu_2 + \left(\mu_1 - \mu_2\right)\frac{x}{l} + \frac{1}{a^2}\left[\int_x^l f(y)\frac{x(l - y)}{l} dy + \int_0^x f(y)\frac{y(l - x)}{l} dy\right]$$ - статическая составляющая решения.

23.Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Следствия.

Рассмотрим уравнение теплопроводности для однородного трехмерного тела, оно принимает простейший вид:

$$(1)\qquad \frac{\partial u(M,t)}{\partial t}=a^2\Delta u(M,t),\quad M\in\Omega\subset R^3,\ t>0,\ \partial\Omega=S$$

Построим цилиндр в четырехмерном пространстве.
Основание цилиндра – область Ω.
Проведем сечение цилиндра плоскостью $t=0$ и $t=T,\ T>0$.
Обозначим цилиндр через $D=\{(M,t):\ 0<t<T,\ M\in\Omega\}$.
Обозначим: $\Gamma-$ часть поверхности цилиндра, состоящую из боковой поверхности и нижнего основания.
Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:
Найти функцию u, удовлетворяющую уравнению (1) в цилиндре D непрерывную вплоть до границ: $u\in C_{\bar D}$ и удовлетворяют начальному условию:

$$(2)\qquad u(M,t)\big|_{t=0}=\varphi(M),\qquad M\in D$$

и граничному условию:

$$(3)\qquad u(M,t)\big|_S=f(M,t),\qquad M\in S$$

Если u непрерывно вплоть до Γ, то $f(M,0)=\varphi(M),\quad M\in S$

<u>Теорема:</u> (Принцип максимума (минимума))
Решение уравнения теплопроводности (1) в цилиндре D, непрерывное вплоть до его границы, принимает наибольшее и наименьшее значение на Γ:

$$\min_{(M,t)\in\Gamma}u\le \underset{(M,t)\in D}{u}\le\max_{(M,t)\in\Gamma}u.$$

<u>Доказательство:</u>

От противного, обозначим: M $-$ наибольшее значение

$$M=\max_{(M,t)\in\bar D\setminus\Gamma}u;\qquad m=\max_{(M,t)\in\Gamma}u$$

и предположим, что $M>m,\ u(m_0,t_0)=M$.
Введем в рассмотрение вспомогательную функцию:

$$V(M,t)=u(M,t)+\frac{M-m}{6d^2}\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]$$

d $-$ диаметр области Ω.
Нетрудно видеть, что V, также как и u достигает наибольшего значения не на Γ, действительно:

$$V(M_0,t_0)=M$$

$$V\big|_\Gamma\le m+\frac{M-m}{6d^2}\cdot d^2=\frac{M}{6}+\frac{5m}{6}<M$$

Пусть V достигает максимум на (M_1,t_1), т.е.

$$V(M_1,t_1)=\max_{\bar D}V,\ \text{где}\ M_1\in\Omega,\ \ 0<t_1\le T$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}(M_1,t_1)\ge 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(M_1,t_1)<0$$

....

$$\text{т.е.}\ \ 0<\left(\frac{\partial V}{\partial t}-a^2\Delta V\right)\bigg|_{(M_1,t_1)}=\left[\frac{\partial V}{\partial t}-a^2\Delta V-a^2\frac{(M-m)6}{6d^2}\right]\bigg|_{(M_1,t_1)}<0\ -$$

$-$ противоречие.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

....

Значит предполагать о том, что наибольшее значение достигается на $\bar{D} \setminus \Gamma$ не состоятельно, тогда по теореме Вейерштрасса, наибольшее значение достигается на Γ.

Следствие 1: Решение задачи (1)-(3) единственно.

Доказательство:

Предположим, что существует два решения задачи (1)-(3).

$u = u_1 - u_2$. В силу линейности задачи, u удовлетворяет:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$$

и граничным условиям:

$$u\big|_{t=0} = 0$$

$$u\big|_S = 0$$

По принципу максимума: $0 \le u \le 0 \quad \Rightarrow \quad u \equiv 0$, ч.т.д.

Следствие 2: решение задачи (1)-(3) непрерывно зависит от начальных и граничных условий (устойчиво по отношению к начальным и граничным условиям), т.е.

$u_{1,2}\big|_{t=0} = \varphi_{1,2}(M)$

$u_{1,2}\big|_S = f_{1,2}(M,t)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad |f_1 - f_2| < \varepsilon, \quad |\varphi_1 - \varphi_2| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |u_1 - u_2| < \varepsilon$

Доказательство:

Обозначим: $u = u_1 - u_2$.

$$u\big|_{t=0} = \varphi_1(M) - \varphi_2(M) = \varphi(M)$$

$$u\big|_S = f_1(M,t) - f_2(M,t) = f(M,t)$$

Из принципа максимума:

$$|u| \le \max\left(|f|, |\varphi|\right) < \varepsilon$$, ч.т.д.

24.Единственность решения смешанных задач (2-го, 3-го рода) для уравнения теплопроводности.

Решение (1),(2),(3) непрерывное в замкнутой области, вместе со своими первыми производными по пространственным переменным, единственно.

$B = \{ (M,t): \ M \in \bar{D}, \ 0 \le t \le T \}$

Доказательство.

Предположим, существует два решения задачи: u_1 и u_2.

Обозначим: $u = u_1 - u_2$. В силу линейности задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$$

$$u\Big|_{t=0} = 0$$

$$\left[\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right]\Bigg|_S = 0$$

Воспользуемся первой формулой Грина при $u = V$:

$$\iiint\limits_D u \Delta u dV = \iint\limits_S u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \iiint\limits_D (grad u)^2 dV$$

$$\frac{1}{a^2} \iiint\limits_D u \frac{\partial u}{\partial t} dV = -\frac{\beta}{\alpha} \iint\limits_S u^2 d\sigma - \iiint\limits_D (grad u)^2 dV$$

Умножим и разделим первое слагаемое на 2:

$$\frac{1}{2a^2} \iiint\limits_D \frac{\partial}{\partial t}(u^2) dV = -\frac{\beta}{\alpha} \iint\limits_S u^2 d\sigma - \iiint\limits_D (grad u)^2 dV$$

Проинтегрируем правую и левую части по t на интервале от 0 до T:

$$\frac{1}{2a^2} \int\limits_0^T \iiint\limits_D \frac{\partial}{\partial t}(u^2) dV dt = -\frac{\beta}{\alpha} \int\limits_0^T \iint\limits_S u^2 d\sigma dt - \int\limits_0^T \iiint\limits_D (grad u)^2 dV dt$$

$$0 \le \frac{1}{2a^2} \iiint\limits_D u^2(M,T) dV = -\frac{\beta}{\alpha} \int\limits_0^T \iint\limits_S u^2 d\sigma dt - \int\limits_0^T \iiint\limits_D (grad u)^2 dV dt \le 0$$

Тогда $u(M,T) = 0, \ M \in D, \ \forall T > 0$

$u\big|_s = 0$

$u = const \quad \Rightarrow \quad u \equiv 0,$ ч.т.д.

25.Применение метода Фурье к решению смешанных задач для уравнения теплопроводности.

Рассмотрим задачу о теплообмене в однородном изотермическом стержне, постоянного сечения, длины l:

(1) $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),\quad 0<x<l,\quad 0<t\le T,\ T>0.$

a – коэффициент теплопроводности, $a=\sqrt{\dfrac{k}{c\rho}}$

(2) $u\big|_{t=0}=\varphi(x)$ - начальное распределение температуры

Решение задачи (1)-(3):

$(1^0),(2),(3^0)$

(1^0) $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

(3^0) $u\big|_{x=0}=0$

$u\big|_{x=l}=0$

Будем считать, что функция φ является непрерывной, имеет кусочно-непрерывную первую производную и $\varphi(0)=\varphi(l)=0$.

Найдем все нетривиальные решения краевой задачи $(1^0),(3^0)$.

Будем искать $u(x,t)=X(x)T(x)$.

Подставляя граничные условия в искомый вид, получим:

$T'(t)X(x)=a^2X''(x)T(t)$

$X(0)T(t)=0$

$X(l)T(t)=0$ $\qquad T\not\equiv 0$, поделим:

$\dfrac{T'(t)}{a^2T}=\dfrac{X''(x)}{x}=-\lambda^2$

Получим уравнение для T:

(4) $T'(t)+a^2\lambda^2T(t)=0$

(5) $X''(x)+\lambda^2X(x)=0$

(6) $X(0)=X(l)=0$

Задача Штурма - Лиувилля (5)-(6) была рассмотрена ранее

$$\lambda_k=\frac{\pi k}{l},\quad k=1,...$$

$$X_k(x)=\sin\frac{\pi kx}{l}$$

Тогда уравнение (4) имеет следующее решение:

$T'(t)+\left(\dfrac{a\pi k}{l}\right)^2T_k(t)=0$

$T_k(t)=c_ke^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2t}$ - общее решение

Тогда общее решение $(1^0),(3^0)$:

(7) $u(x,t)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}c_ke^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2t}\sin\frac{\pi kx}{l}$

Для нахождения неизвестных констант c_k подставим (7) в (2):

$$(*) \qquad \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\frac{\pi k x}{l}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{При t=0, ряд } = \varphi \\ \text{При t} > 0 \text{ - решение в виде (7)}\end{array}\right\}$$

Т.к. φ обладает указанными выше свойствами, то рад сходится равномерно (из теории рядов Фурье).

Т.к. для $t > 0$: $0 < e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} < 1$, ряд (7) сх-ся равномерно, определяя тем самым непрерывную функцию u.

Теми же свойствами обладают ряды, полученные по членным дифференцированием (7) по t, плюс дважды по x.

$$0 < \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} < 1, \quad \text{k} \gg 1$$

$$0 < \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} < 1, \quad \text{t} > 0$$

Из (*) по формуле коэффициентов ряда Фурье:

$$(8) \qquad c_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi k x}{l}dx.$$

Рассмотрим задачи $(1),(2^0),(3^0)$, где:

$$(2^0) \qquad u\big|_{t=0} = 0.$$

По теореме разложения Стеклова, решение $(1),(2^0),(3^0)$ можно представить в виде:

$$(**) \qquad u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k(t)\sin\frac{\pi k x}{l}, \quad G_k \text{ - неизвестная.}$$

Представим (**) в (1) и (2^0). Предварительно разложим $f(x,t)$ в ряд:

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)\sin\frac{\pi k x}{l}$$

$$A_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{\pi k x}{l}dx$$

(1) Примет вид:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[G_k'(t) + \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 G_k(t) - A_k(t)\right]\sin\frac{\pi k x}{l} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} G_k(0)\sin\frac{\pi k x}{l} = 0$$

Имеем два ряда по линейно независимым функциям.
Тогда:

$$(9) \qquad \begin{cases} G_k'(t) + \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 G_k(t) = A_k(t) \\ G_k(0) = 0 \end{cases}$$

Решение задачи (9) имеет вид:

$$G_k(t) - \int_0^t e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 (t-\tau)} A_k(\tau)d\tau$$

Тогда решение $(1),(2^0),(3^0)$ примет вид:

$$u(x,t) = \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^l\int_0^t e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 (t-\tau)} f(\gamma,\tau)\sin\frac{\pi k y}{l} d\tau dy$$

Вернемся к (1)-(3):

$u(x,t) = V(x,t) + w(x,t)$, где w – дважды дифференцируема по x и один раз по t, в заданной области и удовлетворяет условиям (3).

$$w(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}\left[\mu_2(t) - \mu_1(t)\right].$$

Тогда задача для V примет вид:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + f_1(x,t), \text{ где:}$$

$$f_1(x,t) = f(x,t) - \frac{\partial w}{\partial t} + a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f(x,t) - \mu_1'(t) - \frac{x}{l}\left[\mu_2'(t) - \mu_1'(t)\right]$$

Начальные условия:

$V\big|_{t=0} = \varphi_1(x); \quad \varphi_1 = \varphi(x) - w(x,0)$

$V\big|_{x=0} = 0, \quad V\big|_{x=l} = 0$

26.Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности.

Рассмотрим задачу о распространении тепла в протяженном однородном стержне, на участке отдаленном от границ.

$$(1) \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \; t > 0$$

$$(2) \qquad u\big|_{t=0} = \varphi(x)$$

Будем считать, что $\left|\varphi(x)\right| < M = const, \quad \forall |x| < \infty$, и искать решение (1),(2) в классе ограниченных функций: $\left|\varphi(x,t)\right| < M_1$.

Воспользуемся методом Фурье разделение переменных.

Будем искать нетривиальное решение (1) в виде:

$$u(x,t)X(x)T(t).$$

Подставим искомый вид в уравнение:

$$\frac{X(x)T'(t)}{a^2X(x)T(t)} = \frac{a^2X''(x)T(t)}{a^2X(x)T(t)}$$

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2$$

Получим уравнение для X и уравнение для T:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

$$T'(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0$$

Для неотрицательных λ:

$$X_\lambda(x) = A_\lambda \cos\lambda x + B_\lambda \sin\lambda x$$

$$\text{При} \quad \lambda = 0: \quad X_0(x) = A_0 x + B_0$$

Ограничений на λ нет, т.к. нет граничных условий.

$$T_\lambda(t) = c_\lambda e^{-a^2\lambda^2 t}$$

$$u_\lambda(x,t) = \left[a_\lambda \cos\lambda x + b_\lambda \sin\lambda x\right] e^{-a^2\lambda^2 t} - \text{ частное решение.}$$

$$(3) \qquad u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[a_\lambda \cos\lambda x + b_\lambda \sin\lambda x\right] e^{-a^2\lambda^2 t} d\lambda$$

Подставим (1) в (2) чтобы найти константы

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[a_\lambda \cos\lambda x + b_\lambda \sin\lambda x\right] d\lambda$$

$$x \in [-l, l]$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\frac{\pi k x}{l} + b_k \sin\frac{\pi k x}{l}\right]$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(y)\cos\frac{\pi k x}{l} dy$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(y)\sin\frac{\pi k x}{l} dy$$

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(y)dy + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(y)\cos\frac{\pi k}{l}(x-y)dy$$

Если рассматривать не конечный интервал, а конечный:

$$\frac{\pi k}{l}=\lambda;\quad \frac{\pi}{l}=\Delta\lambda;$$

Устремив $l\to\infty$, получим:

$$(*)\qquad f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\cos\lambda(x-y)dyd\lambda=\left|\text{интеграл Фурье ф-ции } f\right|=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\cos\lambda(x-y)dyd\lambda$$

Сравнивая (4) с интегралом Фурье (*), получим:

$$a_\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\cos ydy$$

$$b_\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\sin ydy$$

Подставим значения коэффициентов в (3):

$$u(x,t)=a_\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\lambda^2t}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\cos\lambda(x-y)dyd\lambda=$$

$$=\left|\text{поменяем порядок интегрирования}\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\lambda^2t}\cos\lambda(x-y)d\lambda\; dy$$

Рассмотрим внутренний интеграл, он является табличным:

$$(**)\qquad \int_0^{\infty}e^{-a^2\lambda^2}\cos\beta\lambda d\lambda=\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}$$

Воспользовавшись (**), однозначно получим:

$$(5)\qquad u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}dy$$

Формула (5) – формула Пуассона.

Функция $f(x,y)=\dfrac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}$ (6) – функция Пуассона.

Можно показать, что формула (5) при φ, обладающей свойствами непрерывности и дифференцируемости, действительно является решением задачи (1),(2).

28.Функция Грина. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности как функции влияния мгновенного точечного источника.

Определение: Функцией Грина задачи Коши уравнения теплопроводности $G(x,y,t)$ называется решение следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial G(x,y,t)}{\partial t} = \frac{a^2 \partial^2 G(x,y,t)}{\partial x^2}$$

$G(x,y,t)\big|_{t=0} = \delta(x-y)$ – дельта функция Дирака $\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \neq 0, & x = 0 \end{cases}$

1) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)dx = 1$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)dx = \begin{cases} 1, & x_0 \in [a,b] \\ 0, & x_0 \notin [a,b] \end{cases}$$

2) $\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}d\alpha$ - используя это легко показать четность δ - функции:

$\delta(x) = \delta(-x)$

3) $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$; $\delta(x) = \frac{dH(x)}{dx}$

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-y)dy = f(y)$ - свертка δ - функцией.

Используя (5) представление функции Грина нетрудно получить:

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(y-\xi)e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}dy = \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}}{2a\sqrt{\pi t}}$$ – функция Грина.

Будем обозначать:

$$G(x,\xi,t) = G(x-\xi,t) = \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}}{2a\sqrt{\pi t}}$$

Замечание: δ –функция Дирака может быть задана в пространстве любой размерности, например:

$\delta(M,P) = \delta(x-\xi, y-\eta, z-\chi) = \delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(z-\chi)$

$M(x,y,z)$ $P(\xi,\eta,\chi)$

Рассмотрим однородный изотропный стержень (вдоль оси Ох).

Выберем произвольную точку x_0 и отрезок длины $2h$.

Будем считать, что в задаче Коши: $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

В начальный момент времени задано следующее распределение температур:

$$u\big|_{t=0} = \begin{cases} v_0, & x \in [x_0-h, x_0+h] \\ 0, & x \notin [x_0-h, x_0+h] \end{cases}$$

$$Q = cs\rho 2hv_0$$

По формуле Пуассона, распределение температур в стержне в произвольный момент времени описывается:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x_0-h}^{x_0+h} v_0 e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot\frac{Q}{c\rho s}\cdot\frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi=$$

$$=|\text{по теореме о среднем}|=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot\frac{Q}{c\rho s}\cdot\frac{1}{2h}\cdot e^{-\frac{(\bar{\xi}-x)^2}{4a^2t}}\cdot 2h$$

$$\to|\text{ устремим } h\to 0\text{, стягивая отрезок в точку}|\to$$

$$\to\frac{Q}{c\rho s}\cdot\frac{e^{-\frac{(x_0-x)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}},\quad h\to 0,\quad \bar{\xi}\in[x_0-h,x_0+h]$$

Таким образом, фундаментальное решение задачи Коши описывает распределение температуры мгновенного сосредоточенного или точечного источника тепла $Q=c\rho s$.

29.Решение задач для уравнения теплопроводности на полупрямой (однородные граничные условия 1-го и 2-го рода).

Лемма1: Если в решении задачи Коши (1),(2) функция φ является нечетной относительно нуля, то есть $\varphi(x)=-\varphi(-x)$, то ее решение обратится в ноль при $x=0$, то есть $u\big|_{x=0}=0$.

Доказательство:

Решение задачи (1),(2) имеет вид:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)e^{-\frac{(y-x)^2}{4a^2t}}dy$$

$$u(0,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\varphi(y)e^{-\frac{y^2}{4a^2t}}}_{нечетная}dy\equiv 0$$, ч.т.д.

Лемма2: Если в решении задачи Коши (1),(2) функция φ является четной относительно нуля, то $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0$.

Доказательство:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2(y-x)}{4a^2t}\varphi(y)e^{-\frac{(y-x)}{4a^2t}}dy$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=-\frac{1}{8a^3\sqrt{\pi t^3}}\int_{-\infty}^{\infty}y\varphi(y)e^{-\frac{y^2}{4a^2t}}dy$$, ч.т.д.

Рассмотрим следующие начально-краевые задачи:

$(1'')\quad \frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ x>0, t>0$

$(2'')\quad u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ x>0$

$(3'')\quad u\big|_{x=0}=0$

$(4'')\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0$

$(5'')\quad \left.\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\sigma u\right]\right|_{x=0}=0$ - (теплообмен с окружающей средой)

Рассмотрим задачу $(1'')-(3'')$.

Продолжим начальные данные задачи на всю вещественную ось нечетным образом:

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x), x\ge 0\\ -\varphi(-x), x<0\end{cases}$$

И будем рассматривать соответствующую задачу коши.

Решение этой задачи совпадает с решением задачи $(1'')-(3'')$. В силу Леммы1 выполняется граничное условие.

Таким образом, используя продолжение Φ, решение задачи можно записать в следующем виде и обозначим (@):

$$(@)\qquad u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^\infty \varphi(y)e^{-\frac{(y-x)^2}{4a^2t}}dy-\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^0 \varphi(-\chi)=$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^\infty \varphi(y)e^{-\frac{(y-x)^2}{4a^2t}}dy-\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^\infty \varphi(y)e^{-\frac{(y+x)^2}{4a^2t}}dy=$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^\infty \varphi(y)\left[e^{-\frac{(y-x)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(y+x)^2}{4a^2t}}\right]dy$$

Используя обозначения функции Грина для задачи Коши:

$$G(x-y,t)=\frac{e^{-\frac{(y-x)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}$$

Решение первой начально-краевой задачи можно записать:

$$u(x,t)=\int\limits_0^\infty \varphi(y)G_1(x,y,t)dy$$

$$(6'')\qquad G_1(x,y,t)=G(x-y,t)-G(x+y,t)$$

Решение задачи на полупрямой использует два точечных источника (один на вещественной полуоси, один на мнимой).

Рассмотрим задачу $(4'')$.

Для решения задачи $(1''),(2''),(4'')$ продолжим начальные данные на всю ось четным образом:

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x), x\geq 0\\ \varphi(-x), x<0\end{cases}$$

Решение задачи Коши с такими начальными данными совпадает с искомым решением при $x>0$ и в силу Леммы 2 удовлетворяет заданному граничному условию.

Тогда решение можно записать:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left[\int\limits_0^\infty \varphi(y)e^{-\frac{(y-x)^2}{4a^2t}}dy+\int\limits_{-\infty}^0 \varphi(-y)e^{-\frac{(y-x)^2}{4a^2t}}dy\right],\ x>0$$

Делая замену: $-y=\xi$

Получим:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^\infty \varphi(y)\left[e^{-\frac{(y-x)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(y+x)^2}{4a^2t}}\right]dy,\ x>0,\ -y=\xi$$

или

$$u(x,t)=\int\limits_0^\infty \varphi(y)G_2(x,y,t)dy$$

$$(7'')\quad G_2(x,y,t)=G(x-y,t)+G(x+y,t)$$

31.Основные типы краевых задач для уравнений эллиптического типа. Формулы Грина (I и II).

$\Delta u = 0$ - Лапласа

$\Delta u = -f(M)$ - Пуассона

Пусть $D \subset R^3$ - конечная область, ограниченная поверхностью S, то есть $\partial D = S$.

$E = \frac{R^3}{D}$ - внешняя бесконечная область, ограниченная той же поверхностью.

Определение: Функция $u(M), M(x, y, z)$ называется гармонической в области D, если она $u \in C_D^2$ и удовлетворяет уравнению Лапласа, то есть $\Delta u = 0, M \in D$.

Примеры: $u = ax + by + cz; u = c; u = x^2 - y^2$

Определение: Функция $u(M), M(x, y, z)$ называется гармонической в области E, если $u \in C_E^2$ удовлетворяет уравнению Лапласа во всех точках области и $u(M) \to 0$,когда $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \to \infty$.

Задачи для уравнений Лапласа и Пуассона:
В зависимости от того в какой из областей рассматривается задача она носит название внутренней или внешней.

(1) $\Delta u(M) = 0, M \in D$	(1′) $\Delta u(M) = 0, M \in E$
(2) $\Delta u(M) = f(M), M \in D$	(2′) $\Delta u(M) = f(M), M \in E$

(3) $u\big|_s = \varphi(M), M \in S$ - задача Дирихле.

Начальных условий нет, так как это стационарные уравнения.

(4) $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \psi(M), M \in S$ - задача Неймана

(5) $\left.(\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u)\right|_S = g(M), M \in S$ - задача Робена

$u, v \in c_D^2 \cap c_{\bar{D}}^1$

$$(I) \quad \iiint\limits_D u \Delta v dV = \iiint\limits_S u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma - \iiint\limits_D (gradu, gradv) dV$$

$$(II) \quad \iiint\limits_D [u\Delta v - v\Delta u] dV = \iint\limits_S \left[u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right] d\sigma$$

32.Принцип максимума для гармонических функций. Следствия.

Теорема1: Функция $u(M), M(x,y,z)$ гармоническая в области D не может достигать хотя бы локального максимума или минимума в одной из точек D (за исключением постоянной).

Теорема2: Пусть функция $u(M), M(x,y,z)$ гармоническая в области D и непрерывна вплоть до границы области, тогда она достигает наибольшего и наименьшего значения на границе области.

$$\min_{M\in S} u(M) \le \underset{M\in \overline{D}}{u(M)} \le \max_{M\in S} u(M)$$

Доказательство:

Пусть функция $u(M), M(x,y,z)$ гармоническая в области D.

Предположим, что она достигает максимального значения в точке $A_0(x_0,y_0,z_0)$, $u(A_0)=M$.

Проведем из точки $A_0(x_0,y_0,z_0)$ шар, целиком лежащий в D с радиусом ε и поверхностью σ.

Обозначим через $m=\max\limits_{A\in\sigma} u(A)$.

Будем считать, что $M>m+\delta(\varepsilon)$.

Кроме того, можно найти некоторое число $\eta>0$, что $\eta\left|A_0A\right|^2<\dfrac{\delta}{2}$.

Рассмотрим вспомогательную функцию:

$v(A)=u(A)+\eta\left|AA_0\right|^2$

$v(A_0)=u(A_0)=M$

$\underset{A\in\sigma}{v(A)}=m+\dfrac{\delta}{2}<M$

Таким образом, функция v достигает наибольшего значения внутри шара:

$\max\limits_{D_\varepsilon} v=v(A_1), A_1\in D_\varepsilon$

Тогда $\Delta u(A_1)<0$.

С другой стороны $\Delta v(A_1)=\Delta u(A_1)+\sigma\eta>0$ - противоречие.

Полученное противоречие доказывает невозможность достижения максимума во внутренней точке.

Следствие: Если функции u и v гармонические в D и непрерывные вплоть до границы области, то выполнение на границе одного из соотношений: $u<v$ или $|u|<v$ влечет за собой выполнения этого соотношения во всех точках области.

Доказательство:

Очевидно, что:

$u-v<0$

$u<v$

$u>-v$

Рассмотрим такое решение уравнения Лапласа, которое обладает сферической симметрией, то есть

$u(r,\varphi,\theta)\equiv u(r)$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{c_1}{r^2}$$

$$u(r)=-\frac{c_1}{r}+c_2$$

Положим: $c_1 = -1$ и $c_2 = 0$, то $u(r) = \frac{1}{r}$ - фундаментальное решение уравнения Лапласа в пространстве.

<u>Замечание:</u> Аналогично решения уравнения Лапласа на плоскости $u(\rho)$ имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{c_1}{\rho}$$

$$u(\rho) = c_1 \ln \rho + c_2$$

Положим: $c_1 = -1$ и $c_2 = 0$, то $u(\rho) = \ln \frac{1}{\rho}$ - фундаментальное решение уравнения Лапласа на плоскости.

33.III формула Грина.

Предложение: Если функция $u(M) \in c_D^2 \cap c_{\bar{D}}^1$, тогда $\forall M(x_0, y_0, z_0) \in D$ справедливо представление:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\frac{1}{r}\frac{\partial u(P)}{\partial n} - u(P)\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} \right] d\sigma - \frac{1}{4\pi} \iiint_D \frac{\Delta u(P)}{r} dV$$, где

$r = |PM_0| = \sqrt{(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 + (\zeta - z_0)^2}$.

Доказательство:

Проведем из точки M_0 шар радиуса ε поверхности S_ε. Двусвязную область с границами S и S_ε обозначим D_ε, то есть $\partial D_\varepsilon = S \cup S_\varepsilon$.

Тогда к ним можно применить вторую формулу Грина:

$$\iiint_{D_\varepsilon} \left[u\Delta\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{\Delta u}{r} \right] dV = \iint_S \left[u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma + \iint_{S_\varepsilon} \left[u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma$$

Так как $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$, то:

$$\iiint_{D_\varepsilon} \frac{\Delta u}{r} dV = \iint_S \left[-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma + \iint_{S_\varepsilon} \left[-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma$$

Устремим $\varepsilon \to 0$, при этом левая часть будет стремиться к $\iiint_D \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$.

В силу непрерывности $\left| \frac{\partial u(P)}{\partial n} \right| \le k = const$ при $P \in S_\varepsilon$.

Тогда: $\left| \iint_{S_\varepsilon} \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} d\sigma \right| \le \frac{1}{\varepsilon} \iint_{S_\varepsilon} k d\sigma = \frac{k}{\varepsilon} 4\pi\varepsilon^2 = 4\pi k\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$

Рассмотрим $-\iint_{S_\varepsilon} u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma$ на S_ε:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) = \left.\frac{1}{r^2}\right|_{S_\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{S_\varepsilon} u d\sigma = \left| \begin{matrix} \text{òåî ðåì à} \\ \text{î ñðåäí åì} \end{matrix} \right| = -\frac{1}{\varepsilon^2} u(P_0) \cdot 4\pi\varepsilon^2 = -4\pi u(P_0) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 4\pi u(M_0)$$

Таким образом:

$$\iiint_D \frac{\Delta u}{r} dV = \iint_S \left[-u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma - 4\pi u(M_0)$$

Перенесем, поделим на 4π и получим требуемое:

$$(6) \quad u(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_D \frac{\Delta u}{r} dV + \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[-u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma$$

Формула (6) носит название основной или третьей формулой Грина.

Если функции u и v являются гармоническими, то формулы Грина примут вид:

$$(I') \qquad \iint_S u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma = \iiint_D (gradu, gradv)dV$$

$$(II') \qquad \iint_S \left[u\frac{\partial u}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right]d\sigma = 0$$

$$(III') \quad u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left[\frac{1}{r}\frac{\partial u(P)}{\partial n} - u(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]d\sigma$$

$M_0 \in D$

На плоскости формулы Грина принимают вид:

$$\iint_Q u\Delta v ds = \int_L u\frac{\partial v}{\partial n}dl - \iint_Q (gradu, gradv)ds$$

$$\iint_Q [u\Delta v - v\Delta u]ds = \int_L \left[u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right]dl$$

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi}\int_L \left[\frac{\partial u}{\partial n}\ln\frac{1}{\rho} - u(p)\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)\right]dl - \frac{1}{2\pi}\iint_Q \Delta u \ln\left(\frac{1}{\rho}\right)ds$$

34.Единственность решения третьей внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа (Пуассона).

Теорема4: Решение внутренней третьей краевой задачи для уравнения Лапласа (Пуассона) единственно.

Доказательство:

Предположим, существует два решения задачи $(1'),(4), u = u_1 - u_2$, u - гармоническая и удовлетворяет на границе однородному условию: $\left.\left[\alpha\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right]\right|_S = 0$.

При $u = v$ получим:

$$\iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}dV - \iiint_D (gradu)^2 dV = 0$$

Подставим $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = -\frac{\beta}{\alpha}u\Big|_S$

$-\frac{\beta}{\alpha}\iint_S u^2 dV - \iiint_D (gradu)^2 dV = 0 \Rightarrow$ оба равны нулю $\Rightarrow$ $u|_S = 0 \Rightarrow u = 0$

$\Rightarrow$ во всех точках области $gradu|_D = 0 \Rightarrow u = const$ $\Rightarrow u \equiv 0$.

35.Единственность решения внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа (Пуассона).

Терема3: Решение внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа (Пуассона) определяется с точностью до последнего слагаемого.

Доказательство:

Пусть u_1, u_2 - два решения задачи $(1'),(3)$.

Обозначим $u = u_1 - u_2$, u - гармоническая в D, и на границе $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0$.

Воспользуемся первой формулой Грина, положив $u = v$.

$\iint\limits_S u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma - \iiint\limits_D (gradu, gradv) dV = 0$, если $u = v$ получим:

$$\iint\limits_S u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \iiint\limits_D (gradu, gradu) dV = 0 \Rightarrow$$

$$\iiint\limits_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dV = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \Rightarrow u = const.$$

36.Единственность решения внешних краевых задач для уравнения эллиптического типа.

$(\bar{1}')\quad \Delta u(M)=f(M), M\in E \qquad (\bar{1})\quad \Delta u(M)=0$

$(2)\quad u|_S=\varphi(M), M\in S$

$(3)\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=\psi(M), M\in S$

$(4)\quad \left.\left[\alpha\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u\right]\right|_S=g(M), M\in S$

Будем называть функцию $f(M), M(x,y,z)$, определенную в области E регулярной, если $f(M)\to 0$ при $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\to\infty$, причем равномерно как $f(M)\sim\frac{A}{R}$.

Тогда ее первые производные $\frac{\partial F}{\partial x}\sim\frac{B}{R^2}$, $A,B-const$.

Замечание: Можно показать, что если функция $u(M)$ является гармонической в E, то она регулярна в этой области.

Теорема5: Решения внешних краевых задач для уравнения Лапласа (Пуассона) единственны.

Доказательство:

Предположим, указанные задачи имеют два решения, u_1 и $u_2, u=u_1-u_2$ - гармонические в $E(\Delta u=0)$.

Для (2) $u|_S=0$, для (3) $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=0$, для (4) $\left.\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u\right)\right|_S=0$ в силу линейности задач.

Введем начало координат в области D и опишем из начала координат сферу радиуса R, настолько большого, чтобы S целиком лежала внутри сферы. Обозначим двусвязную область через S_R и E_R. Воспользуемся первой формулой Грина, положив $u=v$ в E_R:

$$\iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma-\left(\iiint_{E_R}(grad u)^2\,dV+\iint_{S_R}u\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma\right)=0$$

При $R\to\infty, E_R\to E$.

Оценим второе слагаемое:

$$\left|\iint_{S_R}u\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma\right|<\iint_{S_R}\left|u\frac{\partial u}{\partial n}\right|d\sigma<\left|\begin{array}{l}\text{если } u \text{ - гармоническая в } E,\\ \text{то при достаточно большом } S,\\ \text{на сфере в силу регулярности и в области}\\ E \text{ при } R\to 1: |u|<\frac{c_1}{R}, \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|<\frac{c_2}{R^2}\end{array}\right|<$$

$$<\frac{c_1c_2}{R^3}\iint_{S_R}d\sigma=\frac{4\pi c_1c_2}{R},\ c_1,c_2-const$$

Таким образом, в пределе:

$$\iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma-\iiint_E(grad u)^2\,dV=0$$

$(\bar{1}'),(2)\quad u|_S=0\ \Rightarrow$ второе слагаемое рано нулю

$\Rightarrow\ grad u|_E=0\Rightarrow u(M)\equiv 0, M\in\bar{E}$

$\left(\bar{1}'\right),(3)$ $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0 \Rightarrow$ первое слагаемое равно нулю

$\Rightarrow \left. grad u\right|_E = 0 \Rightarrow u(M) = const, M \in \bar{E}$, но в силу гармоничности $u \to 0$ при $R \to \infty$, то $u \equiv 0$

$\left(\bar{1}'\right),(4)$ $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = -\frac{\beta}{\alpha}\left.u\right|_S \Rightarrow$

$-\frac{\beta}{\alpha}\iint\limits_S u^2 d\sigma - \iiint\limits_E (grad u)^2 dV = 0;\ \left. grad u\right|_E = 0 \Rightarrow u \equiv 0 \Rightarrow \left.u\right|_S = 0$

$\Rightarrow$ все внешние задачи имеют единственное решение.

37.Функция Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Свойства функции Грина внутренней задачи Дирихле.

$$(*)\quad u(M)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u(P)}{\partial n}-u(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]d\sigma$$

Для гармонических функций $r=|MP|$ - расстояние от т. М до переменной т. Р, имеющей непрерывную 1-ю производную, вплоть до границы.

Пусть $u(M)$ - гармоническая функция в ограниченной области D и непрерывная. Тогда для нее справедлива основная формула Грина (*).

Пусть функция $g(P,M)$ обладает следующими свойствами:

1) Как функция переменной P, является гармонической в области D и имеет непрерывную первую производную вплоть для границы.

2) На границе S: $g(P,M)\big|_S=-\frac{1}{4\pi r},\ r=|MP|$

Применим вторую формулу Грина к функциям u и g:

$$0=\iint_S\left[g(P,M)\frac{\partial u(P)}{\partial n}-u(P)\frac{\partial g(P,M)}{\partial n}\right]d\sigma$$

С учетом свойств g можно записать:

$$(**)\quad 0=\iint_S\left[-\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial u(P)}{\partial n}-u(P)\frac{\partial g(P,M)}{\partial n}\right]d\sigma$$

$$(*)+(**)=-\iint_S u(P)\frac{\partial}{\partial n}\left[g(P,M)+\frac{1}{4\pi r}\right]d\sigma$$

Введем обозначение: $G(P,M)=g(P,M)+\frac{1}{4\pi r}$, G - называется функцией Грина для уравнения Лапласа.

$$(7)\quad u(M)=-\iint_S u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n}d\sigma_P$$

Формула (7) носит название формулы Пуассона.

Функцией Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа называется функция $G(P,M)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) Как функция точки P, она является гармонической в области D, за исключением точки $P=M$ в которой она обращается в бесконечность.

2) Допуская представление $G(P,M)=g(P,M)+\frac{1}{4\pi r}, r=|MP|$, где g - гармоническая функция, точка P везде внутри D.

3) На границе области удовлетворяет граничному условию

$G(P,M)\big|_S=0,\ P\in S,\ M\in D$

$\Delta g(P,M)=0, P\in D$

$g(P,M)\big|_{P\in S}=-\frac{1}{4\pi r}$

Для каждой области функция Грина строится отдельно.

<u>Замечание:</u> Не давая доказательства существования решения внутренней задачи Дирихле, формула (7) дает интегральное представление достаточно гладкого решения с непрерывной производной вплоть до границы внутренней задачи Дирихле.

<u>Свойства функции Грина.</u>

1. Функция Грина $G(P,M)$ всюду положительна в области D:

$G(P,M)>0, P\in D$

2. Функция Грина симметрична: $G(P,M)=G(M,P)$

<u>Замечание:</u> Для плоского случая внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа функция Грина принимает вид:

$$\Delta u(x,y)=0,\ (x,y)\in D$$

$$u(x,y)\big|_S=\varphi(x,y)$$

$$G(M,P)=g(M,P)+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\rho},\ \rho=|MP|$$

38.Функция Грина внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа.

Задача Неймана:

$\Delta u(M)=0,\ M\in D$

$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=\psi(M),\ M\in S$

Если u - гармоническая в D, для нее справедлива третья (основная) формула Грина:

$$u(M)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u(P)}{\partial n}-u(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]d\sigma_P$$

Введем в рассмотрение функцию $g(P,M)\in C_D^2\cap C_{\bar{D}}^1$ - гармоническую функцию точки $P, P\in D$.

Тогда, к g и u можно применить вторую формулу Грина:

$$0=\iint\limits_S\left[g(P,M)\frac{\partial u(P)}{\partial n}-u(P)\frac{\partial g(P,M)}{\partial n}\right]d\sigma_P$$

Сложим обе формулы, получим:

$$u(M)=\iint\limits_S\frac{\partial u(P)}{\partial n}\left[g(P,M)+\frac{1}{4\pi r}\right]d\sigma-\iint\limits_S u(P)\frac{\partial}{\partial n}\left[g(P,M)+\frac{1}{4\pi r}\right]d\sigma$$

Обозначим: $G(P,M)=g(P,M)+\frac{1}{4\pi r}$

Получим: $u(M)=\iint\limits_S\frac{\partial u(P)}{\partial n}G(P,M)d\sigma-\iint\limits_S u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n}d\sigma_P$

$G(P,M)$ - функция Грина внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа.

Определение: Функцией Грина задачи Неймана для уравнения Лапласа называется $G(P,M)$, обладающие следующими свойствами:

1) Является всюду гармонической в области D, за исключением точки $P=M$, в которой обращается в бесконечность, имеет непрерывную первую производную вплоть до границы.

2) Допускает представление $G(P,M)=g(P,M)+\frac{1}{4\pi r}$, где $g(P,M)$ - гармоническая в D и непрерывно дифференцируемая вплоть до границы.

3) $\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{P\in S}=-\frac{1}{|S|}$

$|S|$ - площадь поверхности S.

Последнее условие диктуется следующим:

Так как g - гармоническая в D, то

$$\iint\limits_S\frac{\partial g(P,M)}{\partial n}d\sigma_P=0$$

Тогда необходимо, чтобы

$$\iint\limits_S\frac{\partial G(P,M)}{\partial n}d\sigma_P-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma=0$$

Значение второго слагаемого не трудно получить. Действительно, применим третью формулу Грина к функции $u\equiv 1$:

Она является решением:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u\big|_S = 1 \end{cases}$$

$$1 = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial n} - 1\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right] d\sigma$$

$$1 = -\frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma$$

$$\iint_S \frac{\partial G(P,M)}{\partial n} d\sigma_P + 1 = 0$$

$$-\frac{1}{|S|}\iint_S d\sigma_P + 1 = 0$$

Используя функцию Грина, решение задачи Неймана для уравнения Лапласа можно представить в виде:

$$(8)\quad u(M) = \iint_S \psi(P) G(P,M)\, d\sigma_P + \frac{1}{|S|}\iint_S u(P)\, d\sigma_P$$

Решение задачи Неймана (8) включает в качестве второго слагаемого среднее значение неизвестной функции по границе. Однако, так как решение задачи Неймана определяется с точностью до постоянного слагаемого, подбором этой постоянной можно придать среднему значению любое заданное значение.

Не трудно показать, что функция Грина внутренней задачи Неймана не является симметричной.

39.Применение метода функций Грина к решению краевых задач для уравнения эллиптического типа (решение внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге).

Пример2: Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле для шара радиуса R:

$$(1)\quad \Delta u(M)=0,\ x^2+y^2+z^2<R^2$$

$$(2)\quad u\big|_{x^2+y^2+z^2=R^2}=\varphi(M)$$

Построим функцию Грина для шара радиуса R, поместим начало координат в центр шара.

Выберем внутри шара произвольную точку $M(x,y,z)$. Проведем инверсию точки M относительно сферы и получим точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$.

$$\left|OM\right|=\rho$$

$$\left|OM_1\right|=\rho_1$$

$$(*)\quad \rho\rho_1=R^2$$

$$\text{Åñëè}\ \ \rho\in S\Rightarrow \left|OP\right|=R$$

$$\left|PM\right|=r,\ \left|PM_1\right|=r_1$$

$$\Delta OMP\sim\Delta OPM_1$$

Действительно, из (*): $\dfrac{\rho}{R}=\dfrac{R}{\rho_1}$.

Тогда

$$(**)\quad \frac{r}{r_1}=\frac{\rho}{R}\ \Rightarrow\ \frac{1}{r}=\frac{R}{\rho}\cdot\frac{1}{r_1}$$

Тогда функцию Грина можно представить следующим образом:

$$(***)\quad G(P,M)=\frac{1}{4\pi r}-\frac{R}{4\pi\rho}\cdot\frac{1}{r_1}$$

Используя (***) и формулу Пуассона (7), построим решение внутренней задачи Дирихле для шара. Для этого найдем $\dfrac{\partial G}{\partial n}$:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right)\cos(\xi,n)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{r}\right)\cos(\eta,n)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{r}\right)\cos(\zeta,n)=$$

$$=-\frac{1}{r^2}\left[\frac{(\xi-x)}{r}\cos(\xi,n)+\frac{(\eta-y)}{r}\cos(\eta,n)+\frac{(\zeta-z)}{r}\cos(\zeta,n)\right]=$$

$$=-\frac{1}{r^2}\left[\cos(\xi,r)\cos(\xi,n)+\cos(\eta,r)\cos(\eta,n)+\cos(\zeta,r)\cos(\zeta,n)\right]=$$

$$=-\frac{1}{r^2}\cos(r,n)$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\cos(r,n)}{r^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right)=-\frac{\cos(r,n)}{r_1^2}$$

Из $\triangle OMP$:(по теореме косинусов)

$$\rho^2=R^2+r^2-2Rr\cos(r,n)$$

$$\cos(r,n)=\frac{R^2+r^2-\rho^2}{2Rr}$$

Из $\triangle OM_1P$:

$$\cos(r_1,n)=\frac{R^2+r_1^2-\rho_1^2}{2Rr_1}$$

Подставим в формулу:

$$\frac{\partial G}{\partial n}=-\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{R^2+r^2-\rho^2}{2r^3R}+\frac{R}{4\pi\rho}\cdot\frac{R^2+r_1^2-\rho_1^2}{2Rr_1^3}$$

Преобразуем второе слагаемое, воспользовавшись (*) и (**):

$$\frac{\partial G}{\partial n}=-\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{R^2+r^2-\rho^2}{2r^3R}+\frac{1}{4\pi\rho}\cdot\frac{1+\frac{r^2}{\rho^2}-\frac{R^2}{\rho^2}}{2\frac{Rr^3}{\rho^2}}=\frac{1}{4\pi R}\cdot\frac{\rho^2-R^2}{r^3}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial G}{\partial n}=\frac{1}{4\pi R}\cdot\frac{\rho^2-R^2}{r^3}$$

Подставив в (7), будем иметь: (решение задачи Дирихле)

$$(9)\quad u(M)=\frac{1}{4\pi R}\iint_{S_R}\varphi(P)\frac{R^2-\rho^2}{r^3}d\sigma_P$$

Формула (9) – формула Пуассона:

$\text{При } M\to N,\ N\in S:\ u(M)\to\varphi(N)$.

Покажем, что в случае, когда $\varphi(M)$ является непрерывной на $S_R\left(\varphi(M)\in C_{S_R}\right)$, формула (9) описывает решение внутренней задачи Дирихле (1),(2):

$$(1)\quad \Delta u(M)=0,\ x^2+y^2+z^2<R^2$$

$$(2)\quad u\big|_{x^2+y^2+z^2=R^2}=\varphi(M)$$

$$M(x,y,z),\ P(\xi,\eta,\zeta),\ r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$

Покажем, что правая часть (9) удовлетворяет условию Лапласа.

Покажем, что $\Delta u(M)=0$:

$$\Delta u(M)=\frac{1}{4\pi R}\iint_{S_R}\varphi(P)\Delta\left(\frac{R^2-\rho^2}{r^3}\right)d\sigma_P$$; прибавим и вычтем $\frac{1}{r}$

$$\Delta\left(\frac{R^2-\rho^2+r^2}{r^3}\right)-\Delta\left(\frac{1}{r}\right)\overset{|\times \text{ и } \div \text{ на } 2R|}{=}\Delta\left(\frac{2R}{r^2}\cdot\frac{R^2-\rho^2+r^2}{2Rr}\right)=$$

$$=\left|-\frac{1}{r^2}\cos(r,n)=\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right|=-2R\Delta\left(\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right)=-2R\frac{\partial}{\partial n}\left(\Delta\left(\frac{1}{r}\right)\right)=0$$

Покажем далее, что $\forall N\in S_R$, при $M\to N$ и $u(M)\to\varphi(N)$, то есть функция удовлетворяет граничным условиям.

Выберем на поверхности сферы произвольную точку N.

Заметим, что для $\varphi\equiv 1$ формула (9) принимает вид:

$$1=\frac{1}{4\pi R}\iint_{S_R}\frac{R^2-\rho^2}{r^3}d\sigma$$

Оценим:

$$u(M)-\varphi(N)=\left|\text{при } M\to N\right|=\left|\text{по формуле Пуассона}\right|=$$

$$=\frac{1}{4\pi R}\iint_{S_R}\varphi(P)\frac{R^2-\rho^2}{r^3}d\sigma-\frac{\varphi(N)}{4\pi R}\iint_{S_R}\frac{R^2-\rho^2}{r^3}d\sigma=$$

$$=\frac{1}{4\pi R}\iint_{S_R}\left[\varphi(P)-\varphi(N)\right]\frac{R^2-\rho^2}{r^3}d\sigma$$

Проведем из выбранной точки N шар радиуса $2\delta,\ \delta>0$.

Обозначим часть поверхности S_R, попавшей внутрь шара через σ

$$\left|\frac{1}{4\pi R}\iint_{S_R}\left[\varphi(P)-\varphi(N)\right]\frac{R^2-\rho^2}{r^3}d\sigma\right|\le$$

$$\le\frac{1}{4\pi R}\iint_{\sigma}\left|\varphi(P)-\varphi(N)\right|\frac{R^2-\rho^2}{r^3}d\sigma+\frac{1}{4\pi R}\iint_{S_R\setminus\sigma}\left|\varphi(P)-\varphi(N)\right|\frac{R^2-\rho^2}{r^3}d\sigma$$

Будем оценивать слагаемые по отдельности.

В силу непрерывности функции φ:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta:\left|PN\right|<2\delta\Rightarrow\left|\varphi(P)-\varphi(N)\right|<\frac{\delta}{2}$$

Тогда:

$$\frac{1}{4\pi R}\iint_{\sigma}\left|\varphi(P)-\varphi(N)\right|\frac{R^2-\rho^2}{r^3}d\sigma<\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{4\pi R}\iint_{\sigma}\frac{R^2-\rho^2}{r^3}d\sigma=\frac{\varepsilon}{2}$$

Для оценки второго слагаемого, проведем из точки M еще один шар радиуса δ, и будем считать, что в своем стремлении к N, M находится внутри малого шара, то есть $\left|MN\right|\le\delta$

$$\frac{1}{4\pi R}\iint_{S_{R/\sigma}}\left|\varphi(P)-\varphi(N)\right|\frac{R^2-\rho^2}{r^3}d\sigma\le$$

$$\le\left|\text{оценим интеграл, заменив знаменатель меньшим}\right|\le$$

$$\le\frac{R^2-\rho^2}{4\pi R\delta^3}\iint_{S_{R/\sigma}}\left|\varphi(P)-\varphi(N)\right|d\sigma\le\left|\begin{matrix}\text{в силу непрерывности } \varphi\\ \left|\varphi(P)-\varphi(N)\right|\le k=const\end{matrix}\right|\le$$

$$\le\frac{kR\left(R^2-\rho^2\right)}{\delta^3}<\frac{\varepsilon}{2}$$

Устремим $M\to N\Rightarrow R^2-\rho^2\to 0$

$\left|u(M)-\varphi(N)\right|<\varepsilon$

$u(M)\to\varphi(N),\ M\to N$

<u>Замечание1:</u> Представим (9) в сферической системе координат.

Обозначим угловые координаты точки P: $P(\psi',\theta')$.

Тогда:

$$(9')\quad u(\rho,\psi,\theta)=\frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\varphi(\psi',\theta')\sin\theta'\left(R^2-\rho^2\right)d\theta'd\psi'}{\left(R^2+\rho^2-2R\rho\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}};\ \gamma=\left(\widehat{\vec{OM},\vec{OP}}\right)$$

<u>Замечание2:</u> Решение внутренней задачи Дирихле для круга описывается в виде интеграла Пуассона:

$$(9'') \quad u(\rho,\psi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\varphi(\psi')\left(R^2 - \rho^2\right) d\psi'}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\psi - \psi')}.$$

40.Неравенство Гарнака.

<u>Следствие1:</u> Рассмотрим функцию $u(M)$ - гармоническую в D и всюду положительную: $u(M)>0,\ M\in D$.

Возьмем произвольную точку $M_0\in D$. Проведем из нее шар радиуса R, целиком лежащий в D и выберем другую произвольную точку М, лежащую в шаре.

Для функции $u(M)$ справедливо представление:

$$u(M)=\frac{1}{4\pi R}\iint\limits_{S_R}u(P)\frac{R^2-\rho^2}{r^3}d\sigma$$

Очевидно:

$$R+\rho\geq r\geq R-\rho;\ \frac{R-\rho}{(R+\rho)^2}\leq\frac{R^2-\rho^2}{r^3}\leq\frac{R+\rho}{(R-\rho)^2}$$

Умножим неравенство на $u(P)$ и проинтегрируем все части неравенства на сфере:

$$\iint\limits_{S_R}u(P)\frac{R-\rho}{(R+\rho)^2}d\sigma\leq\iint\limits_{S_R}u(P)\frac{R^2-\rho^2}{r^3}d\sigma\leq\iint\limits_{S_R}u(P)\frac{R+\rho}{(R-\rho)^2}d\sigma$$

Поделим на $4\pi R$ и рассмотрим правое соотношение:

$$\frac{R(R+\rho)}{(R-\rho)^2}\cdot\frac{1}{4\pi R}\iint\limits_{S_R}u(P)d\sigma=\left|\text{ï î ò åî ðåì åî ñðåäí åì}\right|=\frac{R(R+\rho)}{(R-\rho)^2}u(M_0)$$

$$(10)\quad \frac{R(R-\rho)}{(R+\rho)^2}u(M_0)\leq u(M)\leq\frac{R(R+\rho)}{(R-\rho)^2}u(M_0)$$

Неравенство (10) – неравенство Гарнака.

41.Функция, гармоническая во всем пространстве.

<u>Теорема:</u> Функция, гармоническая во всем пространстве, тождественно равна нулю.

<u>Доказательство:</u>

Пусть $u(M)$ - функция гармоническая во всем пространстве.

Проведем сферу из начала координат радиуса R, u - будет гармонической вне шара.

Тогда ее можно представить формулой Пуассона для внешней задачи Дирихле в точке на поверхности:

$$u(M) = \frac{1}{4\pi R} \iint\limits_{S_R} u(P) \frac{\rho^2 - R^2}{r^3} d\sigma$$

Из $\triangle OMP$: $R > \rho - r$

Выберем радиус сферы настолько большой

$$\text{Если } \rho > 2R, \text{ то } r > \frac{\rho}{2}$$

$$|u(M)| = \frac{1}{4\pi R} \iint\limits_{S_R} |u(P)| \frac{\rho^2 - R^2}{r^3} d\sigma_P \leq \frac{1}{4\pi R} \cdot \frac{8\rho^2 k}{\rho^3} \sim \frac{A}{\rho} \xrightarrow{\rho\to\infty} 0$$

С другой стороны, u – гармоническая и в шаре:

$$u(M) = \frac{1}{4\pi R} \iint\limits_{S_R} u(P) \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} d\sigma$$

$$R \gg 1; \ |u(P)| < \varepsilon, \ P \in S_R$$

$$|u(M)| \leq \varepsilon \frac{1}{4\pi R} \iint\limits_{S_R} \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} d\sigma$$

$$|u(M)| < \varepsilon \ \Rightarrow \ u(M) \equiv 0$$

42.Ограниченная функция, гармоническая в любой конечной области.

Теорема: (Лиувилля) Функция, гармоническая в любой конечной области и ограниченная сверху или снизу, является постоянной.

Доказательство:

Пусть функция $u(M)$ - гармоническая в любой конечной области.

Пусть функция *u(M)* – гармоническая в любой конечной области.

Если $u(M)\geq C,\ C=const,$ то $-u(M)\leq -C$

Если *u(M)* ограничена снизу, то *u(M)-C≥0*.

Рассмотрим ограниченную снизу:

$u(M)>0$ - гармоническая в любой конечной области.

Зафиксируем произвольную точку M и проведем из начала координат сферу радиуса R так, чтобы M лежала внутри шара.

u - гармоническая в шаре.

Тогда, для нее справедливо неравенство Гарнака:

$$\frac{R(R-\rho)u(0)}{(R+\rho)^2}\leq u(M)\leq\frac{R(R+\rho)u(0)}{(R-\rho)^2}$$

Устремим $R\to\infty$:

$u(0)\leq u(M)\leq u(0)$

В силу произвольности выбора M :

$u(M)\equiv u(0)=const$.

44.Применение метода Фурье к решению краевых задач для уравнений эллиптического типа (решение внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0;\ x^2+y^2<a^2$$

$$u\big|_{x^2+y^2=a^2}=f_1(x,y)$$

Перейдем к задаче в полярных координатах:

$$x=\rho\cos\varphi,\quad 0\le\rho\le \mathrm{a}$$

$$y=\rho\sin\varphi,\quad 0\le\varphi\le 2\pi$$

$$u(x,y)=u(\rho,\varphi)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$$

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$$

(2) $u(a,\varphi)=f(\varphi)$, (f - должна быть периодической по φ: $f(\varphi)=f(\varphi+2\pi n),n\in Z$)

(3) $u(\rho,\varphi+2\pi n)=u(\rho,\varphi)$

Найдем все нетривиальные решения (1), удовлетворяющие условию (3).
Будем искать u в виде:

$$u(\rho,\varphi)=R(\rho)\Phi(\varphi)$$

Подставим искомый вид в (1) и (3):

$$R''(\rho)\Phi(\varphi)+\frac{1}{\rho}R'(\rho)\Phi(\varphi)+\frac{1}{\rho^2}R(\rho)\Phi'(\varphi)=0$$

Разделим на $u\not\equiv 0$, и на ρ^2:

$$\frac{\rho^2R''(\rho)}{R(\rho)}+\rho\frac{R'(\rho)}{R(\rho)}+\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{\rho^2R''(\rho)}{R(\rho)}+\rho\frac{R'(\rho)}{R(\rho)}=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\lambda^2$$

Условие периодичности:

$$\cancel{R(\rho)}\Phi(\varphi)=\cancel{R(\rho)}\Phi(\varphi+2\pi n)$$

Получим:

(4) $\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)-\lambda^2R(\rho)=0$

$$\begin{matrix}(5)\\(6)\end{matrix}\quad\begin{cases}\Phi''(\varphi)+\lambda^2\Phi(\varphi)=0\\ \Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi n),n\in Z\end{cases}$$

Рассмотрим задачу (5), (6).
При $\lambda=0$:

$$\Phi''(\varphi)=0$$

$$\left.\begin{matrix}\Phi_0=c_1\varphi+c_2\\ \Phi_0(\varphi+2\pi n)=c_1\varphi+c_12\pi n+c_2\end{matrix}\right.\quad\Rightarrow\quad c_1=0$$

$$\Phi_0=c_0=const$$

При $\lambda\ne 0$:

$$\Phi(\varphi)=c_1\cos\lambda\varphi+c_2\sin\lambda\varphi$$

$\Phi(\varphi+2\pi n)=c_1\cos(\lambda\varphi+\lambda 2\pi n)+c_2\sin(\lambda\varphi+\lambda 2\pi n)$

$\lambda=k=\pm 1,\pm 2$

$\Phi_k=c_k\cos k\varphi+\alpha_k\sin k\varphi$

Рассмотрим уравнение (4) – уравнение с переменными коэффициентами.

Введем замену: $t=\ln\rho$

$R(\rho)=y(t)$

$$R'(\rho)=y'(t)\cdot\frac{1}{\rho}$$

$$R''(\rho)=y''(t)\cdot\frac{1}{\rho^2}-y'(t)\cdot\frac{1}{\rho}$$

Подставим производные в уравнение:

$y''(t)-y'(t)+y'(t)-k^2y(t)=0$

$y''(t)-k^2y(t)=0$

$k=0:\quad y_0(t)=A_1t+A_0$

$k\neq 0:\quad y_k(t)=A_ke^{-kt}+B_ke^{kt}$

Вернемся к прежним переменным:

$R_0(\rho)=A_1\ln\rho+A_0$

$R_k(\rho)=A_k\rho^{-k}+B_k\rho^k$

В силу условия задачи (ищется функция непрерывная в круге): решение не должно иметь особенностей в нуле, то есть следует положить:

$A_1=0; A_k=0$

$R_0(\rho)=A_0$

$R_k(\rho)=B_k\rho^k$

Решение можно записать в виде ряда:

$$(7)\quad u(\rho,\varphi)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\left[C_k\cos k\varphi+D_k\sin k\varphi\right]$$

Неизвестные коэффициенты найдем из (2).

При $\rho=A$:

$$f(\varphi)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a^k\left[C_k\cos k\varphi+D_k\sin k\varphi\right]$$

По формулам для коэффициентов ряда Фурье, получим:

$$\left.\begin{aligned}
a_0&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\,d\varphi=\alpha_0\\
C_k&=\frac{1}{a^k\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos k\varphi d\varphi=\frac{\alpha_k}{a^k}\\
D_k&=\frac{1}{a^k\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin k\varphi d\varphi=\frac{\beta_k}{a^k}
\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

Таким образом, решение внутренней задачи Дирихле для круга принимает вид:

$$(9)\quad u(\rho,\varphi)=\alpha_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^k\left[\alpha_k\cos k\varphi+\beta_k\sin k\varphi\right]\ \Rightarrow$$

$$(\bar{9})\quad u(\rho,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^k\left[\alpha_k\cos k\varphi+\beta_k\sin k\varphi\right]$$

Замечание1: Внеся представление (8) в (9), поменяв порядок интегрирования и суммирования, и проделав ряд преобразований, можно получить записанную ранее формулу Пуассона для круга.

Замечание2: Нетрудно убедиться, что решение внешней задачи Дирихле для круга можно представить в виде:

$$(\bar{9})\quad u(\rho,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a}{\rho}\right)^{k}\left[\alpha_k\cos k\varphi+\beta_k\sin k\varphi\right].$$

45.Потенциал объёма. Свойства.

$$v(M)=\iiint\limits_D \frac{\rho(P)}{r}dV_p,\quad r=\left|\vec{MP}\right|$$

Пусть $\rho(P)$ – ограничена в D: $\left|\rho(P)\right|<c=const$, $P\in D$.

Очевидно, при $M\notin D$ потенциал объема является функцией непрерывной и непрерывно дифференцируемой произвольное число раз.
Нетрудно убедиться, что в этом случае потенциал объема является функцией гармонической.

Действительно: $\Delta v(M)=\iint\limits_S \rho(p)\Delta\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma_P=0$.

Оценим характер поведения v на ∞.
Поместим начало координат внутрь области D.

$$R=OM>2d$$
$$r\ge R-\rho$$
$$r\ge\frac{R}{2}$$
$$\left|v(M)\right|\le\frac{2c}{R}\iiint\limits_D d\sigma_p=\frac{A}{R}\xrightarrow{R\to\infty}0$$

<u>**Теорема1:**</u> Если плотность $\left|\rho(P)\right|\le c$ и $\rho\in L_0$, то потенциал объема и его первые производные являются функциями непрерывными во всем пространстве. Производные могут быть получены непосредственным дифференцированием под интегралом.

<u>Доказательство:</u>

Рассмотрим произвольную точку $M_0\in D$.

Проведем область D_δ – окрестность точки M_0, где диаметр $d(D_\delta)<\delta$.

Покажем, что:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta(\varepsilon),\ \forall D_\delta,\ M\in D_\varepsilon\quad\left|\iiint\limits_{D_\delta}\frac{\rho(P)}{r}dV\right|<\varepsilon$$

Проведем из точки M_0 шар радиуса δ, обозначим K_δ.
Тогда:

$$(*)\quad \left|v(M)\right|_\delta=\left|\iiint\limits_{D_\delta}\frac{\rho(P)}{r}dV\right|\le\iiint\limits_{D_\delta}\left|\frac{\rho(P)}{r}\right|dV\le c\iiint\limits_{K_\delta}\frac{d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\le$$

$$\le\left|\text{Ï ðî âåäåì èç ò î ÷êè } M \text{ ø àð ðàäèóñà } 2\delta,\ \text{î áî çí à÷èì } K_{2\delta}\right|\le$$

$$\le c\iiint\limits_{K_{2\delta}}\frac{dV}{r}=c\int_0^{2\delta}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta}{r}r^2d\theta d\varphi dr=c\left.\frac{4\pi r^2}{2}\right|_0^{2\delta}=8c\pi\delta^2<\varepsilon$$

Тогда должно выполняться: $\delta<\sqrt{\frac{\varepsilon}{8c\pi}}$

Значит, интеграл (*) является равномерно сходящимся в точке M_0 и определяет в ней функцию непрерывную. В силу произвольности выбора M_0, потенциал объема непрерывен во всех точках области D.
Обозначим:

$$X(M)=\frac{\partial}{\partial x}\iiint\limits_D\frac{\rho(P)}{r}dV_p=\iiint\limits_D\rho(P)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dV=$$

$$=\left| r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2} \right| =-\iiint\limits_D \rho(P)\frac{(x-\xi)}{r^3}dV .$$

Оценим:

$$\left|\iiint\limits_{D_\delta}\rho(P)\frac{(x-\xi)}{r^3}dV\right| \le c\iiint\limits_{D_\delta}\frac{|x-\xi|}{r^3}dV \le c\iiint\limits_{K_\delta}\frac{dV}{r^2} \le c\iiint\limits_{K_{2\delta}}\frac{dV}{r^2} =$$

$$=c\int\limits_0^{2\delta}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin\theta r^2}{r^2}d\theta d\varphi dr = 8\pi\delta c < \varepsilon; \quad \delta < \frac{8\pi\varepsilon}{c}$$

Таким образом, $X(M)$ – есть функция непрерывная в M_0, так как она является сходящимся равномерным интегралом.

Покажем, что X – действительно производная v.

Рассмотрим:

$$\frac{v(x+\triangle x,y,z)-v(x,y,z)}{\triangle x}-X(M)\xrightarrow{\triangle x\to 0}0$$

Обозначим:

$M(x,y,z)$

$M_1(x+\triangle x,y,z)$

$|\triangle x|<\delta_1$

Проведем из точки M шар радиуса δ_2 и обозначим K_{δ_2}.

Представим область D как: $D=K_{\delta_2}\cup D\setminus K_{\delta_2}$.

$$\frac{1}{\triangle x}\iiint\limits_{D\setminus K_{\delta_2}}\rho(P)\left[\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right]dV-\iiint\limits_{D\setminus K_{\delta_2}}\rho(P)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dV+$$

$$+\frac{1}{\triangle x}\iiint\limits_{K_{\delta_2}}\left[\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right]dV-\iiint\limits_{K_{\delta_2}}\rho(P)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dV .$$

Будем считать, что M_0 лежит внутри шара: $M_0\in K_{\delta_2}$.

Тогда: $\lim\limits_{x\to 0}\iiint\limits_{D\setminus K_{\delta_2}}\frac{\rho(P)}{\triangle x}\left[\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right]dV=X(M)$.

Значит, $\forall\varepsilon \ \exists\delta_1$: $\left|\iiint\limits_{D\setminus K_{\delta_2}}\frac{\rho(P)}{\triangle x}\left[\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right]dV-X(M)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$.

Рассмотрим вторую разность, ее модуль не превосходит суммы модулей интегралов.

Оценим:

$$\left|\iiint\limits_{D\setminus K_{\delta_2}}\frac{1}{\triangle x}\left[\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right]dV\right| \le \iiint\limits_{K_{\delta_2}}\frac{|\rho(P)|}{|\triangle x|}\frac{|r-r_1|}{r_1 r}dV \le c\iiint\limits_{K_{\delta_2}}\frac{dV}{r_1 r} \le \frac{c}{2}\left[\iiint\limits_{K_{\delta_2}}\frac{dV}{r_1^2}+\iiint\limits_{K_{\delta_2}}\frac{dV}{r^2}\right] =$$

$$=\frac{c}{2}\left[\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta d\varphi dr+\iiint\limits_{K_{\delta_2}}\frac{dV}{r_1^2}\right] \le \frac{c}{2}\left[4\pi\delta_2+8\pi\delta_2\right]=6\pi c\delta_2<\frac{\varepsilon}{3}, \quad \delta_2<\frac{\varepsilon}{18\pi c}$$

Ранее было получено: $\left|\iiint\limits_{K_{\delta_2}}\rho(P)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dV\right| \le c4\pi\delta_2<\frac{\varepsilon}{3}$

Таким образом,

(**) $\left|\frac{v(x+\triangle x,y,z)-v(x,y,z)}{\triangle x}-X(M)\right|<\varepsilon$.

Таким образом, выбирая δ_1 и δ_2 соответствующим образом, из неравенства (**) следует, что соотношения, полученные формальным дифференцированием действительно определяют частные производные первого порядка потенциала объема.

<u>Теорема2:</u> Если плотность $\rho(P)$ непрерывна вплоть до границы и имеет непрерывные производные первого порядка в D, то потенциал объема имеет непрерывные вторые производные потенциала в D и (2) $\triangle v(\mathrm{M})=-4\pi\rho(M), \quad M\in D$
$\triangle v(\mathrm{M})=0, \quad M\notin D$

<u>Доказательство:</u> возьмем в области D произвольную точку M_0. Проведем из тоски M_0 шар радиуса δ, обозначим K_δ.

Обозначим: $D_1=D\setminus K_\delta$

Будем считать, что $M\in K_\delta$

$$v(M)=\iiint\limits_{K_{\delta_2}}\frac{\rho(P)}{r}dV_p+\iiint\limits_{D_1}\frac{\rho(P)}{r}dV_p$$

$$\frac{\partial v(M)}{\partial x}=\iiint\limits_{K_\delta}\rho(P)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dV_p+\iiint\limits_{D_1}\rho(P)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dV$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right),\ r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2},$$

$$\frac{\partial v(M)}{\partial x}=-\iiint\limits_{K_\delta}\rho(P)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right)d\xi d\eta d\zeta+\iiint\limits_{D_1}\rho(P)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dV_p=$$

$$=\iiint\limits_{D_1}\rho(P)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dV_p+\iint\limits_{S_\delta}\rho(P)\frac{\cos(n,\zeta)}{r}d\sigma_p-\iiint\limits_{K_\delta}\frac{\partial\rho}{\partial\zeta}\frac{dV}{r}\qquad(***)$$

Первое слагаемое имеет непрерывные производные любого порядка.

Второе слагаемое также имеет непрерывные производные $(M\notin S_\delta)$.

Обозначим: $\frac{\partial\rho}{\partial\zeta}=\mu(M)\in C_D$.

Третье слагаемое можно рассмотреть как потенциал объема с плотностью $\mu(M)$, непрерывной в D. Тогда по теореме 1, третье слагаемое имеет непрерывные производные первого порядка в D. Таким образом, из (***) ⇒ , что (1) имеет непрерывные производные второго порядка в D.

$$\frac{\partial^2 v(M)}{\partial x^2}=\iiint\limits_{D_1}\rho(P)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)dV-\iint\limits_{S_\delta}\frac{\rho(P)\cos(n,\xi)(x-\xi)d\sigma_p}{r^3}+$$

$$+\iiint\limits_{K_\delta}\frac{\mu(P)(x-\xi)}{r^3}dV\qquad(****)$$

Аналогично, находятся вторые производные по y и z.

Очевидно: $\iiint\limits_{D_1}\rho(P)\triangle\left(\frac{1}{r}\right)dV=0$.

Оценим третье слагаемое в (****):

$$\left|\iiint\limits_{K_\delta}\frac{\mu(P)(x-\xi)}{r^3}dV\right|\le D_1\iiint\limits_{K_\delta}\frac{dV}{r^2}=D_1\int_0^\delta\int_0^{2\pi}\int_0^\pi\sin\theta d\theta d\varphi dr=D_1 4\pi\delta\xrightarrow{\delta\to 0}0$$

Рассмотрим:

$$\iint\limits_{S}\frac{\rho(P)\left[\cos(n,\xi)(x-\xi)+\cos(n,\eta)(y-\eta)+\cos(n,\zeta)(z-\zeta)\right]d\sigma}{r^3}=$$

$$=\iint\limits_{S_\delta}\frac{\rho(P)}{r^2}\left[\cos(n,\xi)\frac{(x-\xi)}{r}+\cos(n,\eta)\frac{(y-\eta)}{r}+\cos(n,\zeta)\frac{(z-\zeta)}{r}\right]d\sigma=$$

$$=\iint\limits_{S_\delta}\frac{\rho(P)}{r^2}\left[\cos(n,\xi)\cos(r,\xi)+\cos(n,\eta)\cos(r,\eta)+\cos(n,\zeta)\cos(r,\zeta)\right]d\sigma=$$

$$=\iint\limits_{S_\delta}\frac{\rho(P)}{r^2}\cos(n,r)d\sigma=\iint\limits_{S_\delta}\frac{\rho(P)}{r^2}d\sigma=\frac{1}{\delta^2}\iint\limits_{S_\delta}\rho(P)d\sigma=|\text{ï î ò. î ñðåäí åì}|=$$

$$=\frac{1}{\delta^2}\rho(N)4\pi\delta^2\xrightarrow{\delta\to 0}4\pi\rho(M)$$

Таким образом, $\triangle v(M)=-4\pi\rho(M)$

<u>Замечание:</u> Если в уравнении Пуассона: $\triangle u(M)=-f(M)$, $M\in D$, $f\in C_{\overline{D}}\cap C^1_D$, то уравнение имеет частное решение: $u(M)=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{D}\frac{f(p)}{r}dV$.

46.Поверхностные потенциалы, их свойства.

Пусть S - замкнутая поверхность в трехмерном пространстве.

Определение: S - поверхность Ляпунова, если:

1) В каждой точке поверхности существует определенная касательная плоскость.

2) Существует число $d>0$, одно и тоже для всех точек поверхности, что если провести к произвольной точке поверхности сферу радиуса d или меньше, то сфера делит поверхность на две части: внутри и вне сферы, и прямые, параллельные нормали в N_0, пересекают часть поверхности, лежащую внутри сферы не более одного раза.

3) Пусть N_1 и N_2 - произвольные точки поверхности, r_{12} - расстояние между ними, $\theta=\left(\widehat{\overline{n_1},\overline{n_2}}\right)$, существуют $a>0$ и $0<\alpha\le 1$ такие, что $\theta\le a r_{12}^{\alpha}$

В дальнейшем будем рассматривать потенциалы с плотностями, распределенными по поверхностям Ляпунова.

$$(1)\quad u(M)=\iint_S \frac{\rho(P)}{r}d\sigma_P$$ - потенциал простого слоя;

$$(2)\quad w(M)=-\iint_S \mu(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma_P$$ - потенциал двойного слоя;

Рассмотрим потенциал двойного слоя (2).

Если $M\notin S$, то w является непрерывной и дифференцируемой любое число раз. Нетрудно показать, что он определяет функцию гармоническую вне поверхности S.

Можно показать, что потенциал двойного слоя определен во всех точках пространства.

Пусть $M=M_0\in S$.

Тогда значение:

$$w(N_0)=\iint_S \mu(P)\frac{\cos\left(\overline{r_0},\overline{n}\right)}{r^2}d\sigma_P$$ - называется прямым значением потенциала двойного слоя.

Пусть $M\notin S,\ M\to N_0,\ N_0\in S$

Если при этом $\lim\limits_{M\to N_0} w(M)=C<\infty$ - конечное значение, то его называют предельным значением конечного потенциала двойного слоя.

Аналогично определяется внутренний предел значения: $w_i(N_0)$.

Теорема (О разрывности потенциала двойного слоя):

Если плотность потенциала двойного слоя μ является непрерывной на S, то предельное значение потенциала двойного слоя существует, причем имеют место следующие свойства:

$$w_i(N_0)=w(N_0)+2\pi\mu(N_0)$$
$$w_e(N_0)=w(N_0)-2\pi\mu(N_0)$$
$$w_i(N_0)-w_e(N_0)=4\pi\mu(N_0)$$

Итак, потенциал двойного слоя разрывен.

Замечание: В случае непрерывной плотности, потенциал двойного слоя равномерно стремится к своим предельным значениям извне и изнутри.

Рассмотрим потенциал простого слоя (1).

Если $M\notin S$.

Теорема: Потенциал простого слоя с непрерывной плотностью есть функция непрерывная во всем пространстве.

Доказательство:

Очевидно при $M \notin S$.
Рассмотрим произвольные точки поверхности $N_0 \in S$.
Построим в ней локальную систему координат.
Проведем из N_0 сферу радиуса δ.
Обозначим:
δ_1 - часть поверхности внутри сферы
σ_1 - проекция σ на плоскость
Выберем произвольную точку M внутри сферы.
Обозначим M' - проекция на $XY; M' \in G_1'; |M'N_0| \le \delta$
Оценим:

$$\left|\iint\limits_{\sigma_1} \frac{\rho(P)}{r} d\sigma\right| \le A \iint\limits_{\sigma_1} d\sigma = \left| \begin{matrix} d\gamma = \dfrac{d\xi d\eta}{\cos\gamma}; r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \le \\ \le \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} = \rho_1 \end{matrix} \right| =$$

$$= A \iint\limits_{\sigma_1} \frac{d\xi d\eta}{r\cos\gamma} \le A \iint\limits_{\sigma_1} \frac{d\xi d\eta}{\rho_1 \cos\gamma} \le \left| \begin{matrix} \text{будем считать, что } \delta \text{ настолько} \\ \text{мал, что } \cos\gamma > \dfrac{1}{r} \end{matrix} \right| \le$$

$$\le 2A \iint\limits_{\sigma_1} \frac{d\xi d\eta}{\rho_1} \le 2A \int\limits_0^{2\delta} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho_1 d\varphi d\rho}{\rho_1} = 8A\pi\delta < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon \quad \exists \delta \le \frac{\varepsilon}{8A\pi}$$

Таким образом, интеграл (1) сходится в произвольной точке поверхности N_0 и определяет в ней непрерывную функцию.
Можно показать, что потенциал простого слоя имеет прямые значения нормальной производной на поверхности S, $M_0 \in S$.

$$\frac{\partial u(N_0)}{\partial n} = \iint\limits_S \rho(P) \frac{\cos(r_0, n)}{r_0^2} d\sigma$$

Аналогично, предельным значение потенциала двойного слоя определяется предельное значение нормальной производной потенциала простого слоя.
<u>Теорема:</u> Пусть $\rho(P) \in C_S$. Тогда потенциал простого слоя имеет предельные нормальные производные изнутри и извне, причем:

$$(4) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_i &= \iint\limits_S \rho(P) \frac{\cos(r_0, n_0)}{r_0^2} d\sigma + 2\pi\rho(N_0) \\ \left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_e &= \iint\limits_S \rho(P) \frac{\cos(r_0, n_0)}{r_0^2} d\sigma - 2\pi\rho(N_0) \end{aligned}$$

47.Сведение краевых задач для уравнения Лапласа к интегральным уравнениям.

Рассмотрим область D трехмерного пространства, ограниченного поверхность Ляпунова. Рассмотрим внутреннюю и внешнюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа.

$\mathrm{R}^3 \setminus D = E$

(I) $\Delta u(M) = 0,\ M \in D$ – внутренняя задача Дирихле.

$u|_S = f(M),\ M \in S$.

(II) $\Delta u(M) = 0,\ M \in E$ – внешняя задача Дирихле.

$u|_S = f(M),\ M \in S,$

Рассмотрим также:

(III) $\Delta u(M) = 0,\ M \in E$ – внутренняя задача Неймана.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = g(M),\ M \in S,$$

(IV) $\Delta u(M) = 0,\ M \in E$ – внешняя задача Неймана.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = g(M),\ M \in S$$

Будем искать решение задачи Дирихле в виде потенциала двойного слоя с неизвестной плотностью:

$u(M) = \iint\limits_S \mu(P)\frac{\cos(r,n)}{r^2}d\sigma$ (для I-II)

Рассмотрим (I). Функция гармоническая $M_0 \in S$:

$u_i(M_0) = f(M_0)$, по теореме о разрывности потенциала двойного слоя:

$r_0 = M_0P$

$\iint\limits_S \mu(P)\frac{\cos(r_0,n)}{r_0^2}d\sigma + 2\pi\mu(M_0) = f(M_0)$ (:) (2π)

$$\mu(M_0) + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \mu(P)\frac{\cos(r_0,n)}{r_0^2}d\sigma = \frac{f(M_0)}{2\pi} \qquad \text{(I*)}$$

Обозначим: $K(M_0,P) = -\dfrac{\cos(r_0,n)}{2\pi r_0^2}$

Тогда для (I): $\lambda = 1$; $f_1 = \dfrac{f(M_0)}{2\pi}$

Напомним: $\varphi(M_0) - \lambda\iint\limits_S K(M_0)\varphi(P)d\sigma = f_1 M_0$

Рассмотрим (II).

Для нее справедливо, т.к. u –функция гармоническая на бесконечности: $u_e(M_0) = f(M_0),\quad M_0 \in S$.

По теореме о разности потенциала двойного слоя:

$\iint\limits_S \mu(P)\frac{\cos(r_0,n)}{r_0^2}d\sigma - 2\pi\mu(M_0) = f(M_0)$ (:) $\left(-\dfrac{1}{2\pi}\right)$

$$\mu(M_0) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \mu(P)\frac{\cos(r_0,n)}{r_0^2}d\sigma = -\frac{f(M_0)}{2\pi} \qquad \text{(II*)}$$

Рассмотрим (III) - (IV).

Будем искать решение задач $(\mathrm{III})-(\mathrm{IV})$ в виде решения задач простого слоя с неизвестной плотностью.

Рассмотрим (III).

$$u(M)=\iint\limits_S \frac{\rho(P)}{r}d\sigma_P\text{ , } M_0\in S$$

$$\left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_i=f(M_0)$$

По теореме о разрывности потенциала простого слоя:

$$\iint\limits_S \rho(P)\frac{\cos(r_0,n_0)}{r_0^2}d\sigma_p+2\pi\rho(M_0)=f(M_0)$$

Обозначим: $K(M_0,P)=\dfrac{\cos(r_0,n_0)}{2\pi r_0^2}$

Тогда: $\rho(M_0)+\dfrac{1}{2\pi}\iint\limits_S \rho(P)\dfrac{\cos(r_0,n_0)}{r_0^2}d\sigma_p=\dfrac{g(M_0)}{2\pi}\quad (\mathrm{III}^*)$

Тогда: $\lambda=-1;\quad f_1=\dfrac{g}{2\pi}$.

Аналогично для (IV):

$$M_0\in S:\quad \left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial u}\right)_e=g(M_0)$$

$$\rho(M_0)-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \rho(P)\frac{\cos(r_0,n_0)}{r_0^2}d\sigma_p=-\frac{g(M_0)}{2\pi}\quad (\mathrm{VI}^*).$$

Тогда: $\lambda=1;\quad f_1=-\dfrac{g}{2\pi}$.

Легко видеть, что: $K^*(M_0,P)=K(M_0,P)$

$K^*(M_0,P)=\overline{K(M_0,P)}$, т.к. ядра вещественные, то сопряжения не будет.

$$K^*(M_0,P)=-\frac{1}{2\pi}\frac{\cos(180-(\widehat{r_0,n_0}))}{r_0^2}=\frac{\cos(r_0,n_0)}{2\pi r_0^2}=K(M_0,P)$$

Тогда для уравнений: (I^*) и (IV^*), (II^*) и (III^*)

$K^*(M_0,P)=K(M_0,P)$.

48.Интегральное преобразование Фурье (определение, свойства, пример применения преобразования Фурье к решению задач математической физики).

Пусть функция $K(\alpha,x)$ – известная функция своих аргументов и $f(x)$ – также известная функция, $x\in(a,b)$.

Функцию $(1)\quad I_f(\alpha)=\int_a^b K(\alpha,x)f(x)dx$ будем называть интегральным преобразованием $f(x)$ на интервале (a,b), при этом $K(\alpha,x)$ – ядро интегрального преобразования (при этом считается, что интеграл сходится).

Если в выражении (1) $I_f(\alpha)$ считать известной, а $f(x)$ – неизвестной, то при определенных условиях можно получить решение интегрального уравнения (1):

$$(2)\quad f(x)=\int_c^d K(\alpha,x)I_f(\alpha)d\alpha$$

Говорят, (2) – дает обратное к (1) интегральное преобразование, или обращение (1).

Если в выражении (1): $(a,b)=(-\infty;+\infty)$, $K(\alpha,x)=e^{i\alpha x}$, то речь идет об интегральном преобразовании Фурье: $(\bar{1})\quad F(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\alpha x}dx$.

Ядро может быть: $K(\alpha,x)=e^{-i\alpha x}$, но это не принципиально.

Комплексное преобразование Фурье существует далеко не для всех функций. Очевидно, для существования преобразования Фурье для функции $f(x)$ необходимо, чтобы она была определена на всей числовой оси $(x\in R)$ и $f(x)\in L_{(-\infty;\infty)}$.

Если для функции $f(x)$ существует преобразование Фурье $(\bar{1})$, то обращение его можно определить как:

$$(\bar{2})\quad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha$$, т.е. ядро: $\frac{e^{-i\alpha x}}{2\pi}$.

Преобразование Фурье может иметь множитель $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ (симметричное).

Очевидно, $F(\alpha)\to 0,\quad |\alpha|\to\infty$.

Свойства преобразования Фурье:

1) $F(\alpha)\to 0,\quad |\alpha|\to\infty$

2) $\int_{-\infty}^{\infty}\left[c_1f(x)+c_2g(x)\right]e^{i\alpha x}dx=c_1\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\alpha x}dx+c_2\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{i\alpha x}dx$

3) $F^{(n)}(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^nf(x)}{dx^n}e^{i\alpha x}dx=(-i\alpha)^nF(\alpha)$

<u>Рассмотрим</u>:

$$F^{(1)}=\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)e^{i\alpha x}=\underbrace{f(x)e^{i\alpha x}\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{0}-i\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\alpha x}dx=-i\alpha F(\alpha)$$

Рассмотрим преобразование Фурье производных разрывной функции:

Пусть функция $f(x)$ имеет вид: $-f(x_0+0)+f(x_0-0)=f_0$

Обозначим: $F(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\alpha x}dx$

Найдем: $F^{(1)}(\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{i\alpha x}dx=\left|\begin{matrix}\text{по свойству}\\ \text{опред-ого интегр.}\end{matrix}\right|=\int\limits_{-\infty}^{x_0} f'(x)e^{i\alpha x}dx+\int\limits_{x_0}^{\infty} f'(x)e^{i\alpha x}dx=$

$$=f(x)e^{i\alpha x}\Big|_{-\infty}^{x_0}-i\alpha\int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x)e^{i\alpha x}dx+f(x)e^{i\alpha x}\Big|_{x_0}^{-\infty}-i\alpha\int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx=$$

$$=-i\alpha F(\alpha)+f(x_0-0)e^{i\alpha x_0}-f(x_0+0)e^{i\alpha x_0}=f_0e^{i\alpha x_0}-i\alpha F(\alpha)$$

Аналогично можно записать для n-ой производной:

$F^{(n)}(\alpha)=(-i\alpha)^n F(\alpha)+e^{i\alpha x_0}\left[f_0^{(n-1)}-i\alpha f_0^{(n-2)}...+(i\alpha)^{n-1}f_0\right]$,

Где $f_0^{(k)}=-\dfrac{\partial f^k(x_0+0)}{\partial x^k}+\dfrac{\partial f^k(x_0-0)}{\partial x^k}$

Свертка функций на интервале $(-\infty;+\infty)$:

$f(x)\cdot g(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy=\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y)f(x-y)dy$ (свертка симметрична)

4) Пусть $F(\alpha)$, $G(\alpha)$ – трансформанты Фурье для $f(x)$, $g(x)$ соответственно. Тогда обращение Фурье для произведения:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)G(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha=f\cdot g$$

Действительно если $F(\alpha)$ – Фурье образование f, то $F(\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{i\alpha y}dy$

Подставим вид F в левую часть:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\alpha)e^{i\alpha x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{i\alpha y}dyd\alpha=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\alpha)e^{-i\alpha(x-y)}d\alpha dy=$$

$$=\left|g(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\alpha)e^{i\alpha z}d\alpha\right|=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy=f\cdot g$$

Считая, что преобразование Фурье определяется δ – функцией Дирака:

$\delta(\alpha)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}dx$ – это интегральное представление δ – функции.

δ – функция четная.

$$\delta(-\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x}dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha y}dy=\delta(\alpha)$$

1) Рассмотрим задачу Коши для однородного волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad -\infty<x<\infty,\ \ t>0$$

$$\text{(I)}\quad u\big|_{t=0}=\varphi(x)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)$$

Применим преобразование Фурье по x.

Обозначим:

$$\Phi(\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{i\alpha x}dx$$

$$\Psi(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)e^{i\alpha x}dx$$

$$U(\alpha,t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{i\alpha x}dx$$

Применим преобразование Фурье к уравнению и начальным условиям. Будем иметь:

$$\frac{\partial^2 U(\alpha,t)}{\partial t^2}=(-i\alpha a)^2U(\alpha,t),\quad t>0$$

$$U(\alpha,0)=\Phi(\alpha)$$

$$\frac{\partial U(\alpha,0)}{\partial t}=\Psi(\alpha)$$

Полученную задачу можно рассмотреть как задачу для ОДУ:

$$U''(\alpha,t)+\alpha^2a^2U(\alpha,t)=0$$

$$U(\alpha,0)=\Phi(\alpha)$$

$$U'(\alpha,0)=\Psi(\alpha)$$

$$U(\alpha,t)=c_1e^{-ia\alpha t}+c_2e^{ia\alpha t}$$

Подставим общее решение в начальные условия, при t=0 будем иметь:

$$\begin{cases} c_1+c_2=\Phi(\alpha)\\ -c_1+c_2=\dfrac{\Psi(\alpha)}{ia\alpha}\end{cases}$$

Сложим, вычтем, получим:

$$c_2=\frac{\Phi(\alpha)}{2}+\frac{\Psi(\alpha)}{2ia\alpha}$$

$$c_1=\frac{\Phi(\alpha)}{2}-\frac{\Psi(\alpha)}{2ia\alpha}$$

Подставим в $U(\alpha,t)$, получим:

$(*)\quad U(\alpha,t)=\dfrac{\Phi(\alpha)}{2}\left[e^{-ia\alpha t}+e^{ia\alpha t}\right]+\dfrac{\Psi(\alpha)}{2ia\alpha}\left[-e^{-ia\alpha t}+e^{ia\alpha t}\right]$ – получено решение задачи в трансформантах.

Применим к (*) обратное преобразование Фурье:

$u(x,y)=\dfrac{1}{2\pi}\cdot\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\alpha)e^{-i\alpha x}\left[e^{-ia\alpha t}+e^{ia\alpha t}\right]d\alpha+\dfrac{1}{2\pi}\cdot\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\Psi(\alpha)}{ia\alpha}e^{-i\alpha x}\left[-e^{-ia\alpha t}+e^{ia\alpha t}\right]d\alpha$ Рассмотрим первое слагаемое, его можно представить в виде:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\alpha)e^{-i\alpha(x+at)}d\alpha+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\alpha)e^{-i\alpha(x-at)}d\alpha\right]=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]$$

Преобразуем второе слагаемое:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Psi(\alpha)}{i\alpha\alpha}\left[-e^{-i\alpha(x-\alpha t)}+e^{i\alpha(x+\alpha t)}\right]d\alpha\right]$$

$$\psi(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\alpha)e^{-i\alpha y}dy$$

Проинтегрируем правую и левую части по $[x-at,x+at]$:

$$\int_{x-at}^{x+at}\psi(y)dy = \frac{1}{2\pi}\int_{x-at}^{x+at}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\alpha)e^{-i\alpha y}d\alpha dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\alpha)\int_{x-at}^{x+at}e^{-i\alpha y}dyd\alpha =$$

$= -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\alpha)\frac{e^{-i\alpha(x+\alpha t)}-e^{-i\alpha(x-\alpha t)}}{i\alpha}d\alpha = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(y)dy$, т.е. получим формулу Даламбера.

2) Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$\text{(II)} \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x)$$

Применим преобразование Фурье к уравнению и начальным условиям:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + a^2\alpha^2 U(\alpha,t) = 0$$

$$U(\alpha,0) = \Phi(\alpha)$$

Решение:

$$U(\alpha,t) = c_1 e^{-a^2\alpha^2 t}$$

Из начального условия: $c_1 = \Phi(\alpha)$, тогда:

$$U(\alpha,t) = \Phi(\alpha)e^{-a^2\alpha^2 t}$$

Сделаем обращение:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\alpha)e^{-a^2\alpha^2 t}e^{-i\alpha x}d\alpha = \left|\text{формула Эйлера}\right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\alpha)e^{-a^2\alpha^2 t}(\cos\alpha x - i\sin\alpha x)d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\alpha)e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha x d\alpha -$$

$$-\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\alpha)e^{-a^2\alpha^2 t}\sin\alpha x d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha(x-y)d\alpha dy -$$

$$-\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\alpha^2 t}\sin\alpha(x-y)d\alpha dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\int_{0}^{\infty}e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha(x-y)d\alpha dy =$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}dy$$

$$\left|\text{âí óòðåí í èé èí òåãðàë} - \int_{0}^{\infty}e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha(x-y)dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}\right|$$

Можно определить преобразования Фурье и для функций многих переменных.

Пусть $f(x,y)\in L_{R^2}$ – абсолютно интегрируема.

Если обозначить $\overline{f}(\alpha,y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)e^{i\alpha x}dx$

$$F(\alpha,\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f}(\alpha,y)e^{i\beta y}dy$$

Тогда:

$$(\bar{3}) \quad F(\alpha,\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int f(x,y)e^{i(\alpha x+\beta y)}dxdy$$

$(\bar{4})\quad f(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int F(\alpha,\beta)e^{-i(\alpha x+\beta y)}d\alpha d\beta$

49.Интегральные преобразования на полупрямой (преобразование Лапласа, sin, cos- преобразования Фурье, преобразование Ханкеля, преобразование Меллина).

Sin- и Cos- преобразования Фурье.

Общий вид интегрального преобразования:

$$(1)\quad I_f(\alpha)=\int_a^b K(\alpha,x)f(x)dx$$

Если $a=0;\ b=+\infty;\ K(\alpha,x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\alpha x$

Для определенного класса функций можно определить cos–преобразование Фурье:

$$(1^*)\quad F_c(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos\alpha x dx$$

$$(2^*)\quad f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_c(\alpha)\cos\alpha x d\alpha$$

Аналогично, если $K(\alpha,x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\alpha x$, то для определенного класса функций можно задать sin–преобразование Фурье:

$$(3^*)\quad F_s(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin\alpha x dx$$

$$(4^*)\quad f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_s(\alpha)\sin\alpha x d\alpha$$

Очевидно, для существования преобразований функция $f(x)$ должна быть интегрируема на $[0;+\infty)$.

Свойства **Sin- и Cos-** преобразований Фурье.

1) $F_s(\alpha)\to 0,\ F_c(\alpha)\to 0,\ \text{при}\ \alpha\to\infty$

2) Обозначим: $F_c^{(r)}(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{d^{(r)}f(x)}{dx^r}\cos\alpha x dx$

$$F_c^{(1)}(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f'(x)\cos\alpha x dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(x)\cos\alpha x\Big|_0^\infty+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha\int_0^\infty f(x)\sin\alpha x dx=$$

$$=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)+\alpha F_s(\alpha)$$

$$F_c^{(2)}(\alpha)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0)+\alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f'(x)\sin\alpha x dx=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0)+$$

$$+\alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(x)\sin\alpha x\Big|_0^\infty-\alpha^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos\alpha x dx=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0)-\alpha^2F_c(\alpha)$$

Обозначим: $a_r=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d^r f(x)}{dx^r}$

Тогда:

$$F_c^{2r}(\alpha)=-\sum_{n=0}^{r-1}(-1)^n a_{2r-2n-1}\alpha^{2n}+(-1)^r\alpha^{2r}F_c(\alpha)$$

$$F_c^{(2r+1)}(\alpha)=-\sum_{n=0}^{r}(-1)^n a_{2r-2n}\alpha^{2n}+(-1)^r\alpha^{2r+1}F_s(\alpha)$$

$$F_s^{(1)}(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f'(x)\sin\alpha x dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(x)\sin\alpha x\Big|_0^\infty-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha\int_0^\infty f(x)\cos\alpha x dx=$$

$$=-\alpha F_c(\alpha)$$

$$F_s^2(\alpha)=-\alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f'(x)\cos\alpha x dx=-\alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(x)\cos\alpha x\Big|_0^\infty-\alpha^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin\alpha x dx=$$

Тогда:

$$=\alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)-\alpha^2F_s(\alpha)$$

$$F_s^{2r}(\alpha)=-\sum_{n=1}^{r}(-1)^n\alpha^{2n-1}a_{2r-2n}+(-1)^r\alpha^{2r}F_s(\alpha)$$

$$F_s^{(2r+1)}(\alpha)=-\sum_{n=1}^{r+1}(-1)^n\alpha^{2n-1}a_{2r-2n+1}+(-1)^r\alpha^{2r+1}F_c(\alpha)$$

3) Свойство свертки.

Пусть для функций $f(x),\ g(x)\in L_{[0,\infty)}$

$\exists\ F_c(\alpha),\ F_s(\alpha),\ \mathrm{G}_c(\alpha),\ \mathrm{G}_s(\alpha)$, тогда:

(7*) $\displaystyle\int_0^\infty F_c(\alpha)G_c(\alpha)\cos\alpha x d\alpha=\frac{1}{2}\int_0^\infty g(y)\left[f(|x-y|)+f(x+y)\right]dy$

Как частный случай, при x=0:

(8*) $\displaystyle\int_0^\infty F_c(\alpha)G_c(\alpha)d\alpha=\int_0^\infty g(y)f(y)dy$

(9*) $\displaystyle\int_0^\infty F_s(\alpha)G_c(\alpha)\sin\alpha x d\alpha=\frac{1}{2}\int_0^x g(y)\left[f(x-y)+f(x+y)\right]dy+$

$$+\frac{1}{2}\int_x^\infty g(y)\left[f(x+y)-f(|x-y|)\right]dy$$

Докажем (7*): $\displaystyle G_c(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(y)\cos\alpha y dy$

Подставим:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(y)\int_0^\infty F_c(\alpha)\cos\alpha x\cos\alpha y d\alpha dy=\frac{1}{2}\int_0^\infty g(y)\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_c(\alpha)\cos\alpha(x+y)d\alpha+\right.$$

Докажем (9*):

$$\left.+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_c(\alpha)\cos\alpha(x-y)d\alpha\right\}dy=\frac{1}{2}\int_0^\infty g(y)\left[f(x+y)+f(|x-y|)\right]dy$$

$$\int_0^\infty F_s(\alpha)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(y)\cos\alpha y dy\sin\alpha x d\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty g(y)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_s(\alpha)[\sin\alpha(x+y)+\sin\alpha(x-y)]d\alpha dy$$

Интегральное преобразование Лапласа.

Пусть дана функция $f(t),\ t\in[0;\infty)$.

Если ядро интегрального преобразования имеет вид:
$K(p,t) = e^{-pt}; \quad a = 0;\ b = \infty$, то задается интегральное преобразование Лапласа:

(1) $\quad F(p) = \int\limits_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$ (p – комплексный параметр)

При этом, обратное преобразование задается формулой:

(2) $\quad f(t) = \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(p) e^{pt} dp$

Параметр $\gamma \in R$ выбирается следующим образом:
Если

$\int\limits_0^\infty |f(x)| e^{-cx} dx$ – сходится, где c = const, то $\gamma > c$ –любая.

Определим свойства f через свойства трансформанты.

<u>Предложение:</u> пусть $F(\alpha)$ – аналитическая функция комплексного переменного и имеет порядок $O(\alpha^{-k})$ в области $\operatorname{Re}\alpha > c$; $c, k \in R,\ k > 1$

Тогда $\lim\limits_{B\to\infty} \int\limits_{\gamma - iB}^{\gamma + iB} F(\alpha) e^{t\alpha} d\alpha = f(t),\ \forall \gamma > c$ предел не зависит от γ. При этом, $f(t)$ непрерывна при $t > 0$, $f(0) = 0$. (Без доказательства).

Таким образом, преобразование Лапласа существует для всех функций $f(x)$, $x \in [0;\infty),\ f(x) \sim c e^{-Mx};\ M > 0,\ M = const$, имеющих конечное число точек разрыва. Каждая из таких функций имеет единственную трансформанту Лапласа. Функции, имеющие одинаковые трансформанты Лапласа, отличаются не более чем на множестве меры ноль. Преобразование Лапласа имеет очевидную связь с преобразованием Фурье.

Напомним: $F(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx$ – преобразование Фурье,

$f(x) = \dfrac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha$ – обращение преобразования Фурье.

Пусть $|f(x)| < c e^{Mx};\ x \in [0;+\infty),\ c, M = const;\ c, M \in R$.
Доопределим на всей числовой прямой:
$f(x) \equiv 0;\ x < 0$.

Введем новую функцию: $f_1(x) = f(x) e^{-\gamma x},\ \gamma > M$.

Тогда: $F_1(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{i\alpha x} dx$

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_1(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha$$

$$f(x) = \frac{e^{\gamma x}}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_1(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = \frac{e^{\gamma x}}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(y) e^{i\alpha y} dy d\alpha =$$

$$=\left|f_1(x)=f(x)e^{-\gamma x}\right|=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{-yp}dyd\alpha=$$

$$=\left|\text{÷åðåç í î âóþ ïåðåì åí í óþ}\right|=\begin{vmatrix}\gamma-i\alpha=p\\ \alpha=i(p-\gamma)\\ d\alpha=idp\end{vmatrix}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{px}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{-yp}dydp \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(p)e^{px}dp\,.$$

$$F(p)=\int\limits_{0}^{\infty}f(y)e^{-py}dy$$

Преобразование Лапласа часто применяется по временной переменной.

Свойства преобразования Лапласа:

$F(p)\to 0,\quad \operatorname{Re}p\to\infty$

Найдем: $F^{(1)}(p)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f'(t)e^{-pt}dt=f(t)e^{-pt}\Big|_0^{\infty}+p\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-pt}dt=-f(0)+pF(p)$.

Тогда: (3) $F^{(r)}(p)=-\sum\limits_{n=0}^{r-1}p^n\dfrac{d^{r-n-1}f(0)}{dt^{r-n-1}}+p^rF(p)$.

<u>Предложение:</u> Пусть к функциям $f(t)$ и $g(t)$ существуют трансформанты Лапласа $F(p),\ G(p)$ - соответственно. Тогда справедливы соотношения:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(p)G(p)e^{pt}dp=\int\limits_0^t f(y)g(t-y)dy=\int\limits_0^t g(y)f(t-y)dy$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(p)G(p)e^{pt}dp=\int\limits_t^{\infty}f(y)g(y-t)dy\,.$$

Докажем первое равенство:

По определению: $F(p)=\int\limits_0^{\infty}f(y)e^{-py}dy$. Тогда:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}G(p)e^{pt}\int\limits_0^{\infty}f(y)e^{-py}dydp=\int\limits_0^{\infty}f(y)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}G(p)e^{p(t-y)}dp=\int\limits_0^t g(y)f(t-y)dy$$

Преобразование Ханкеля.

Пусть для функции двух переменных существует двойное преобразование Фурье:

(*) $F(\alpha,\beta)=\iint\limits_{\infty}f(x,y)e^{i(\alpha x+\beta y)}dxdy$. При этом:

$$f(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{\infty}F(\alpha,\beta)e^{-i(\alpha x+\beta y)}d\alpha d\beta\,.$$

Предположим: $f(x,y)=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ (угловой зависимости нет).

Перейдем в (*) к полярным координатам:

$x=r\cos\varphi$

$y=r\sin\varphi$

$\alpha=\rho\cos\theta$

$\beta=\rho\sin\theta$

$$\Rightarrow\ F(\rho,\theta)=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} f(r) r e^{ir\rho(\cos\varphi\cos\theta+\sin\varphi\sin\theta)}d\varphi dr=\int_0^{\infty} f(r) r\int_0^{2\pi} e^{ir\cos(\varphi-\theta)}d\varphi dr$$

Внутренний интеграл – табличный:

$\int_0^{2\pi} e^{ir\rho\cos(\varphi-\theta)}d\varphi=2\pi J_0(r\rho)$ (не зависит от θ)

J_0 − функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

$F(\rho)=2\pi\int_0^{\infty} f(r) r J_0(r\rho)dr$.

При этом: $f(r)=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} F(\rho)\rho J_0(r\rho)d\rho$.

<u>Определение:</u> Пусть задана функция $f(x),\ x\in[0;\infty)$. Если интервал преобразования: $a=0,\ b=\infty,\ K(\alpha,x)=xJ_\nu(\alpha x)$, то говорят, что определено преобразование Ханкеля порядка ν:

$$(1)\quad \mathrm{F}_\nu(\alpha)=\int_0^{\infty} f(x)xJ_\nu(\alpha x)dx$$

$$(2)\quad f(x)=\int_0^{\infty} F(\alpha)\alpha J_\nu(\alpha x)d\alpha\ \text{ - обратное}.$$

Рассмотрим преобразование Ханкеля от первой производной функции:

$$F^{(1)}(\alpha)=\int_0^{\infty} f'(x)xJ_\nu(\alpha x)dx=\left|\begin{array}{l} J_\nu'(\alpha)=J_{\nu-1}(\alpha)-\dfrac{\nu}{\alpha}J_\nu(\alpha) \\ J_\nu'(\alpha)=\dfrac{\nu}{\alpha}J_\nu(\alpha)-J_{\nu+1}(\alpha) \\ \text{выразим функцию Бесселя} \\ J_\nu(\alpha)=\dfrac{\alpha}{2\nu}J_\nu(\alpha)-J_{\nu+1}(\alpha) \\ \text{подсчитаем интеграл по частям:} \end{array}\right|=$$

$$=f(x)xJ_\nu(\alpha x)\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty} f(x)\left[J_\nu(\alpha x)+\alpha xJ_\nu'(\alpha x)\right]dx=$$

$$=\left|\text{áóäåì ðàññì àòðèâàòü òî ëüêî }\nu>0,\text{ åñëè }\nu<0,\text{ òî }\nu=-n\right|=$$

$$=-\int_0^{\infty} f(x)\left[J_\nu(\alpha x)+\alpha x\left(\frac{\nu}{\alpha x}J_\nu(\alpha x)-J_{\nu+1}(\alpha x)\right)\right]dx==-\int_0^{\infty} f(x)\left[(1+\nu)J_\nu(\alpha x)-\alpha xJ_{\nu+1}(\alpha x)\right]dx=$$

$$=-\int_0^{\infty} f(x)\left[\frac{(1+\nu)\alpha x}{2\nu}\left(J_{\nu+1}(\alpha x)+J_{\nu-1}(\alpha x)\right)-\alpha xJ_{\nu+1}(\alpha x)\right]dx=$$

$$=-\frac{\alpha}{2\nu}\int_0^{\infty} f(x)x\left[(\nu+1)J_{\nu-1}(\alpha x)-(\nu-1)J_{\nu+1}(\alpha x)\right]dx=$$

$$=\left|1+\nu-2\nu=1-\nu\right|=\frac{\alpha}{2\nu}\left[(\nu-1)\int_0^\infty f(x)xJ_{\nu+1}(\alpha x)dx-(\nu+1)\int_0^\infty f(x)xJ_{\nu-1}(\alpha x)dx\right]$$

$$(3)\quad F_\nu^{(1)}(\alpha)=\frac{\alpha}{2\nu}\left[(\nu-1)F_{\nu+1}(\alpha)-(\nu+1)F_{\nu-1}(\alpha)\right]$$

Преобразование Ханкеля используется в задачах с центрально – симметричными полями

Преобразование Меллина.

Если ядро интегрального преобразования имеет вид:

$K(\alpha,x)=x^{\alpha-1};\quad a=0;\ b=+\infty$,

то для определенного класса функций может быть определено преобразование Меллина:

$$(1)\quad F(\alpha)=\int_0^\infty F(x)x^{\alpha-1}dx.$$

Тогда обращение задается формулой:

$$(2)\ f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(\alpha)x^{-\alpha}d\alpha.$$

Предложение: Если интеграл $\int_0^\infty x^{c-1}\left|f(x)\right|dx$ сходится для некоторого $c>0$ и $G(\alpha)=\int_0^\infty f(x)x^{\alpha-1}dx$, тогда $\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\beta}^{\gamma+i\beta}G(\alpha)x^{-\alpha}dx=f(x);\quad \gamma\in\mathrm{R},\ \gamma>\mathrm{c}$.

Рассмотрим преобразование Меллина от первой производной функции:

$$F^{(1)}(\alpha)=\int_0^\infty f'(x)x^{\alpha-1}dx=f(x)x^{\alpha-1}\Big|_0^\infty-(\alpha-1)\int_0^\infty f(x)x^{\alpha-2}dx=-(\alpha-1)F(\alpha-1)$$

Аналогично можно записать:

$$F^{(n)}(\alpha)=\int_0^\infty\frac{d^nf}{dx^n}x^{\alpha-1}dx=-(\alpha-1)F^{(n-1)}(\alpha-1)=\frac{(-1)^nF(\alpha-n)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-n)}$$

Теорема(о свертках): Пусть для функций $f(x),\ g(x)$ существуют трансформанты Меллина $F(\alpha)$ и $\mathrm{G}(\alpha)$ соответственно.

Тогда:

$$(*)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(\alpha)G(\alpha)x^{-\alpha}d\alpha=\int_0^\infty f\left(\frac{x}{y}\right)g(y)\frac{dy}{y}$$

$$(**)\quad \int_0^\infty f(x)g(x)x^{\alpha-1}\alpha x=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(\beta)G(\alpha-\beta)d\beta$$ – свертка в обратную сторону.

Доказательство:

Докажем соотношение (*):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(\alpha)x^{-\alpha}\int_0^\infty g(y)y^{\alpha-1}dyd\alpha=\left|\text{меняем порядок интегрирования}\right|=$$

$$=\int_0^\infty\frac{g(y)}{y}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(\alpha)\left(\frac{x}{y}\right)^{-\alpha}d\alpha dy=\int_0^\infty f\left(\frac{x}{y}\right)g(y)\frac{dy}{y}$$

Для (**): $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(\beta)\int_0^\infty g(x)x^{\alpha-1}x^{-\beta}dxd\beta=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma-i\infty}F(\beta)G(\alpha-\beta)d\beta$

Преобразование Меллина применимо для задач в клиновидных областях.

50.Преобразование Фурье в конечной области.

Пусть функция $f(x) \in L_{[0;\pi]}$, тогда для нее можно определить конечное преобразование Фурье:

$$(1) \quad F_s(n) = \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$(2) \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} F_s(n) \sin nx$$

Аналогично:

$$(3) \quad F_c(n) = \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$(4) \quad f(x) = \frac{f_c(0)}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} F_c(n) \cos nx$$

Аналогично на произвольном интервале:

$$(\bar{1}) \quad F_s(n) = \int_0^{l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx$$

$$(\bar{2}) \quad f(x) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} F_s(n) \sin \frac{\pi n x}{l}$$

$$(\bar{3}) \quad F_c(n) = \int_0^{l} f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx$$

$$(\bar{4}) \quad f(x) = \frac{f_c(0)}{l} + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} F_c(n) \cos \frac{\pi n x}{l}$$

Рассмотрим трансформанты sin–преобразований Фурье от производных:

$$F_s^{(1)}(n) = \int_0^{l} f'(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} \Big|_0^l - \frac{\pi n}{l} \int_0^{l} f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx = - \frac{\pi n}{l} F_c(n)$$

$$F_s^{(2)}(n) = \int_0^{l} f''(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = f'(x) \sin \frac{\pi n x}{l} \Big|_0^l - \frac{\pi n}{l} \int_0^{l} f'(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx =$$

$$= - \frac{\pi n}{l} f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} \Big|_0^l - \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \int_0^{l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx =$$

$$= (-1)^n f(l) + f(0) - \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 F_s(n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

<u>Пример:</u> Рассмотрим задачу о малых поперечных колебаниях струны с закрепленными концами:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \ t > 0$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x)$$

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0$$

Применим к задаче sin–преобразование Фурье:

$$U(n,t) = \int_0^l u(x,t)\sin\frac{\pi n x}{l}dx$$

$$\Phi(n) = \int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx$$

$$\Psi(n) = \int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx$$

Уравнение примет вид:

$$\frac{d^2U(n,t)}{dt^2} = -\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 U(n,t)$$

$$U(n,0) = \Phi(n)$$

$$\frac{dU(n,0)}{dt} = \Psi(n)$$

Перепишем:

$$\frac{d^2U(n,t)}{dt^2} + \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 (n,t) = 0$$

$$U(n,t) = c_1\cos\frac{a\pi n}{l}t + c_2\sin\frac{a\pi n}{l}t$$

$$U(n,t) = \Phi(n)\cos\frac{a\pi n}{l}t + \frac{l\Psi(n)}{a\pi n}\sin\frac{a\pi n}{l}t$$

Обращение:

$$(\bar{5}) \quad u(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\Phi(n)\cos\frac{a\pi n}{l}t + \frac{l\Psi(n)}{a\pi n}\sin\frac{a\pi n}{l}t\right]\sin\frac{\pi n x}{l}$$

$$(\bar{6})\begin{cases}\Phi(n) = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx \\ \Psi(n) = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx\end{cases}$$